

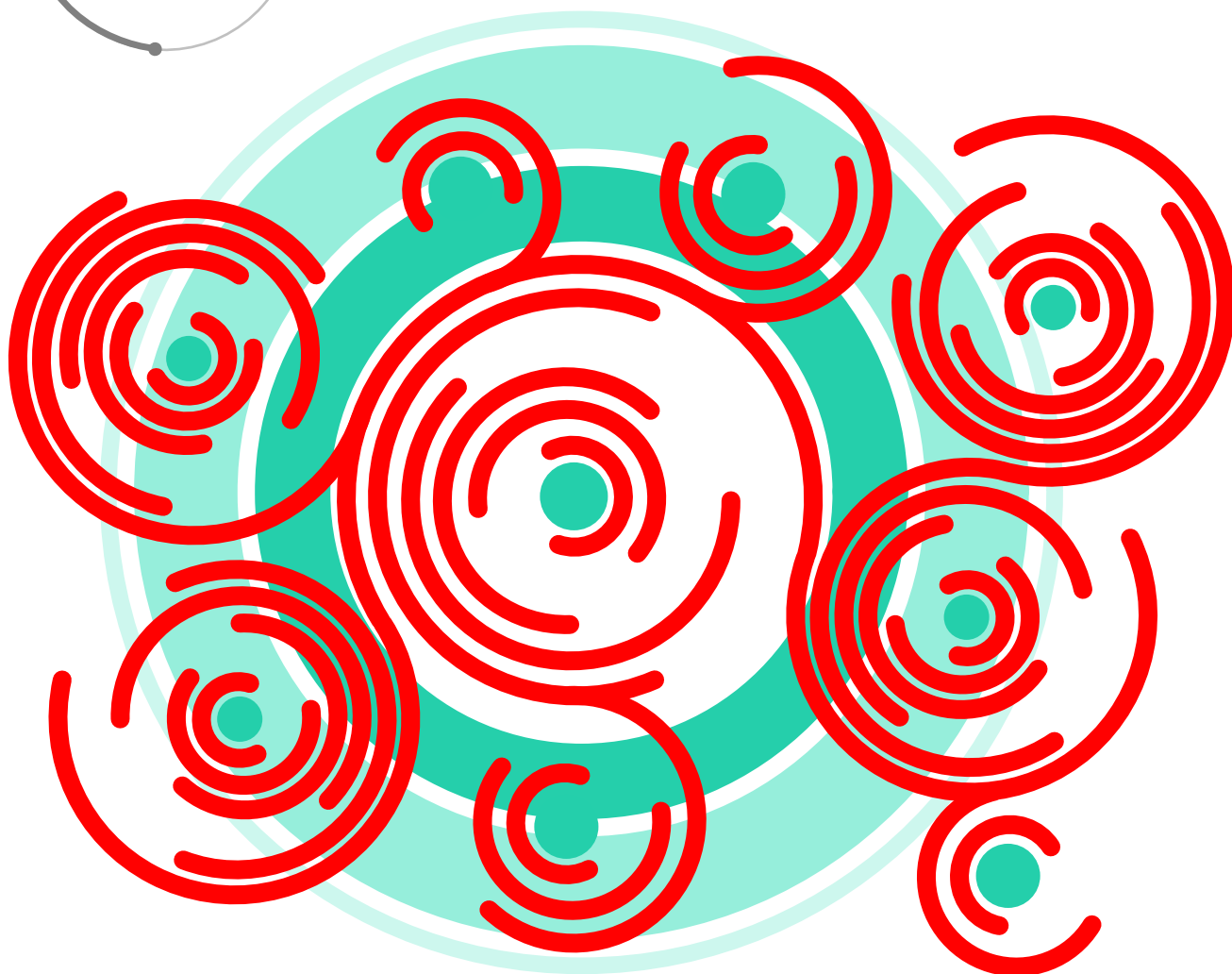
Numero XI
Anno 2018


DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA
"Ennio De Giorgi"


UNIVERSITÀ
DEL SALENTO

Viaggio nella Scienza

Ithaca



I sistemi integrabili

Ithaca: Viaggio nella Scienza

Una pubblicazione del Dipartimento di Matematica e Fisica “Ennio De Giorgi” dell’Università del Salento.

Registrazione presso il Tribunale di Lecce n. 6 del 30 Aprile 2013.
e-ISSN: 2282-8079

Direttore Responsabile
Luigi Spedicato.

Ideatore
Giampaolo Co’.

Comitato di Redazione
Adriano Barra,
Rocco Chirivì,
Paolo Ciafaloni,
Maria Luisa De Giorgi,
Vincenzo Flaminio,
Luigi Martina,
Giuseppe Maruccio,
Marco Mazzeo,
Francesco Paparella,
Carlo Sempi.

Segreteria di Redazione
Daniela Dell’Anna.

© 2013-2017 Dipartimento di Matematica e Fisica “*Ennio de Giorgi*”.

© 2017 per i singoli articoli dei rispettivi autori.

Il materiale di questa pubblicazione può essere riprodotto nei limiti stabiliti dalla licenza
“*Creative Commons Attribuzione – Condividi allo stesso modo 3.0 Italia*” (CC BY-SA 3.0 IT).

Per il testo della licenza: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/it/deed.it>

Ithaca: Viaggio nella Scienza
è disponibile sul sito:

<http://ithaca.unisalento.it/>

Scriveteci all’indirizzo:

ithaca@unisalento.it

3 In questo numero

7 Sistemi Integrabili
Luigi Martina

39 Trascendenti di Painlevé e integrabilità
Davide Guzzetti

51 Solitoni e Triangolazioni Triangulations and
solitons
Yuji Kodama

71 Onde anomale
Petr Georgievich Grinevich, Paolo Maria Santini

85 Simmetrie di Lie e Lie-Bäcklund per equazioni
differenziali
Decio Levi

103 Sull'integrabilità della termodinamica dell'equilibrio
Antonio Moro

117 Superintegrabilità
Danilo Riglioni

La lezione mancata
125 Statistica, entropia e temperatura
Giampaolo Co'

In questo numero

Il tema attorno al quale si impernano gli articoli di questo numero è quello dei cosiddetti **Sistemi Integrabili** non lineari.

Messa in questi termini la questione sembra essere posta da specialisti a specialisti, anche rispetto alla maggioranza dei fisici e dei matematici militanti. Invece è l'ambito naturale nel quale si cerca di dare una risposta a delle domande ovvie: dopo aver scritto le equazioni del moto per un dato sistema, che informazioni possiamo ricavare?

Se scrivere le equazioni del moto significa proporre in linguaggio matematico la descrizione del comportamento di un certo sistema, poi siamo veramente capaci di risolverle? In particolare: siamo capaci di ottenere soluzioni analitiche per qualsiasi valore delle variabili indipendenti e per tutte le condizioni iniziali ammissibili? E quali sono le condizioni perché ciò possa avvenire? Quale tipo di ordine possiamo intravedere in tali soluzioni? Quanto ci possiamo spingere in questo tipo di analisi? Ovvero, quali sono i limiti a priori che la Natura, l'osservazione, e la Matematica ci impongono in questa impresa? Quanto della ricchezza e della complessità del fenomeno viene perso e quanto, invece, viene estratto da un ideale territorio, fino ad oggi solo immaginato, o forse nemmeno pensato? Infine, ci sono ricadute pratiche (nel senso scientifico e tecnologico dell'espressione) di tali ricerche?

Le ricerche nel campo dei Sistemi Integrabili non fanno riferimento ad uno specifico settore delle Scienze, ma hanno un carattere metodologico generale. Il loro scopo è quello di produrre una rete di modelli e metodi interpretativi e predittivi, esattamente come i radio-fari della navigazione aerea, nel mare ribollente di tutti i

possibili modelli che ci si possa inventare.

Per quanto speciali e peculiari essi siano, i Sistemi Integrabili insegnano qualcosa di assolutamente generale: strutture stabili nella dinamica dei sistemi emergono e si instaurano senza bisogno di ricorrere a forme di sostegno esterno. Esse si auto-organizzano e persistono, senza che si possano decomporre in strutture più semplici ed elementari. Nessun calcolo perturbativo ne può riprodurre efficacemente le caratteristiche.

Perciò il destino di tale campo di ricerche non è quello di formare un corpus autonomo di conoscenze, come la Fisica delle Particelle Elementari o la Fisica della Materia. Piuttosto, i suoi risultati si diffondono e vengono utilizzati in tutti i rami della conoscenza. La interiorizzazione di tali idee da parte delle varie comunità scientifiche può essere lenta, ma ampiamente e inesorabilmente in atto.

La foto che presentiamo in questa introduzione si riferisce al convegno internazionale, ultimo in ordine di tempo di una lunga serie, *Physics and Mathematics of Nonlinear Phenomena*, organizzato nel 2017 dal gruppo di studio sui sistemi nonlineari del Dipartimento di Matematica e Fisica Ennio De Giorgi dell'Università del Salento. Il convegno ha celebrato il 50^o anniversario della scoperta del *Metodo della Trasformata Spettrale Inversa*, che ha profondamente inciso sullo sviluppo delle ricerche in questo settore. È stata anche l'occasione per commemorare il Prof. L. Faddeev, scomparso pochi mesi prima, che è stato uno dei massimi studiosi dei sistemi integrabili classici e quantistici.

Di questi aspetti generali se ne trova un resoconto nel contributo di Luigi Martina, che costituisce una rassegna introduttiva delle motiva-



Figura 1: Foto di gruppo della conferenza *Physics and Mathematics of Nonlinear Phenomena 2017* tenutosi a Gallipoli (Le) dal 17 al 22 Giugno 2017.

zioni e delle ricerche, che hanno condotto alla teoria dei Sistemi Integrabili. Viene illustrato brevemente il concetto chiave di Integrabilità per i Sistemi Hamiltoniani e viene discusso il concetto generale di *Solitone*. Illustrando alcuni esempi, ormai dei classici della Fisica Matematica, vengono introdotti il metodo della Trasformata Spettrale Inversa (IST) e le Trasformate di Bäcklund. Il testo intende costituire una cornice delle tematiche più specifiche affrontate nei contributi successivi.

L'articolo di Davide Guzzetti si concentra su una classe particolare di equazioni differenziali del secondo ordine, non lineari e a coefficienti variabili, dette di *Painlevé*. All'inizio del XX secolo esse furono classificate rispetto alle proprietà delle loro singolarità nel piano complesso della variabile indipendente, con lo scopo di trovare nuove funzioni speciali. E in effetti lo scopo è stato raggiunto, ma le dimostrazioni e le procedure di rappresentazione hanno richiesto un intero secolo di lavoro. Guzzetti ripercorre questo straordinario viaggio, ponendo l'accento sia sulla centralità di queste equazioni in tutti i pro-

blemi contemporanei relativi ai fenomeni non lineari, dai modelli statistici al calcolo dei blocchi conformi in teoria delle stringhe, sia su una differente nozione di integrabilità.

Il contributo di Yuji Kodama si concentra sui metodi algebrici combinatori di classificazione delle soluzioni solitoniche dell'equazione di *Kadomtsev - Petviashvili di tipo II*. A dispetto dell'esotico nome, questa equazione emerge in una varietà di situazioni fisiche e matematiche estremamente vasta e, in particolare, costituisce la prima deformazione non lineare per descrivere le onde del mare poco profondo. Perciò il suggerimento da dare al lettore è di procurarsi l'articolo di Kodama, una macchina fotografica, ed andare al lido marino più vicino. Questo tenendo comunque a mente che le stesse onde si ritrovano come perturbazioni del campo gravitazionale in prossimità dell'orizzonte degli eventi di un buco nero.

Per rimanere nell'ambito marino, Petr Giorgievich Grinevich e Paolo Maria Santini trattano invece di *Onde Anomale*, le quali si possono studiare con gli stessi metodi analitici dei solitoni.

La lettura stimola a comprendere quanto possa essere nascosta l'origine di *fenomeni estremi* e quanto di essi si possa dare una descrizione quantitativa. Osservazioni in Natura e in laboratorio confermano la universalità dei concetti esposti.

Il lavoro di Decio Levi sviluppa l'idea che se un certo problema ha diverse soluzioni, allora queste si possono collegare tra loro in maniera esplicita. In termini differenti si dice che al problema è associata una certa famiglia di operazioni, dette *Simmetrie*, che collegano le soluzioni tra di loro. Applicando questo concetto alle equazioni differenziali, si sono elaborati metodi per concretizzare ed utilizzare questa idea. Questo ha portato a introdurre concetti centrali nella Matematica, quali le algebre e i gruppi di Lie di simmetrie puntuali e simmetrie generalizzate di Lie-Bäcklund. Tali concetti sono stati utilizzati ampiamente in Matematica ed in Fisica, tanto che la procedura abituale consiste nell'assumere a priori un certo numero di simmetrie per il sistema. Tuttavia il loro studio sistematico per un generico sistema non lineare ha richiesto due sviluppi disponibili solo nell'ultimo quarto del XX secolo: i metodi di classificazioni di algebre e sotto-algebre e lo sviluppo del calcolo simbolico al computer. Le ricadute di tali metodologie sono state di grande impatto nello studio dei sistemi integrabili.

Nel suo articolo, Antonio Moro ha invece affrontato la descrizione classica delle *transizioni di fase* dal punto di vista dei sistemi integrabili. In particolare emerge come il diagramma di fase di un sistema termodinamico sia strettamente collegato con le soluzioni di tipo *Onde di Shock* (d'urto) di alcuni sistemi integrabili, quali l'*equazione di Burgers* linearizzabile con un cambio locale di variabili. Infatti, interpretando tale equazione, e sue generalizzazioni, come equazioni di stato in forma differenziale, si possono far corrispondere i gradini presenti negli shock con le discontinuità delle grandezze termodinamiche nelle regioni di transizione di fase. Questo punto di vista fa presagire nuovi possibili sviluppi in varie direzioni, menzionate nel testo, della ricerca scientifica.

Già scorrendo questa introduzione il lettore si accorgerà che l'espressione integrabile è stata usata con almeno quattro connotazioni leggermente diverse: non potevamo quindi farci

mancare la *super-integrabilità*, che viene discussa da Danilo Riglioni. Il prefisso super, vagamente supponente, esprime alla fine un fatto elementare: alcuni sistemi meccanici hanno traiettorie chiuse per un insieme continuo di condizioni iniziali. Questa proprietà non è tanto comune e, in effetti, solo pochi sistemi la ammettono: i più tipici sono i sistemi Kepleriani e quelli armonici isotropi. Quale sia l'origine di questo peculiare comportamento, come si caratterizzi, e soprattutto, se sia possibile trovarne di nuovi è il tema del lavoro.

Il numero si chiude con *La lezione mancata* di Giampaolo Co', riguardante la relazione tra Entropia e Temperatura.

Auguriamo una buona lettura,
il Comitato di Redazione.

Sistemi Integrabili

διὰ γὰρ τὸ θαυμάζειν οἱ ἄνθρωποι καὶ νῦν
καὶ τὸ πρῶτον ἤρξαντο φιλοσοφεῖν

In effetti, ora come in origine, gli uomini hanno iniziato a filosofare per la meraviglia.

(Aristotele, *Methaphysica*, A 2, 982b)

Luigi Martina

Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi" Università del Salento,
INFN Sezione di Lecce

Breve rassegna del concetto di Sistema Integrabile Classico e delle sue applicazioni recenti in vari campi della Fisica.

Tra i tanti ricercatori che hanno partecipato allo sviluppo di queste idee, un cenno particolare è stato posto sulla figura di L. Faddeev, recentemente scomparso.

Introduzione

Una grande differenza tra il fare Scienza oggi rispetto agli antichi non consiste tanto nella scrupolosa ed ostinata ricerca delle Leggi che governano l'Universo, quanto l'insopprimibile bisogno di metter tali Leggi alla prova. In altre parole il cercare di dedurre delle conseguenze logiche osservabili, entro i limiti di validità già predefiniti dalla stessa teoria e di essa parte integrante. Se le leggi sono basate su misure fatte con il metro della sarta, con il metro della sarta vanno verificati gli esiti delle nostre deduzioni. Sarebbe così del tutto fuorviante tentare di derivare proprietà degli atomi, che mai potranno essere accomodate entro misure e leggi che ne ignorano l'esistenza. Ovviamente, menzionando metri da sarta, bilance da salumiere e orologi a cucù, o tutto l'armamentario di microsensori a disposizione sui nostri cellulari, oppure il mi-

croscopio a forza atomica di Binnig, il rivelatore ATLAS del CERN di Ginevra, LIGO e VIRGO, non stiamo facendo altro che postulare che le grandezze fisiche contengano nella loro definizione una qualche proprietà matematizzabile. E a questo punto le conseguenze vanno ricavate con Leibnitz: *Calcoliamo!*.

Non è più sufficiente dire, con Aristotele, che tutti i corpi andranno, prima o poi, nel loro luogo naturale. La domanda alla quale rispondere è: se ci vanno, come ci vanno? Nel senso di: quanto spazio percorre e quanto tempo occorre ad un carretto fatto così e così e lasciato andare da un certo punto a fermarsi lungo una strada sterrata, oppure su una strada ben selciata, imprimendogli un impulso pari a tot? Naturalmente, chi ha frequentato il liceo, e ha dimenticato Aristotele, subito dirà: usiamo i Principi di Newton [1]! Ma dopo aver scritto la formula $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$, bisogna tradurla negli algoritmi corrispondenti e iniziare a calcolare la soluzione delle equazioni del moto. Questo lo si può fare numericamente, per piccoli passi discreti, oppure con metodi analitici, nei quali si prendono le mosse da una certa idea di continuità per alcuni oggetti matematici come i numeri reali \mathbb{R} . Così brillante è l'idea che in effetti è diventata il modello prototipo per quasi tutti i ragionamenti sul circostante. Da essa trae

origine la Meccanica Analitica dai tempi di Lagrange in poi [2]. Ma a volte questa intuizione è solo di una presunta forma *a priori*, senza una effettiva verifica sperimentale. E i fisici hanno molte altre alternative sulla natura e struttura fine dello spazio-tempo, e di ogni altro ente fisico in esso immerso (a titolo esemplificativo si veda [3] o a un livello più tecnico [4, 5]). D'altra parte non è la credibilità dell'analisi reale come modello di spazio e di tempo quello che è importante, ma i metodi di base, sapendoli estendere, modificare ed applicare ad altre teorie, senza perderne il rigore logico e la potenza deduttiva.

Pendoli, Trottolo e Pianeti

Immediatamente dopo la formulazione dei *Principia* di Newton, e con una teoria del *Calcolo* ancora non su basi solidissime, gli scienziati cercarono di trovare soluzioni esatte per problemi meccanici non banali. Certamente il problema di Keplero fu risolto analiticamente dallo stesso Newton. L'importanza di questo risultato di per sé ha segnato tutta la Scienza successiva. Tuttavia, a parte questo esempio, solo una manciata di altri problemi si sarebbero potuti trattare esattamente, cioè senza ricorrere ad approssimazioni intermedie nei calcoli, basate su ipotesi aggiuntive del modello, o su calcoli numerici. Questi contengono intrinsecamente delle approssimazioni dovute alla taglia del passo scelto e, comunque, effettivamente perseguibili in grande scala e tempi lunghi solo con l'avvento della moderna scienza dei computers.

A questo proposito vanno citati due esperimenti numerici dei primi anni '50 del XX secolo: la catena di Fermi - Pasta - Ulam (FPU) [6] e quello sulla viscosità artificiale di Von Neumann [7]. Entrambi antesignani delle moderne tecniche di simulazione numerica e dell'uso del calcolatore elettronico come un laboratorio indirizzato alla scoperta di nuovi fatti scientifici. Specificatamente il modello di FPU, costituito da una catena di oscillatori non lineari interagenti tra i primi vicini, fu introdotto per studiare numericamente l'*ipotesi ergodica* e il *teorema di equipartizione dell'energia*. Nel secondo caso si studiava la stabilità numerica di sistemi discretizzati, partendo da modelli continui di propagazione di onde d'urto. In entrambi i casi fu evidenziato l'emergere di

strutture stabili nelle soluzioni, dovute agli effetti combinati della dispersione o dissipazione, rispettivamente, e della non linearità.

Fin da tempi remoti si è cercato di descrivere i moti di sistemi più o meno complessi in termini di moti rettilinei o circolari uniformi. Cioè moti che manifestavano un intrinseco senso di semplicità e di bellezza, o se si preferisce di ordine e di regolarità (o ancora, di simmetria esplicitamente espressa), con un che di magico oltre che di grande praticità. Ma da Newton in poi ogni astro e ogni particella dell'Universo si muove piegandosi alle forze che via via incontra lungo la sua traiettoria. Questa ora può essere molto complicata, affatto connessa a moti uniformi o circolari e al senso di sicurezza e di ordine che da essi emana. Basti pensare che le forze tra gli astri, da sempre pensate a simmetria centrale, in effetti possono dar luogo a orbite ellittiche o, addirittura, iperboliche, come nel caso delle comete. Qualcosa che lasciava sgomenti e sfuggiva all'immaginario e sospirato grande ordine cosmico esistente *ad maximam Dei gloriam*.

Forse è opportuno chiarire ora che il concetto di integrabilità non è lo stesso di risolubilità. Il fatto che molto spesso le due cose vadano assieme è certamente ciò che rende le teorie integrabili così attraenti, tuttavia è necessario fare una distinzione. Esistono sistemi integrabili che non si possono veramente esprimere sino in fondo analiticamente, così come esistono sistemi esattamente risolvibili che non sono integrabili. La risolubilità dipende in ultima analisi dalla capacità e dalla potenza computazionale. L'integrabilità si riferisce piuttosto alla proprietà di un sistema di mostrare comportamenti regolari (quasi-periodici) per ogni possibile condizione iniziale, in opposizione a quelli caotici e irregolari. Lo stesso discorso vale per la versione quantistica di tali sistemi, dove l'integrabilità implica delle proprietà molto specifiche nella struttura dello spettro degli osservabili.

Perciò, nonostante la *Mécanique Analytique* di Lagrange e l'enunciazione del paradigma meccanicistico determinista, all'inizio dell'800 gli esempi di modelli dinamici a più gradi di libertà, dei quali si conoscessero le soluzioni in forma analitica erano il già citato problema di Keplero, i sistemi di oscillatori armonici, il corpo rigido con un punto fisso e in assenza di forze esterne (trot-

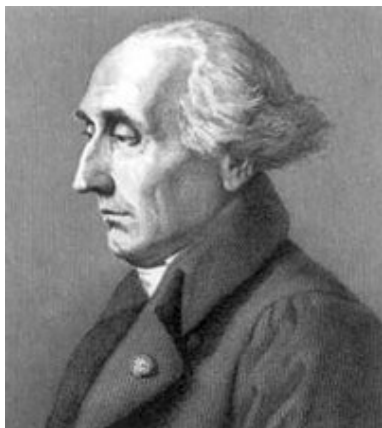


Figura 1: Joseph-Louis (Giuseppe Lodovico) Lagrange (1736 (Torino) - 1813 (Parigi))



Figura 3: William Rowan Hamilton (1805 (Dublino) - 1865 (Dublino))

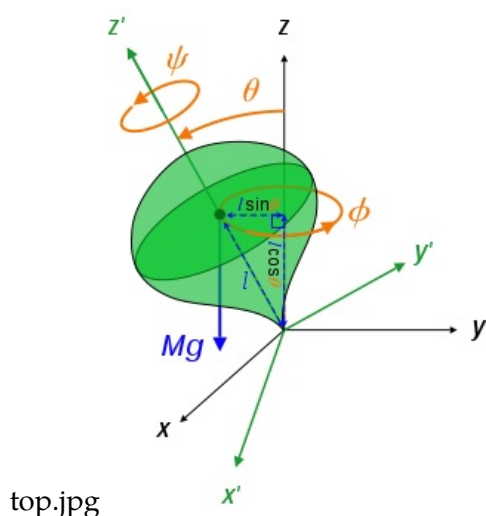


Figura 2: La trottola di Lagrange



Figura 4: Joseph Liouville (1809 (Saint Omer) - 1882 (Parigi))

tola di Eulero) e la trottola di Lagrange (trottola simmetrica con un punto fisso e baricentro sull'asse di simmetria, sottoposto all'azione di un campo uniforme di forze). Senza dettagliare troppo, la loro risolubilit  era garantita dall'esistenza di un numero sufficiente di quantit  analitiche conservate, il che permetteva di ridurre il problema al calcolo di un solo integrale. Il processo veniva chiamato *riduzione alle quadrature*. Come questi metodi si potessero estendere ad altri casi o come si potessero costruire modelli con simili propriet  era sostanzialmente ignoto. Molto era lasciato all'abilit  tecnica del singolo studioso.

Per tutta la durata della prima met  del XIX secolo Hamilton, Jacobi e Liouville perfezionarono la nozione di integrabilit  per quei sistemi meccanici detti, per l'appunto, *Hamiltoniani*. Essi for-

nirono un quadro generale per la loro risoluzione mediante quadrature. A questo proposito molti ricorderanno l'*equazione di Hamilton-Jacobi* e il *teorema di Liouville* (poi generalizzato da Arnold).

Un caso notevole di trottola dal moto integrabile fu discusso da Sofia (Sonya) Kovalewskii nel 1889, utilizzando un metodo basato sullo studio delle singolarit  presenti nelle soluzioni. Richiedendo che tali singolarit  siano abbastanza semplici,   possibile stabilire quando i moti sono regolari ed il sistema integrabile. Va sottolineato che la procedura di Kovalewskii fu ripresa, con altre motivazioni, da Painlev , e la sua scuola, nell'ambito della classificazione delle equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine non lineari.



Figura 5: Carl Jacobi (1804 (Potsdam) - 1851 (Berlino))



Figura 6: Sofia Vasilyevna Kovalevskaya (1850 (Mosca) - 1891 (Stoccolma))

Per i dettagli di questo metodo rimandiamo all'articolo di D. Guzzetti nel presente numero di Ithaca.

Poco dopo, però, H. Poincaré dimostrò che il sistema di 3 corpi in interazione gravitazionale tra loro non ha soluzione generale analitica, data da espressioni algebriche e integrali. Inoltre fece vedere che in molte situazioni esiste una dipendenza sensibile dei moti dalle loro condizioni iniziali. Infatti una delle idee fondamentali del suo *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* fu quella di studiare i moti prossimi a quelli periodici (alcuni dei quali già noti a Eulero e Lagrange), modificando leggermente le condizioni iniziali. Con un'approssimazione al primo ordine delle equazioni, si giungeva allo studio di equazioni lineari a coefficienti periodici. Il comportamento

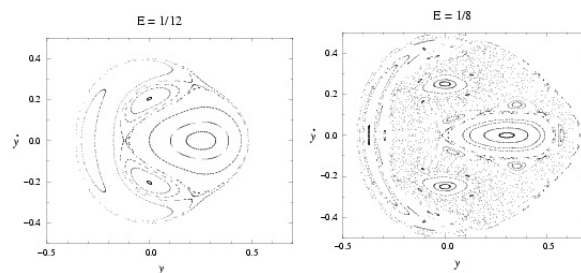


Figura 7: Mappa di Poincaré per il sistema, non integrabile, di Hénon-Heiles ispirato al moto dei tre corpi. La mappa consiste nella intersezione della traiettoria nello spazio delle fasi su un solo piano di coordinate coniugate. Le traiettorie periodiche sono individuate da singoli punti, le orbite stabili lasciano la traccia della sezione regolare di una superficie toroidale, le orbite caotiche tendono ad errare nel piano, evidenziando il loro carattere instabile. La mappa è riportata per due diversi valori dell'energia totale del sistema. Si nota che al crescere dell'energia le regioni occupate da traiettorie instabili tendono ad aumentare in rapporto all'area complessiva disponibile ai moti. Questa è una rappresentazione sperimentale, nel senso di esperimento numerico, dell'enunciato del teorema KAM.

delle soluzioni di tali equazioni è determinato da certi *esponenti caratteristici* delle proprietà di stabilità dei moti. In altri termini, se e come i moti si discostano dall'orbita periodica iniziale. La situazione generica è quella di un discostamento sistematico esponenzialmente rapido dal moto regolare periodico, dando luogo a comportamenti anche molto complessi. Quindi Poincaré descrisse per la prima volta una dinamica, che quasi un secolo dopo avrebbe assunto la denominazione di *caos deterministico*, in particolare tramite uno strumento matematico noto come *Mappa di Poincaré*. (Per una breve rassegna sul tema si legga il Cap. 11 del noto trattato di Meccanica del Goldstein [9]). Quindi si era arrivati ad un bivio concettuale: i sistemi meccanici tendono ad assumere generalmente un comportamento non descrivibile in termini analitici (quindi caotici), mentre i sistemi integrabili sono una rarità. Essi sono veramente confinati nel novero delle curiosità matematiche? Eppure moti armonici e moti kepleriani sembrano essere abbastanza importanti ed usuali nella Fisica. La domanda si può traslare nella seguente: di quanto è deformabile un sistema integrabile nella sua struttura, prima che diventi impossibile descriverne i moti



Figura 8: Henry Poincaré (1854 (Nancy) - 1912 (Paris))

in forma analitica?

Certamente è sempre possibile introdurre delle perturbazioni su un sistema integrabile, tali che per tutte le condizioni iniziali del sistema viene meno la possibilità di trovare soluzioni (quasi)-periodiche ben ordinate. Nel senso che nello spazio delle fasi tali orbite si avvolgono densamente su superfici lisce e chiuse (tori) (sezioni di tali tori si distinguono in Figura 7). Tuttavia, se le perturbazioni non comportano *risonanze* tra differenti modi di oscillazione dello stesso sistema, allora i tori si distorcono progressivamente, ma con continuità, al crescere dell'intensità della perturbazione. Questo fenomeno costituisce il contenuto del celebre teorema di Kolmogorov - Arnold - Moser (KAM) [10, 11, 12]. In altri termini esso stabilisce sotto quali condizioni i tori dello spazio delle fasi, invarianti sotto la dinamica di un sistema integrabile perturbato, non vengano totalmente distrutti, ma solo deformati. Questo ha importanti implicazioni, per esempio, sulla stabilità delle orbite per il sistema dei 3 corpi, dimostrando che in tal caso esistono delle soluzioni esprimibili in serie convergenti di potenze. Tuttavia molte delle sue applicazioni sono limitate al caso in cui una delle masse dia molto più piccola delle altre mentre, in generale, vanno adottati metodi di calcolo differenti. Si noti che la restrizione menzionata è comunque di grande interesse per i moti dei satelliti artificiali, con Terra-Luna-Satellite nel ruolo dei 3 corpi. Molti altri esempi di interesse astrofisico si possono riportare a questo.

Il teorema KAM, e le sue svariate applicazio-

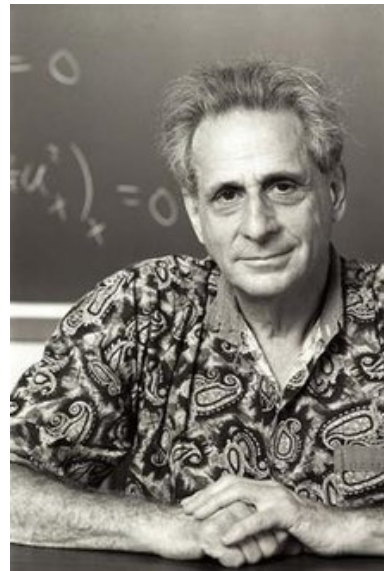


Figura 9: Martin Kruskal (1925 (New York) - 2006 (Princeton)) M. Kruskal è stato uno dei più versatili fisici teorici della sua generazione e si distinse per i suoi contributi in diverse aree, in particolare nella fisica del plasma. Fece una memorabile incursione nella relatività generale. Nel suo pionieristico lavoro, con N. Zabusky [19], sulle onde non lineari introdusse il concetto del solitone e ne ha sviluppato la sua applicazione in molti contesti di Fisica.

ni, apre un ampio spazio ai metodi perturbativi, ma questo significa anche trovare, se esistono, sistemi integrabili interessanti dai quali partire, a parte quelli ovvi già noti. Non tutto sembra perduto per i sistemi integrabili, ma solo negli anni '60 del XX secolo è stato sviluppato un metodo più o meno sistematico per determinarli e studiarli.

La Trasformata integrante

Il metodo che va sotto il nome di *Metodo della Trasformata Spettrale Inversa* (IST) fu inventato 50 anni fa (in effetti la denominazione fu introdotta successivamente) da Gardner, Green, Kruskal e Miura [13] per risolvere l'equazione di Korteweg - de Vries (KdV)

$$u_t - 6 u u_x + u_{xxx} = 0, \quad (1)$$

che costituisce un sistema dinamico con infiniti gradi di libertà, ispirata da problemi di idrodinamica [15, 16, 17]. Con la notazione adottata in (1) il campo $u(x, t)$ indica la velocità di una



Figura 10: Peter Lax (1926 (Budapest) - Wolf Prize in Mathematics, Abel Prize, professore al Courant Institute of Mathematical Sciences (New York). Lax ha lavorato in molti campi, lasciando contributi quali il metodo Lax-Wendroff, il teorema di equivalenza di Lax e il teorema di Babushka-Lax-Milgram, oltre alla scoperta delle coppie di Lax. Professore al Courant Institute, ha ricevuto numerosi riconoscimenti, tra i quali il Wiener Prize (1975), il National Medal of Science (1986), Wolf Prize (1987) e l'Abel Prize (2005).

piccola porzione di fluido nella posizione x al tempo t e gli indici denotano le sue derivate parziali. Le variabili adottate sono adimensionali e i coefficienti sono assegnati con una scelta di convenienza.

Le ragioni di base del perché il procedimento IST funzioni fu scoperto da Peter Lax, che definì la struttura matematica centrale (nota come *coppia di Lax*) per tutti gli sviluppi successivi riguardanti i sistemi integrabili [20].

Senza grandi dettagli, l'idea di Lax consiste nell'introdurre due opportuni operatori lineari $L[u]$ ed $M[u]$, agenti su uno spazio funzionale lineare ausiliario di funzioni complesse $\Phi(x, t)$ a quadrato sommabile. In primo luogo Lax dimostrò che l'equazione (1) può essere esattamente riformulata come

$$L_t = [L, M] \quad (2)$$



Figura 11: V. E. Zakharov (1939 (Kazan) -) Scopritore assieme a A. B. Shabat di una classe di sistemi di equazioni non lineari evolutive integrabili, ha dato fondamentali contributi alla teoria dei sistemi non lineari. Formatosi all'Università di Novosibirsk, attualmente è membro del Landau Inst. Theoretical Physics (Chernogolovka, Mosca, Russia), del Lebedev Physical Inst. (Mosca, Russia) e Professore all'Università dell'Arizona (Tucson, AZ, USA). Tra i vari riconoscimenti è stato insignito della medaglia Dirac nel 2003.

se si prendono

$$\begin{aligned} L[u] &= -\partial_x^2 u, \\ M[u] &= 4\partial_x^3 - 3(u\partial_x + \partial_x(u \cdot)). \end{aligned} \quad (3)$$

In altri termini la (2) è identicamente soddisfatta per tutte le Φ se la u soddisfa la (1) e

$$\begin{cases} L\Phi = \lambda\Phi \\ \Phi_t = -M\Phi \end{cases} \quad (4)$$

In tal caso è facile dimostrare che lo spettro di L è indipendente dal tempo t , perché l'evoluzione temporale dettata da (2)-(3) è unitaria.

Quindi lo spettro

$$\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{R} : L\Phi = \lambda\Phi\} \quad (5)$$

è costituito da costanti del moto del sistema.

La Fortuna, o il genio, ha voluto che l' L in (3) sia proprio il celeberrimo operatore di Schrödinger stazionario. Questo ha facilitato di molto il primo approccio alla tecnica IST.

Naturalmente vorremmo avere delle espressioni esplicite delle costanti del moto, ma esse



Figura 12: Mark Ablowitz (con una copia del manuale di analisi complessa del quale è autore assieme a A. Fokas). È lo scopritore, assieme a Kaup, Newell e Segur, di una amplissima classe di coppie di Lax per sistemi completamente integrabili. Inoltre ha sviluppato, principalmente assieme a Fokas, una riformulazione del metodo IST in termini di problemi di Riemann-Hilbert, particolarmente utili nei casi a più di una dimensione spaziale. Ha ottenuti numerosi riconoscimenti scientifici ed è attualmente Full Professor alla Colorado State University (Boulder, CO, USA)



Figura 13: Riproduzione del 1995 dell'osservazione del solitone fatta da J. Scott Russell nel 1885 nell'Union Canal. Foto di Chris Eilbeck della Heriot-Watt University di Edinburgo

si nascondono nel profondo della struttura delle autofunzioni di $L[u]$ e da lì bisogna cavarle.

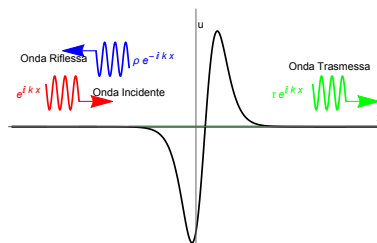


Figura 14: Il potenziale generico u è rappresentato con la curva nera. Asintoticamente a $x \rightarrow -\infty$ un'autofunzione dello spettro continuo del problema di Schrödinger L con tale potenziale si potrà decomporre nella combinazione lineare in un termine progressivo $e^{i k x}$ e di uno regressivo $e^{-i k x}$, con un coefficiente $\rho(k)$ chiamato ampiezza di riflessione. Invece a $x \rightarrow +\infty$ rimane solo un termine progressivo con un coefficiente $\tau(k)$, chiamato ampiezza di trasmissione.

Vediamo come.

Nell'ipotesi conveniente che il dato iniziale $u_0 = u(x, t_0)$ (quindi poi anche $u(x, t)$) funga da potenziale rapidamente convergente a 0, nel limite $x \rightarrow \pm\infty$, le autofunzioni di L assumono delle importanti proprietà di analiticità nel piano complesso \mathbb{C}_k del parametro spettrale $k^2 = \lambda$. In particolare si sanno calcolare le cosiddette ampiezza di riflessione e di trasmissione, che nei due limiti asintotici collegano combinazioni di soluzioni progressive/regressive (si veda la Figura 14). Queste dipendono solo da k e, in particolare, il reciproco dell'ampiezza di trasmissione è analitico nel semi-piano superiore \mathbb{C}_k^+ , dove possiede degli zeri semplici sull'asse immaginario, corrispondenti agli autovalori dello spettro discreto di L , ed è limitato per $\Im k > 0$. Infine è facile vedere che l'evoluzione temporale dettata dall'operatore M è banale su di esso, ovvero l'ampiezza di trasmissione è indipendente dal tempo. Ecco il punto vulnerabile e dove acchiappare le costanti del moto: si calcola lo sviluppo dell'inverso dell'ampiezza di trasmissione nell'intorno dell' ∞ con $\Im k > 0$: i suoi coefficienti sono indipendenti sia da x che da t e si possono esprimere come quantità integrali della forma $\int_{-\infty}^{+\infty} S_n(x, t) dx$,

le cui densità sono

$$\begin{aligned}
 S_1 &= u \\
 S_2 &= u_x \\
 S_3 &= u_{xx} - u^2 \\
 S_4 &= u_{xxx} - 2(u^2)_x \\
 S_5 &= u_{xxxx} - 2(u^2)_{xx} - (u_x)^2 \\
 &\quad - 2u u_{xx} + 2u^3 \\
 &\quad \vdots \\
 S_{n+1} &= \partial_x S_n + \sum_{m=1}^{n-1} S_m S_{n-m}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Si osservi che l'ultima formula consente di calcolare ricorsivamente le infinite densità conservate. Tuttavia, affinché il sistema sia effettivamente integrabile secondo il teorema di Liouville-Arnold, si deve dimostrare che le \mathcal{I}_n siano *indipendenti* e in *involuzione*. In effetti nel caso in esame queste condizioni sono verificate, ma per farlo c'è bisogno di una ulteriore struttura matematica, che andiamo ad introdurre.

Sistemi Hamiltoniani

Come si ricorderà dai corsi di Meccanica Hamiltoniana, il moto di un sistema ad N gradi di libertà è descritto da una traiettoria nell'astratto Spazio delle Fasi M a $2N$ dimensioni, localmente simile (precisamente *diffeomorfo*) ad aperti di \mathbb{R}^{2N} con coordinate locali

$$(p_1, \dots, p_N, q_1, \dots, q_N).$$

Ad esempio per una singola particella nello spazio ordinario $N = 3$, per due particelle $N = 6$, per un corpo rigido $N = 6$, per una mole di gas di particelle puntiformi $N \simeq 18.066 \times 10^{23}$. Le dimensioni dei rispettivi Spazi delle Fasi sono raddoppiate.

Gli osservabili dinamici costituiscono un insieme (un'algebra commutativa in effetti) di funzioni differenziabili $f : M \times \mathbb{R}_{(t)} \rightarrow \mathbb{R}$. Considerati due qualunque $f(p, q, t)$ e $g(p, q, t)$ di tali osservabili, viene definita la loro *Parentesi di Poisson* come quella funzione data da

$$f, g \rightarrow \{f, g\} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k}. \tag{7}$$

La nuova operazione $\{\cdot, \cdot\}$ è una derivazione (cioè è bilineare e soddisfa la regola di Leibnitz sulla derivata di prodotti di funzioni) nell'insieme degli osservabili ed è

1. antisimmetrica $\{g, f\} = -\{f, g\}$,
2. gode dell'identità di Jacobi

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0.$$

I matematici chiamano una tale struttura *algebra di Lie*, in onore del matematico norvegese Sophus Lie, che la introdusse in relazione allo studio delle *simmetrie infinitesime* possedute dalle equazioni differenziali nella seconda metà dell'800. Per un approfondimento sull'argomento si veda il contributo di D. Levi in questo numero.

Applicando la (7) alle coordinate, viste come osservabili, si ottengono le cosiddette *relazioni di commutazione canoniche*

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0.$$

Assegnata una funzione Hamiltoniana $H = H(p, q)$, essa genera la trasformazione temporale di un qualunque osservabile secondo la regola $\frac{df}{dt} = \partial_t f + \{f, H\}$. Caso particolare di questa relazione sono le equazioni del moto di Hamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

In questo contesto, con Liouville e Arnold, si dice che un sistema definito dall'Hamiltoniana H è *integrabile* se esistono N integrali del moto f_1, \dots, f_N ($\partial_t f_i + \{f_i, H\} = 0$ per $i = 1, \dots, N$) che sono indipendenti, ovvero i gradienti $\nabla_{(p,q)} f_i$ sono vettori indipendenti su ogni piano tangente $T_{(p,q)}M$, e sono in involuzione ovvero

$$\{f_i, f_j\} = 0 \text{ per ogni } i, j = 1, \dots, N.$$

In particolare questo significa che se tali funzioni non dipendono esplicitamente dal tempo, allora commutano con l'Hamiltoniana H , che è anch'essa una *costante del moto*.

Se tali proprietà sono soddisfatte, allora esiste una *trasformazione canonica* delle coordinate

$$Q_k = Q_k(p, q), \quad P_k = P_k(p, q),$$

che preserva le regole di commutazione canoniche per (P_k, Q_k) e producono una Hamiltoniana trasformata $H \rightarrow \tilde{H} = \tilde{H}(P_1, \dots, P_N)$, in modo tale che le equazioni di Hamilton diventino

$$\frac{dQ_k}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k}, \quad \frac{dP_i}{dt} = 0.$$

Esse si integrano immediatamente nella forma

$$Q_k(t) = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} t + Q_k(0), \quad P_k(t) = P_k(0), \quad (8)$$

dalle quali si vede che la dinamica è stata ridotta ad un moto uniforme! Se il moto dovesse essere globalmente confinato, le formule (8) indicano che ci si sta riducendo ad un insieme di moti circolari uniformi, con le variabili di tipo Q_k analoghe ad *angoli* di rotazione, mentre le P_i corrispondono ai momenti angolari, o *azioni*. Perciò l'integrazione di un sistema meccanico si riduce alla ricerca delle sue *variabili di angolo-azione*.

Al lettore non sfuggirà il riemergere dell'antica ed ingenua concezione sulla forma dei possibili moti, ma con la consapevolezza che si stanno trattando situazioni veramente speciali.

In un certo senso un numero sufficiente di integrali del moto, con le proprietà richieste, confina la traiettoria su superfici lisce e regolari nello Spazio delle Fasi M , parametrizzate con continuità dai valori di tali costanti.

Il teorema di Liouville - Arnold quindi ci definisce le condizioni perché un sistema abbia moti regolari (sia integrabile quindi). In effetti il difficile è trovare esplicitamente tutti gli integrali del moto che occorrono o, in alternativa, la menzionata trasformazione canonica. A questo scopo si può ricorrere all'equazione di Hamilton-Jacobi ma, a parte un certo numero di casi speciali, anche questo problema risulta altrettanto difficile. Non necessariamente si tratta di una buona scorciatoia.

Per poter applicare questi concetti a situazioni più complesse, è opportuno operare alcune generalizzazioni.

In primo luogo, se rinunciamo a distinguere nello spazio delle fasi $2N = m$ -dimensionale M chi siano le p e quali le q , le indichiamo collettivamente con $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$. La definizione di Parentesi di Poisson si può ampliare introducendo una opportuna matrice $m \times m$ denotata con

$\omega(\xi)$, detta struttura di Poisson, e assegnando l'espressione

$$\{f, g\} = \sum_{a,b=1}^m \omega^{a,b} \frac{\partial f}{\partial \xi_a} \frac{\partial g}{\partial \xi_b}, \quad \omega^{a,b} = -\omega^{b,a}$$

tale che, ponendo $W_{ab} = (\omega^{-1})_{ab}$, l'identità di Jacobi implica che deve essere soddisfatta la relazione $\partial_a W_{bc} + \partial_c W_{ab} + \partial_b W_{ca} = 0$. La matrice $W_{ab}(\xi)$ si chiama *struttura simplettica*. Un teorema di Darboux ci assicura che localmente possiamo porre la struttura simplettica in forma canonica, ma in generale tale trasformazione non può essere estesa globalmente su tutto M . Pertanto lo studio di varietà con strutture di Poisson, e la loro classificazione, costituisce un ampio capitolo della ricerca, per esempio in connessione con la *Quantizzazione Geometrica*.

In questo formalismo le equazioni di Hamilton si scrivono come

$$\frac{d\xi}{dt} = \{\xi, H\} = \omega \nabla_\xi H. \quad (9)$$

Inoltre si dimostra che se f è un integrale del moto, allora esso genera un gruppo ad un parametro (diciamo τ) di trasformazioni di M in sé stesso, definite risolvendo il nuovo sistema hamiltoniano $\frac{d\xi}{d\tau} = \omega \nabla_\xi f$, che lasciano invariante il sistema Hamiltoniano di partenza. Questo risultato costituisce la versione hamiltoniana del famoso *teorema di Noether*, che lega costanti del moto e simmetrie.

La seconda generalizzazione consiste nel passaggio ai sistemi continui, secondo uno schema concettuale /simbolico di questo tipo

$$\begin{array}{ll} ODE & \rightarrow \quad PDE \\ \xi_a(t) & \rightarrow \quad u(x, t) \\ \sum_a & \rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} dx \\ f(\xi) & \rightarrow \quad F[u] \text{ funzionali} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_a} & \rightarrow \quad \frac{\delta}{\delta u} \end{array}$$

I funzionali sono espressi in forma integrale come $F[u] = \int_{\mathbb{R}} f(u, u_x, u_{xx}, \dots) dx$.

La derivata funzionale è definita dalle due relazioni

1. $\frac{\delta F}{\delta u(x)} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial u_{ix}}$
2. $\frac{\delta u(y)}{\delta u(x)} = \delta(x - y)$

avendo utilizzato la δ di Dirac.

Ora la Parentesi di Poisson tra funzionali, dipendente da una appropriata struttura di Poisson $\omega(x, y, u)$, è definita dalla relazione

$$\{F, G\} = \int_{\mathbb{R}} \omega(x, y, u) \frac{\delta F}{\delta u(x)} \frac{\delta G}{\delta u(y)} dx dy. \quad (10)$$

Per analogia con quella canonica della Meccanica una scelta possibile di ω è

$$\frac{1}{2} (\partial_x - \partial_y) \delta(x - y),$$

la quale porta alla parentesi

$$\{F, G\} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta F}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta G}{\delta u(x)} dx.$$

Le equazioni di Hamilton allora prendono la forma

$$u_t = \{u(x), H[u]\} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u(x)}. \quad (11)$$

Si noti l'analogia formale con l'equazione (9). A titolo esemplificativo l'equazione di KdV si ottiene utilizzando nella relazione (11) l'Hamiltoniana

$$H = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} u_x^2 + u^3 \right),$$

dove si è assunto che l'integrale esista finito.

Torniamo ora ad esaminare le densità (6), ottenute sfruttando il problema spettrale, dal punto di vista hamiltoniano. In primo luogo si può dimostrare che tutte le densità pari, usando le condizioni al bordo, danno costanti di integrazione nulle per ogni u : inutilizzabili. Invece si riconosce subito che $I_{-1} = \int_{\mathbb{R}} S_1 dx$ si interpreta come la massa della perturbazione, $I_0 = \int_{\mathbb{R}} S_3 dx$ corrisponde alla quantità di moto, mentre $I_1 = \int_{\mathbb{R}} S_5 dx$ è l'Hamiltoniana che abbiamo usato poco sopra per scrivere la KdV, quindi

$$u_t = \partial_x \frac{\delta I_1}{\delta u(x)}. \quad (12)$$

Introducendo la notazione $I_{n-1} = \int_{\mathbb{R}} S_{2n+1} dx$ e calcolando le parentesi di Poisson tra le quantità conservate si dimostra che $\{I_m, I_1\} = 0$ per ogni m . quindi dall'identità di Jacobi si deduce che vale anche

$$\{I_m, I_n\} = 0$$

per ogni m, n . In definitiva l'equazione di KdV è un sistema hamiltoniano integrabile secondo Liouville.

Sulla base di quanto enunciato a proposito del teorema di Noether, questo risultato significa pure che le equazioni hamiltoniane $u_{t_i} = \partial_x \frac{\delta I_i}{\delta u(x)}$ sono simmetrie che lasciano invariante la KdV. Ma non solo: ognuna di esse è una simmetria di tutte le altre. Si sintetizza allora dicendo che la KdV possiede un'infinità di *flussi in commutazione*, che deve essere una caratteristica comune a tutti i sistemi integrabili continui. Infine si osservi che tali simmetrie coinvolgono le derivate del campo u ad ogni ordine di differenziazione. Quindi queste simmetrie si distinguono dalle espressioni abituali, lagrangiane, che sono finite e coinvolgono al più per KdV fino al terzo ordine di derivazione del campo. Tali espressioni si dicono *simmetrie generalizzate* e furono introdotte da E. Noether. Si veda l'articolo di Levi in questo numero di Ithaca per maggiori dettagli sul concetto di simmetria puntuale e generalizzata.

Osserviamo ora che l'equazione di KdV si può ricavare anche usando come Hamiltoniana la costante del moto I_0 con una nuova struttura di Poisson, precisamente

$$u_t = (-\partial_x^3 + 4u \partial_x + 2u_x) \frac{\delta I_0}{\delta u(x)}. \quad (13)$$

L'operatore $\mathcal{E} = -\partial_x^3 + 4u \partial_x + 2u_x$ soddisfa tutte le proprietà richieste ad una struttura di Poisson e quindi permette di introdurre nuove parentesi

$$\{F, G\}_{\mathcal{E}} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta F}{\delta u(x)} \mathcal{E} \frac{\delta G}{\delta u(x)} dx.$$

Questa costituisce una importante ed eccezionale novità [21] nel panorama dei sistemi integrabili, nel quale si inserisce una del tutto inaspettata *struttura bi-hamiltoniana*

$$\{F, I_0\}_{\mathcal{E}} = \{F, I_1\} \text{ per ogni } F.$$

In definitiva essa garantisce l'integrabilità stessa del sistema. Infatti, data la corrispondenza tra quantità conservate e simmetrie, non solo $\{u, I_0\}_{\mathcal{E}}$ e $\{u, I_1\}$ generano una simmetria di KdV (specificamente la stessa equazione), ma anche $\{u, I_n\}_{\mathcal{E}}$ e $\{u, I_{n+1}\}$ lo sono, perché generate da quantità conservate di entrambe le strutture di Poisson. Ma, ancora per la corrispondenza tra

simmetrie e quantità conservate, potremmo trovare un certo funzionale conservato, diciamo H_2 , tale che

$$\{F, I_1\}_{\mathcal{E}} = \{F, H_2\} \text{ per ogni } F$$

cioè la simmetria generata da I_1 rispetto a \mathcal{E} si esprime come una simmetria rispetto alla prima struttura di Poisson. Questo tipo di argomento si può iterare per produrre una successione di nuove simmetrie e di nuove costanti del moto. Infatti si può far vedere che $H_2 \equiv I_2$ della nostra notazione precedente e così via, ritrovando gli integrali del moto di KdV. Garantendo in maniera appropriata l'esistenza degli inversi degli operatori coinvolti, sulla base dell'argomento precedente e assumendo delle convenienti condizioni di compatibilità tra le strutture di Poisson ∂_x e \mathcal{E} , verificate nel caso di KdV, si può definire il cosiddetto *operatore di ricorrenza*

$$R = \mathcal{E} (\partial_x)^{-1}.$$

Così quanto detto sopra si sintetizza nell'espressione $\partial_x \frac{\delta I_1}{\delta u(x)} = R \left(\partial_x \frac{\delta I_0}{\delta u(x)} \right)$ e iterando

$$\partial_x \frac{\delta I_n}{\delta u(x)} = R^n \left(\partial_x \frac{\delta I_0}{\delta u(x)} \right), \quad n = 0, \dots, \infty.$$

In tal modo possiamo costruire ricorsivamente l'intera *gerarchia di flussi in commutazione* del sistema integrabile considerato, nonché le quantità conservate.

Per la KdV l'operatore di ricorrenza è

$$R = -\partial_x^2 + 4u + 2u_x \partial_x^{-1}. \quad (14)$$

Poiché R trasforma simmetrie di una equazione di evoluzione in altre simmetrie, il concetto è discusso da questo punto di vista nell'articolo di Levi in questo numero.

Infine è da sottolineare che il metodo IST non solo ci consente di trovare le costanti del moto, ma le loro variabili canonicamente coniugate sono i dati spettrali, che evolvono linearmente.

In conclusione, se un sistema possiede una coppia di Lax, allora la risoluzione del problema spettrale (ovvero IST) fornisce l'opportuna trasformazione canonica nelle variabili angolo-azione.

Problemi ... Spettrali

Lavorando sullo schema di integrazione esposto nel paragrafo sulla Trasformata Integrante e con quanto si vedrà nel paragrafo successivo, il metodo fu rapidamente generalizzato e applicato a numerosi problemi [22, 23] e [24]. Questi autori hanno sviluppato una procedura, che permetterebbe di risolvere il problema ai valore iniziale per una classe notevolmente più ampia di equazioni di evoluzione. A causa della rassomiglianza con il metodo della Trasformata di Fourier applicabile alle equazioni di evoluzione lineari, per la tecnica sviluppata da questi autori si adottò il termine di Trasformazione Spettrale Inversa (IST).

Il punto cruciale consiste in una riformulazione dell'equazione di Lax (2), che tenga sullo stesso piano variabili di tipo diverso. Per analogia con il sistema (4), si potrebbero immaginare due operatori lineari $\mathbf{F}[u; k]$ e $\mathbf{G}[u; k]$ dipendenti da u e dalle sue derivate in x fino ad un ordine finito, che definiscono nello spazio delle $\Phi(x, t; k) \in \mathbb{C}^n$ il seguente problema lineare

$$\begin{cases} \Phi_x = \mathbf{F}[u; k] \Phi, \\ \Phi_t = \mathbf{G}[u; k] \Phi. \end{cases} \quad (15)$$

Richiedendo che il sistema (15) sia compatibile, cioè che $\Phi_{xt} = \Phi_{tx}$, allora gli operatori introdotti debbono soddisfare la condizione

$$\mathbf{F}_t - \mathbf{G}_x = [\mathbf{F}, \mathbf{G}]. \quad (16)$$

Questa è analoga all'equazione di Lax, ma è un po' più generale, in quanto ammette una dipendenza esplicita dall'autovalore k .

Per limitarci al caso che conosciamo già, la KdV si recupera ponendo

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -ik & u \\ -1 & ik \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \quad (17)$$

con

$$\begin{aligned} A &= -4ik^3 + 2iku - u_x, \\ B &= 4k^2 u + 2ik u_x - (2u^2 + u_{xx}), \\ C &= -4k^2 + 2u. \end{aligned} \quad (18)$$

È chiaro a tutti che questo modello può essere enormemente allargato. Meno ovvio è che il

problema spettrale

$$\Phi_x = \mathbf{F}[u; k] \Phi$$

si può trattare con metodi molto simili a quelli adottati per il Problema di Schrödinger visto poco sopra. Conseguentemente, se la compatibilità (16) produce delle equazioni per u , allora queste si possono sicuramente integrare. Si osservi a questo punto il capovolgimento della prospettiva: dato un problema spettrale sensato, allora possiamo costruire infinite equazioni integrabili !!!

Adottando questo punto di vista, il sistema sovradeterminato (15) si può considerare come la compatibilità di due operatori di derivazione

$$\mathcal{D}_x = \partial_x - \mathbf{F}[u; k], \quad \mathcal{D}_t = \partial_t - \mathbf{G}[u; k], \quad (19)$$

che hanno proprio la forma di due derivate covarianti con connessione $A = \mathbf{F}[u; k] dx + \mathbf{G}[u; k] dt$, che i fisici chiamerebbero invece *campo di gauge* [25]. La compatibilità ovviamente si scrive come

$$[\mathcal{D}_x, \mathcal{D}_t] = 0. \quad (20)$$

Ma essa coincide con l'equazione (16), che con la definizione della matrice di curvatura Ω della connessione A diventa

$$dA + A \wedge A = \Omega = 0. \quad (21)$$

Quindi l'integrabilità per i geometri altro non è che una *condizione di curvatura nulla* per una certa connessione, dipendente da un campo $u!!!$

In altri termini, se si trasporta parallelamente un vettore $\Phi(x, t; k)$ (elemento dello spazio *fibra*) lungo un qualunque cammino chiuso nel piano (x, t) , sul quale sia definita la connessione A , il vettore trasportato coincide con quello di partenza.

Questa è una nuova interpretazione dei sistemi integrabili, come definenti varietà con peculiari proprietà geometriche, che possono essere utilizzate per altre considerazioni. In particolare si possono usare i metodi sviluppati per le varietà fibrate per costruire o indagare nuove equazioni integrabili. Questi metodi furono pionieristicamente avviati da Estabrook e Whalquist [26], consentendo di determinare per via puramente algebrica il carattere di integrabilità di varie PDE.

Quali tra queste equazioni siano poi interessanti resta da vedere. Molti esempi erano già di grande importanza nelle applicazioni della Fisica Matematica, ma fino ad allora erano stati trattati, ad eccezione di soluzioni particolari, nel tradizionale alveo dei metodi perturbativi [18]. Invece se IST si può applicare ad un certo sistema evolutivo, allora si è in grado di calcolare la sua soluzione generale a tutti i tempi, per dati iniziali sufficientemente regolari e con opportuno comportamento all'infinito spaziale.

Sarebbe uno sforzo titanico fornire anche solo un elenco di riferimenti bibliografici di base. Pertanto menzioneremo semplicemente alcuni tra i numerosi manuali disponibili su questo argomento. Un esempio è dato dal classico testo di Faddeev e Takhtajan [27], ma anche [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]

Solitoni

Una importante ricaduta concettuale dovuta alla scoperta di IST riguarda la definizione univoca del concetto di *solitone*, almeno limitatamente ai sistemi uni-dimensionali. Questo concetto ha avuto una grande fortuna (cercando *soliton* su Google si hanno circa 1.860.000 risultati), forse anche al di là di quanto supposto da Zabusky e Kruskal, perciò a volte può divenire abusato. Senza entrare per ora in dettagli, a livello fenomenologico basti dire che un certo sistema possiede un solitone, se questo è una sua perturbazione localizzata con comportamento *quasi-particellare*, la cui dinamica non può essere rappresentata correttamente da nessuna sovrapposizione di onde lineari.

In effetti le interazioni non-lineari trasferiscono energia tra i modi normali armonici e questo, di solito, conduce a delle singolarità. Il caso emblematico è fornito dalla semplice equazione di Riemann-Hopf

$$u_t - 6u u_x = 0, \quad (22)$$

che come si vede contiene i primi due termini di (1). Tramite il cosiddetto metodo delle caratteristiche [18] è quasi immediato trovare la sua soluzione generale in forma implicita per il dato

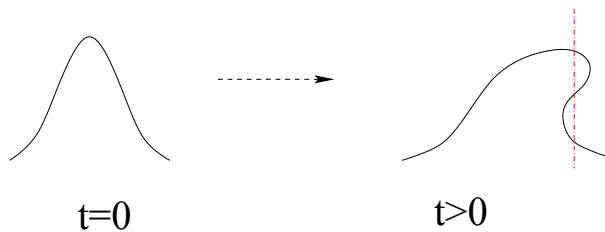


Figura 15: Sviluppo di un'onda di shock (onda d'urto) a partire da un dato iniziale regolare.

iniziale $u(x, t_0) = u_0(x)$, scrivendo

$$u(x, t) = u_0(\xi), \quad \xi = x + 6u(\xi)t. \quad (23)$$

Infatti, derivando $\xi(x, t)$ rispetto alle variabili indipendenti, ci si accorge che tali derivate divergono a certi tempi $t^* < +\infty$ per un generico profilo iniziale u_0 . Il più piccolo di questi t^* definisce quando la funzione u diventa polidroma e quindi il modello cessa di essere valido, almeno nella forma così presentata.

D'altra parte in una equazione puramente dispersiva, come ad esempio in

$$u_t + u_{xxx} = 0, \quad (24)$$

un pacchetto d'onde iniziale si allarga azzerandosi, per il semplice motivo che la legge di dispersione $\omega = k^3$ non è lineare.

Tuttavia in presenza entrambi gli effetti, non linearità e dispersione, il pacchetto potrebbe auto sostenersi. Ma non basta: si è richiesto che l'interazione del solitone con suoi simili debba essere quasi-particellare. Nel senso che in un processo d'urto tra due o più solitoni, dopo un'intensa e complessa interazione, asintoticamente nel tempo si ripristinino le forme d'onda iniziali, con l'unico eventuale effetto di aver sfasato le posizioni relative.

Chiaramente una fenomenologia di questo tipo deve richiedere delle quantità che tengono memoria del dato iniziale, cioè appunto di leggi di conservazione ben più rigide, e numerose, delle sole conservazioni della quantità di moto e dell'energia (volendo trattare solo casi non dissipativi).

Infine, l'interazione del solitone con onde di piccola ampiezza (queste descrivibili anche nel limite lineare) deve essere trascurabile in prima approssimazione. Quindi deve esistere una op-

portuna combinazione numerica tra ampiezze delle onde, loro dimensioni lineari e velocità, che al di sopra di un valore critico decreta incoerente l'usare i metodi perturbativi: da essi non è possibile ricavare informazioni fisiche sensate.

Tutto questo è una conseguenza diretta dell'esistenza di un numero sufficientemente elevato di leggi di conservazione, che regolano la dinamica dei sistemi integrabili. In particolare gli autovalori dello spettro discreto del problema lineare associato debbono manifestare la loro presenza fissando alcune delle caratteristiche salienti delle soluzioni prototipo: i solitoni.

L'idea di far corrispondere i solitoni alle leggi di conservazione di un certo sistema dinamico è corretta, ma bisogna usare una certa cautela. Infatti possono esistere dei modelli con qualche caratteristica quasi-particellare anche in ambiti non integrabili.

Il caso eclatante è costituito dai *solitoni topologici*, i quali sono soluzioni di energia finita di equazioni differenziali non lineari (anche in più dimensioni spaziali), dove il numero di particelle è legato ad una quantità conservata né locale né dinamica, ma *topologica*. Questo significa che la *carica topologica* dipende esclusivamente dalle condizioni al bordo le quali, per l'appunto, non contengono dettagli evolutivi del modello. Essi hanno applicazioni in una serie di settori della fisica delle particelle, della fisica della materia condensata, della fisica nucleare e della cosmologia [42, 43]. Inoltre essi hanno numerose applicazioni tecnologiche, per esempio nei sistemi magnetici si utilizzano nella memorizzazione dei dati. Ma in generale il sistema matematico che li contiene non è integrabile, perché l'interazione tra più solitoni può non essere elastica: si possono avere fusioni e frammentazioni, anche se la carica topologica rimane comunque costante. D'altro canto carica topologica e integrabilità possono coesistere tranquillamente e ne vedremo un caso.

Famose Equazioni !

Al pari delle celeberrime equazioni differenziali lineari della Fisica Matematica classica quali quelle di Laplace, di d'Alembert e del Calore, nel panorama dei matematici e nella scatola degli attrezzi dei fisici comparvero rapidamente nuove

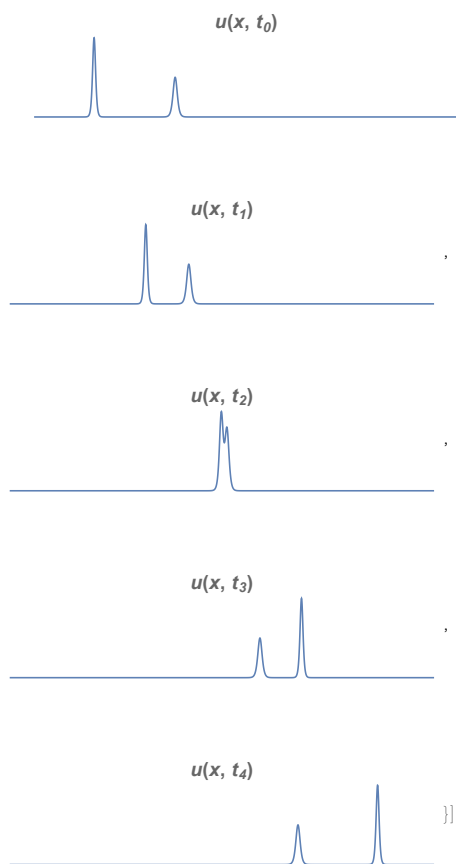


Figura 16: Soluzione a due solitoni di KdV nella successione temporale $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$: il più alto è anche il più veloce. Quindi pur partendo arretrato, raggiunge il più basso e lento e lo supera, mantenendo ciascuno la propria forma asintotica. L'unico effetto dell'interazione si manifesta nella diversa fase relativamente al moto indisturbato. Questo si può osservare facilmente in figura dall'allineamento delle creste nella direzione temporale su rette parallele, ma non coincidenti tra prima e dopo l'interazione.

(e vecchie) equazioni, delle quali si poteva ora calcolare analiticamente la soluzione generale, sotto condizioni iniziali e al bordo entro certe ben definite classi. Ecco alcuni esempi molto noti.

Korteweg - de Vries & Co.: cavalcare l'onda

Ovviamente il primo esempio è costituito dalla KdV (1), della quale si è già detto che sia stata derivata in relazione al moto di onde di superficie in liquidi quasi-unidimensionali non viscosi

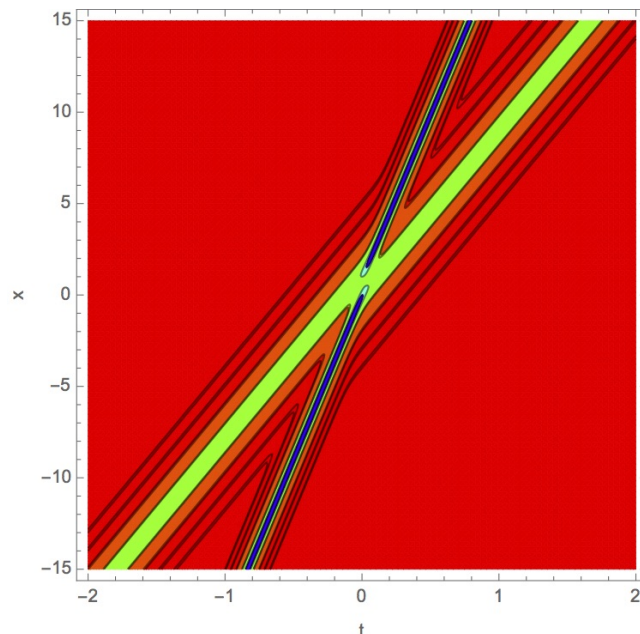


Figura 17: La stessa soluzione a due solitoni di KdV della figura precedente, ma rappresentata nel piano (x, t) con linee di livello. La codifica dei colori dal rosso al blu corrisponde a valori crescenti da 0 fino al massimo del solitone più alto. E' evidente che questo solitone è anche più stretto, mentre l'altro, più basso con la traccia dominata dal verde, ha una base più larga. I moti dei solitoni sono pressoché uniformi, finché non interagiscono violentemente fondendosi in un unico oggetto, che poi si separerà nelle componenti originarie. Lo sfasamento subito dai solitoni durante l'interazione è chiaramente visibile, in quanto le rispettive tracce sono parallele, ma non collineari, a quelle assunte prima della collisione. Questo equivale ad una accelerazione subita dal solitone più alto durante l'interazione, corrispondente ad una decelerazione per quello più basso.

poco profondi. L'espressione *poco profondo* significa che la lunghezza d'onda tipica è almeno 20 volte più grande della profondità. Proprio in questo limite fu ricavata [16, 17, 18] a partire dalle equazioni di Eulero per un fluido non viscoso, sottoposto solo all'azione della forza peso, condizionato da un fondale piano e limitatamente a propagazioni ondose in una sola specifica direzione.

Se in un canale di acqua un oggetto (una imbarcazione) si muove in superficie ad una velocità superiore a quella di propagazione libera, cioè

$$v \geq \sqrt{\text{accelerazione di gravità} \times \text{profondità}},$$

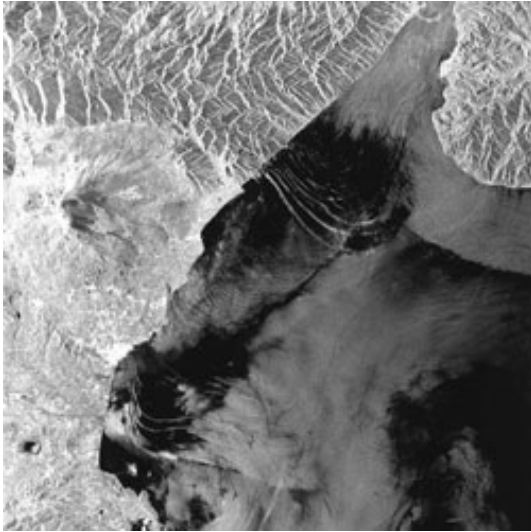


Figura 18: In questa immagine del satellite SAR ERS-1 sono visibili tre pacchetti di onde solitarie interne, che generate nello Stretto di Messina si propagano verso sud, in corrispondenza di tre successivi cicli di marea semi-diurni. Le maree a nord e a sud dello Stretto sono circa in opposizione di fase, dando luogo al flusso. Inoltre le acque provenienti dal versante tirrenico sono superficiali e più calde, mentre sono più fredde e salate nel quello levantino. I due liquidi sono quindi ben distinti e sono separati da uno spessore di circa 150 m. In tale strato si propagano delle onde interne, che nella regione di minima profondità e per le costrizioni topografiche possono superare i 3 m/sec. I pacchetti d'onda sono approssimativamente descritti dalla KdV. Si può notare che il pacchetto più a nord si scomporrà in singoli solitoni, che si distanziano progressivamente con il procedere verso sud. (Foto tratta da earth.esa)

siamo nelle condizioni di acqua poco profonda. Se il corpo si fermasse bruscamente, esso realizzerebbe le condizioni iniziali per la generazione di un'onda solitaria. L'energia ceduta al liquido non avrebbe abbastanza tempo per redistribuirsi nel fluido e gli effetti non lineari inizierebbero a farsi sentire.

Con una grande approssimazione la KdV descrive l'onda di tsunami [44] (per un dettagliato confronto tra dati osservativi e simulazioni numeriche si veda <https://websites.pmc.ucsc.edu/~ward/>), in quanto è coinvolta l'intera colonna d'acqua sovrastante la zona di subsidenza del fondo marino, purché la lunghezza d'onda tipica non

sia inferiore alla distanza dalla costa. In tal caso saremmo ancora nelle condizioni di acqua bassa.

Le semplici soluzioni di tipo *onda solitaria*

$$u = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct - x_0) \right] \quad (25)$$

erano adeguate a interpretare le osservazioni di Scott-Russell nell'Union Canal [15].

Ma l'equazione è stata riesumata dall'oblio nel lavoro di Kruskal e Zabusky [19], che già dal titolo evoca la fisica dei plasmi e delle onde in essi propagantesi. Nella soluzione (25) è chiaro l'andamento a campana esponenzialmente localizzata attorno a $x_0 + ct$. Ma ancora più evidente è che la sua ampiezza è proporzionale alla velocità c , mentre la sua larghezza dipende dall'inverso di \sqrt{c} . Quindi l'onda dipende da un solo parametro caratteristico. Una situazione che non può verificarsi per le equazioni lineari, dove sicuramente ampiezza e velocità non sono correlate. Si tratta dunque di un fenomeno non perturbativo dovuto alla non linearità dell'equazione.

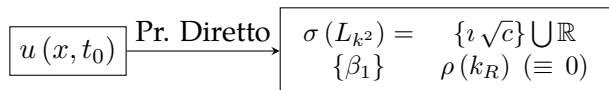
Tuttavia, ben pochi avrebbero scommesso non solo di trovare una soluzione esatta che descrivesse la collisione di due siffatte onde, ma addirittura che esse non si distruggessero a vicenda. Averlo scoperto è stata la felice sintesi di esperimenti numerici e considerazioni analitiche avviate da Zabusky e Kruskal.

Problema Diretto ed Inverso: IST

In particolare, alla luce dell'interpretazione di Lax del problema associato di Schrödinger, è naturale chiedersi quali siano le caratteristiche spettrali che corrispondono al solitone (25). Per ottenerle si deve studiare l'equazione di Schrödinger con il potenziale a campana rovesciata (quindi attrattivo) (25), che nella letteratura dei fisici era già noto come potenziale di Eckaus. Fissando il tempo ad un certo valore, per esempio t_0 , questo potenziale ha un solo autovalore dello spettro discreto: $k_1 = \nu\sqrt{c}$ (se si preferisce $\lambda = -c$). Ad esso corrisponde una autofunzione a quadrato sommabile, che si può dimostrare avere il comportamento asintotico $\exp[\sqrt{c}x]$ per $x \rightarrow -\infty$, mentre $\beta_1 \exp[-\sqrt{c}x]$ per $x \rightarrow +\infty$, dove β_1 si calcola dal residuo dell'ampiezza di riflessione $\rho(k)$ in k_1 . Infine lo spettro continuo è $\Re k = k_R \in \mathbb{R}$, ma $\rho(k_R) \equiv 0$.

Con questo abbiamo risolto quello che in gergo si chiama *Problema diretto*, schematizzato nel seguente diagramma, nel quale all'assegnato dato iniziale, facciamo corrispondere i cosiddetti *dati spettrali*.

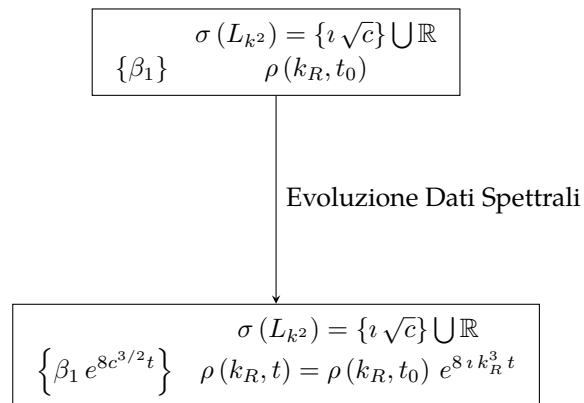
Per la soluzione ((25)) si ha il diagramma



A questo punto ci possiamo chiedere quali siano i cambiamenti indotti su questi dati dall'evoluzione temporale. Nel caso della soluzione (25) si ha una risposta ovvia, in quanto t cambia la posizione del solitone, che non può implicare altro che introdurre un fattore di fase nelle funzioni d'onda e nell'ampiezza di diffusione la quale a sua volta, chiaramente, non può far altro che rimanere nulla. Ma questo non è vero per il coefficiente di normalizzazione, che diventa $\beta = \beta_1 e^{8c^3/2 t}$.

In effetti, quest'ultimo risultato si può ricavare anche dal problema ausiliario (4), quando si studia il comportamento delle funzioni d'onda in uno dei limiti asintotici, per esempio ad $x \rightarrow -\infty$. In maniera del tutto analoga, sempre usando il problema ausiliario, si può dimostrare che in generale anche l'ampiezza di riflessione evolve secondo una equazione lineare, la cui soluzione porta a $\rho(k, t) = \rho(k, t_0) e^{8\iota k^3 t}$.

È degno di rilievo notare che i dati spettrali evolvano linearmente, conseguenza diretta della formulazione della KdV in termini di una coppia di Lax. Specificamente grazie all'uso dell'equazione (4) di evoluzione per le funzioni d'onda. Tale risultato vale per tutte le equazioni non lineari che posseggono una formulazione alla Lax e fornisce la procedura cruciale: siccome l'operatore M (vedi (4)), o G in (17), è lineare e si calcolano facilmente i suoi valori asintotici in termini di quelli di u , l'evoluzione temporale dei dati spettrali è sempre lineare a coefficienti costanti. Possiamo quindi subito calcolare la dipendenza temporale dei dati spettrali. Questo è riassunto nel seguente diagramma



Ora però vorremmo usare questa informazione per ricostruire il potenziale ad un tempo successivo, o precedente, a quello iniziale. Anzi vorremmo farlo anche nel caso avessimo più autovalori dello spettro discreto $k_1^2 < k_2^2 < \dots < k_N^2 < 0$, con le corrispondenti costanti di normalizzazione $\{\beta_1 e^{8\iota k_1^3 t}, \beta_2 e^{8\iota k_2^3 t}, \dots, \beta_N e^{8\iota k_N^3 t}\}$ e ampiezza di riflessione nulla per $k \in \mathbb{R}$.

Un problema di questo tipo si chiama *Problema Inverso*, semplicemente perché vogliamo rovesciare il verso della freccia nel diagramma del Problema Diretto, il quale consiste nel risolvere una equazione di Schrödinger, che è un problema lineare. Quindi il suo inverso deve essere ancora un problema lineare. Ad esso si possono dare varie forme, ma per KdV è conveniente esprimerlo come l'equazione integrale di *Gelfand - Levitan - Marchenko* (GLM) [45, 46]. Essa fu introdotta esattamente per ricostruire il potenziale presente nell'equazione di Schrödinger (in una dimensione spaziale) da assegnati dati spettrali, eventualmente provenienti da osservazioni sperimentali. La procedura della Trasformata Inversa consiste nei seguenti passi:

1. si costruisce la funzione

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^N \beta_n(t) e^{\iota k_n x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(k, t) e^{\iota k x} dk,$$

2. si cercano le soluzioni $K(x, y, t)$ dell'equazione integrale lineare GLM

$$K(x, y, t) + F(x + y, t) + \int_x^\infty K(x, z, t) F(z + y, t) dz = 0,$$

3. si scrive il potenziale dell'equazione di Schrödinger nella forma

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x, t). \quad (26)$$

Dal punto di vista dello studio della KdV la funzione $u(x, t)$ ottenuta in (26), risolvendo la GLM, è la sua soluzione corrispondente ai dati spettrali, a loro volta evoluti a partire da quelli corrispondenti al profilo iniziale $u(x, t_0)$.

$$u(x, t) \xleftarrow{\text{Pr. Inverso}} \begin{cases} \sigma(L_{k^2}) = \{i\sqrt{c}\} \cup \mathbb{R} \\ \{\beta_1 e^{8c^{3/2}t}\} \\ \rho(k_R, t_0) e^{8i k_R^3 t} \end{cases}$$

In conclusione, la procedura:

Problema Diretto → *Evoluzione dei Dati Spettrali*
→ *Problema Inverso*

ci consente di risolvere esplicitamente la KdV con dato iniziale generico (entro una certa classe)

$$u(x, t_0) \rightarrow u(x, t),$$

operazione improba per via diretta.

In particolare, il problema precedentemente proposto di trovare la soluzione corrispondente ad un certo numero finito N di autovalori discreti ed ampiezza di riflessione nulla ha, grazie alla GLM, una formulazione semplice:

$$u_N(x, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det A(\tau_1, \dots, \tau_N), \quad (27)$$

$$\tau_i = -i(k_i x - 4k_i^3 t),$$

dove A è una matrice $N \times N$ con componenti

$$A_{mn} = \delta_{mn} + i\beta_m \frac{e^{-(\tau_m + \tau_n)}}{k_m + k_n}.$$

In primo luogo questa formula è interpretabile come relazione di *sovrapposizione non lineare* tra solitoni: qualcosa che non si immaginava potesse esistere in precedenza, se non in senso approssimato. In effetti è difficile riconoscere due solitoni della forma (25) nell'espressione

$$u = -12 \frac{3 + 4 \cosh(2x) + \cosh(4x)}{[3 \cosh(x) + \cosh(3x)]^2}$$

corrispondente ad una scelta dei parametri $k_1 = i, k_2 = 2i, \beta_1 = 1, \beta_2 = 2$ e a $t = 0$.

Questo aspetto è messo ben in luce studiando i limiti asintotici, ponendosi in sistemi di riferi-

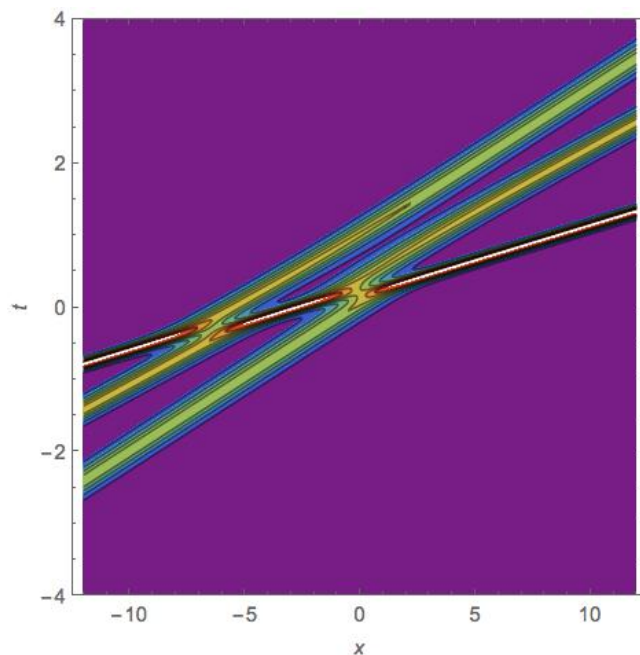


Figura 19: Interazione di 3 solitoni di KdV

mento che si muovono a velocità $v_i = 4k_i^2$. Si scopre che per $x \rightarrow \pm\infty$ la soluzione tende al solitone caratterizzato dall'autovalore k_i a meno di un fattore di fase. Questo sfasamento è della forma $-\log \prod_{j \neq i}^N \frac{k_j - k_i}{k_j + k_i}$. Quindi tutti i solitoni interagiscono tra di loro, dando luogo a fenomeni come quello illustrato nelle Figure 16, 17 e 19.

In seguito la formula (27) è stata lo spunto per sviluppare molta della geometria e dell'algebra combinatoria connessa ai sistemi integrabili (a questo proposito si veda l'articolo di Y. Kodama nel presente numero). Inoltre ha ispirato numerose analoghe formulazioni per altri sistemi non lineari integrabili e vari metodi connessi alla ricerca di soluzioni particolari (si vedano i manuali menzionati in relazione al *metodo di Hirota*, le *funzioni Grassmanniane di Sato*, la *funzione τ* , la *trasformazione di Darboux*, le *trasformazioni di Bäcklund*, il *metodo del dressing*).

Infine merita ricordare che l'equazione di KdV ammette anche soluzioni periodiche, delle quali la (25) è un limite particolare, esprimibili in termini di funzioni ellittiche e determinate da Korteweg e de Vries [17]. Esse sono le ben note *onde cnoidali*, la cui espressione è data da

$$u = u_0 + H \operatorname{cn}^2 \left(\frac{x - ct}{\Delta} | m \right), \quad (28)$$

dove cn indica la specifica funzione ellittica di

Jacobi di modulo $0 \leq m \leq 1$, H l'ampiezza dell'onda. Questi due parametri fissano la velocità c , il livello di riferimento u_0 e la scala Δ . Quindi anche nel caso periodico siamo ben lontani dalle soluzioni dell'equazione delle onde, nelle quali la velocità è indipendente dalla lunghezza d'onda e dalla sua ampiezza. Né, infine, tali onde si possono semplicemente sommare per dar luogo a delle nuove soluzioni.

Sulla falsariga delle onde a rapida convergenza a 0, una teoria per questo tipo di soluzioni doveva essere associata alla risoluzione dell'equazione di Schrödinger stazionaria con potenziali periodici. In generale, lo spettro corrispondente contiene un numero infinito di intervalli chiusi disgiunti. Ad esempio questo è il caso del modello Krönig-Penny con potenziale periodico rettangolare, ben noto alla comunità dei fisici dello stato solido. Tuttavia, usando l'approccio del problema inverso, Akhiezer [47] aveva dimostrato l'esistenza di una classe di operatori di Schrödinger con uno spettro assolutamente continuo costituito da un numero finito di intervalli (gap) separati. Più precisamente, Akhiezer riuscì a ridurre la ricostruzione del potenziale alla soluzione del problema di Jacobi sull'inversione degli integrali abeliani su una superficie iperellittica di Riemann, i cui punti di diramazione coincidono con i confini degli intervalli nello spettro [48]. Akhiezer ha presentato il risultato nel caso di un solo gap, corrispondente al più semplice potenziale di Lamé ellittico, cioè alle onde cnoidali. Tuttavia soluzioni periodiche più generali, associate a spettri *finite gap*, furono ben presto determinate usando metodi strettamente legati a IST [49, 50]. Una formula esplicita, corrispondente a spettri con g gap nello spettro dell'operatore di Schrödinger, per soluzioni periodiche di KdV è data da

$$u(x, t) = -2\partial_x^2 \log \Theta(x \mathbf{p} + t \mathbf{v} + \mathbf{l}) + 2C - 2 \sum_{k=1}^g \oint_{a_k} \lambda dU_k, \quad (29)$$

dove Θ indica la generalizzazione g -dimensionale della funzione θ di Riemann, definita dalla formula

$$\Theta(\mathbf{h}|\mathbf{B}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^g} \exp[\pi i B \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + 2\pi i \mathbf{h} \cdot \mathbf{k}].$$

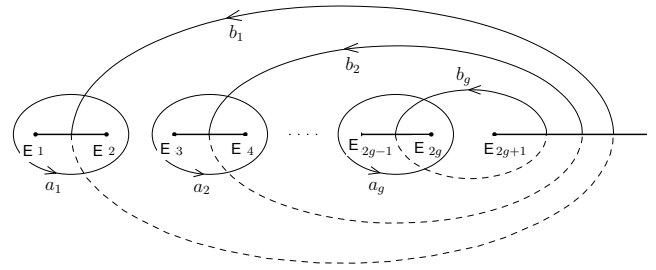


Figura 20: Base di cicli di una curva iperellittica rappresentata nel piano complesso. Sono rappresentati i g tagli $[E_k, E_{k+1}]$ circondati dai cicli a_k e attraversati dai cicli b_k . Sui cicli a_k e b_k vengono integrati i differenziali abeliani dU_i , che intervengono nella ricerca di soluzioni con numero finito g di gap

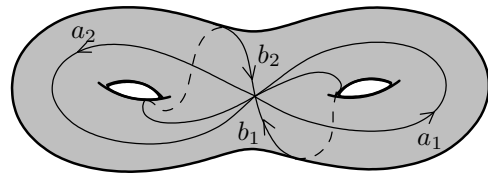


Figura 21: Le curve iperellittiche definiscono delle superfici di Riemann compatte, che sono omeomorfe a una sfera con maniglie. Il numero $g \in \mathbb{N}$ di maniglie è chiamato genere della superficie. Due varietà con diverso genere non sono omeomorfe.

La matrice $(g \times g)$ B è simmetrica, a parte immaginaria positiva, ed ha elementi $B_{jk} = \oint_{b_k} dU_j$, dove si sono introdotti i differenziali abeliani normalizzati con opportune costanti C_{ji}

$$dU_j = \frac{\sum_{i=1}^g C_{ji} \lambda^{g-i}}{\sqrt{\prod_{j=1}^{2g+1} (\lambda - E_j)}}.$$

Il polinomio a denominatore nell'espressione dei differenziali definisce la curva iperellittica di genere g

$$\Gamma = \left\{ (w, \lambda) : w^2 = \prod_{j=1}^{2g+1} (\lambda - E_j) \right\},$$

avente i punti di diramazione E_j , g tagli lungo gli intervalli $[E_1, E_2], \dots, [E_{2g+1}, \infty]$ e una base di cicli canonici a_j e b_j , sui quali $\oint_{a_j} dU_k = \delta_{jk}$.

Le altre quantità coinvolte nella formula (29) sono costanti strettamente legate alle precedenti

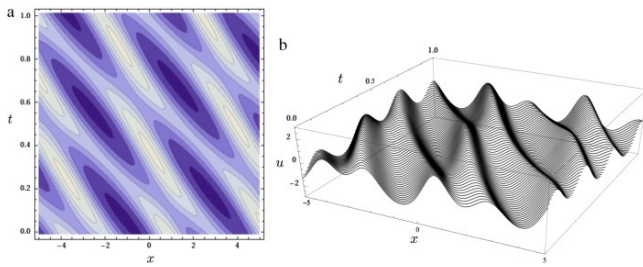


Figura 22: Soluzione della KdV del tipo a 2 gap nello spettro, per alcune scelte particolari dei parametri. La figura è tratta da [51]

e si rimanda agli articoli originali per eventuali approfondimenti.

Quindi, come nel caso dei solitoni, si era scoperto il metodo generale per sovrapporre non linearmente onde periodiche e farle interagire, producendo forme sempre più complesse.

D'altro canto, ancora una volta l'equazione di KdV si scopre al crocevia insospettato di varie branche della Matematica, collegando ora la teoria delle funzioni e delle superfici di Riemann con i sistemi integrabili, dalla geometria differenziale alla discreta, alla teoria dei grafi. Quindi questa equazione non solo ha svolto la funzione di esempio paradigmatico per i sistemi integrabili, ma è stata ampiamente utilizzata nello studio di molti fenomeni, che spaziano dalle onde interne in fluidi, alla propagazione di impulsi fononici non lineari nei cristalli, fino alla teoria delle stringhe [52].

D'altra parte applicando i metodi di multiscale [54] e modificando alcune condizioni fisiche nelle procedure di riduzione delle equazioni originali, si giunge spesso ad equazioni simili, alcune delle quali completamente integrabili grazie a specifiche coppie di Lax, tra le quali l'equazione di Boussinesq [16]

$$u_{tt} - u_{xx} - (3u^2 + u_{xx})_{xx} = 0$$

e l'equazione di Camassa-Holm [53]

$$u_t + 2ku_x + 3uu_x - u_{xxt} - u u_{xxx} - 2u_x u_{xx} = 0$$

e parecchie altre analoghe, magari a più componenti e adeguate a descrivere le situazioni fisiche più disparate. A titolo di esempio e curiosità la Camassa-Holm possiede solitoni che sono cuspidali, piuttosto che a campana come quelli di

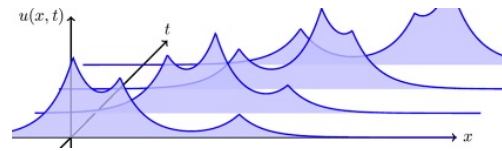


Figura 23: Soluzione con tre picchi dell'equazione di Camassa-Holm.

KdV, come in effetti può capitare di osservare in natura.

Tuttavia la più celebre e sorprendente di tutte è l'estensione bidimensionale di KdV, cioè la cosiddetta equazione di Kadomtsev - Petviashvili (KP) [55]

$$\partial_x (u_t + 6uu_x + u_{xxx}) + 3\sigma^2 u_{yy} = 0 \quad (30)$$

$$\sigma^2 = \pm 1.$$

Questa equazione descrive l'evoluzione di onde di superficie debolmente bidimensionali, non lineari e dispersive con tutti e tre gli effetti dello stesso ordine; la scelta del segno dipende dalla grandezza relativa della gravità rispetto alla tensione superficiale.

A tale equazione è associata una ricchissima struttura algebrica: possiede un'algebra di simmetrie puntuali di dimensione infinita di tipo Virasoro, parametrizzata da funzioni arbitrarie, possiede infinite simmetrie generalizzate che anch'esse formano algebre di tipo Kac-Moody [59], possiede infinite quantità conservate che commutano rispetto a strutture di Poisson localmente definite [60]. La teoria dei suoi solitoni è connessa alle Grassmanniane di Sato [61], come si vedrà meglio nell'articolo di Kodama. Risulta quindi uno degli oggetti matematici meglio noti in letteratura.

La KP ha una formulazione alla Lax, quindi si può pensare di applicare il metodo IST per integrarla. Ma la metodologia risolutiva differisce significativamente da quella in (1 + 1) - dimensioni. Il problema spettrale principale è

$$\sigma \Phi_y + \Phi_{xx} + (u + \lambda) \Phi = 0, \quad \sigma = 1, i \quad (31)$$

quindi un problema di Schrödinger di tipo non stazionario nella variabile spaziale y . Il parametro spettrale $\lambda = k^2$ non ha più l'importanza di prima. Infatti può essere posto $\lambda = 0$, senza perdita di generalità. In questo caso viene

inserito un parametro complesso attraverso una *condizione al bordo* idonea per la funzione d'onda di Schrödinger. Nel caso dell'equazione di KP con $\sigma = \iota$ (KPI) si ottiene l'abituale equazione di Schrödinger dipendente dal tempo e lo schema IST è stato sviluppato da [56, 57, 58]. Questo problema inverso è formulato in termini di un *problema ai valori al bordo di Riemann-Hilbert* non locale. Tuttavia per KP II ($\sigma = -1$) le autofunzioni del problema diretto non sono in nessun punto analitiche. In questo caso è richiesta una generalizzazione del problema di Riemann-Hilbert, noto come il problema $\bar{\partial}$ (D-BAR). L'idea del problema $\bar{\partial}$ era già stato introdotto da Beals and Coifman [62] in modo ausiliario per l'applicazione di IST a certe equazioni in 1+1, ma tale approccio $\bar{\partial}$ diventava essenziale. È molto significativo in quanto è stato il primo caso in cui la formulazione del problema di Riemann-Hilbert sia risultata inadeguata.

In maniera estremamente sintetica, rimandando il lettore interessato alla manualistica indicata in precedenza, la trasformazione di un problema spettrale in uno di Riemann-Hilbert proviene semplicemente dall'osservazione che alcune delle varie funzioni del parametro spettrale sono analitiche in una regione del piano complesso (ad esempio, per KdV l'ampiezza di trasmissione è analitica nel semipiano superiore), mentre altre lo sono nella regione complementare. Ma esiste una specifica relazione lineare tra di loro lungo la frontiera comune di tali regioni (ancora nel caso di KdV, tale frontiera è l'asse reale di k , dove vengono assegnati i valori dell'ampiezza di riflessione).

Ora un problema di Riemann-Hilbert per l'ap-punto consiste nell'assegnare una curva C , che divide il piano complesso in due parti distinte, e una funzione $V(k)$ su di essa, con appropriate condizioni di regolarità. Si richiede di trovare due funzioni $\mu_{\pm}(k)$, ciascuna analitica in una delle due regioni individuate da C , in modo tale che esattamente sulla curva valga una relazione della forma

$$\mu_+ - \mu_- = \mu_- V,$$

più eventualmente delle condizioni asintotiche per μ_{\pm} . Esistono vari teoremi che assicurano che un tale tipo di problema ammette soluzioni uni-

che. La costruzione esplicita di tali soluzioni è una parafrasi del problema inverso.

Tuttavia per KP II il formalismo del problema di Riemann-Hilbert era insufficiente e dovette essere superato, imponendo che in ogni punto del piano le funzioni spettrali fossero non analitiche, ma comunque linearmente dipendenti da se stesse a meno di speciali trasformazioni discrete di simmetria. Questo si esprimeva introducendo delle equazioni della forma

$$\frac{\partial \mu(k, \bar{k})}{\partial \bar{k}} = V(k, \bar{k}) \mu(k, S \bar{k})$$

avendo indicato con S una certa trasformazione lineare discreta indipendente da k .

Tali metodologie si possono applicare ai problemi in 2+1 dimensioni come KP II ma anche, per esempio, alla DSI e DSII che introdurremo nel seguito. Tali metodi consentono di trovare per la KP II nuove soluzioni, ben al di là delle semplici estensioni dei solitoni di KdV, che appaiono come una serie di onde parallele, propagantisi tutte nella stessa direzione nel piano.

Questa classe di soluzioni è genericamente instabile rispetto a deformazioni, anche piccole, per KPI. In particolare, la ricerca di soluzioni spazialmente localizzate non ha prodotto risultati, in quanto ogni dato iniziale, rapidamente convergente a 0 in tutte le direzioni del piano, si disperde rapidamente. Mentre gli oggetti stabili hanno un andamento razionale a 0, quindi lento rispetto alla localizzazione esponenziale dei solitoni di KdV.

Nell'articolo di Kodama invece si studieranno soluzioni di tipo onda a parete che si riferiscono a KP II. Esse si intersecano tra di loro, poiché viaggiano in direzioni differenti, ma non si distruggono a vicenda nell'interazione, preservando la loro struttura asintotica. Come si è detto questo dipende dalle particolari intensità delle forze in gioco e, in un certo senso, è una fortuna che andando al mare siamo abbastanza sicuri di avere a che fare con KP II e non KPI: ci perderemmo il bello degli incroci di onde.

Naturalmente il problema può essere ulteriormente generalizzato complicando la curva C , ad esempio, in modo che divida il piano complesso in più di due regioni non connesse. Questo fatto è stato ampiamente utilizzato nello studio di problemi inversi associato ad altre classi di

equazioni.

L'equazione di Schrödinger non lineare: messaggeri e canaglie

Un altro celebre e paradigmatico esempio di sistema integrabile è costituito l'equazione di Schrödinger non-lineare (NLS) [22, 23]

$$i\psi_t = -\frac{1}{2}\psi_{xx} + \epsilon|\psi|^2, \quad \epsilon = \pm 1, \quad (32)$$

nella quale la funzione ψ è complessa. La NLS emerge come una delle equazioni universali per la descrizione di pacchetti lentamente variabili di onde quasi monocromatiche, che si propagano in mezzi debolmente non lineari e in presenza di dispersione. Essa è una forma semplificata in

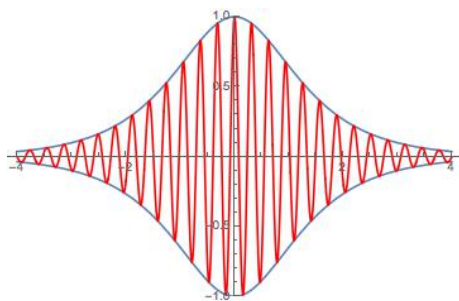


Figura 24: Rappresentazione schematica dell'involuppo di un pacchetto di onde quasi-monocromatiche. Il contorno blu è descritto dall'equazione NLS

(1 + 1) dimensioni dell'equazione di Ginzburg e Landau, che la introdussero negli anni '50 col loro lavoro sulla superconduttività [63]. Ma lo è anche dell'equazione di Gross-Pitaevski, derivata per descrivere oscillazioni nei condensati di Bose-Einstein [64, 65, 66].

L'equazione apparve ben presto negli studi sulle onde di gravità alla superficie di acqua profonda e non viscosa nei lavori di V.E. Zakharov [67], ma in tal contesto la NLS ha recentemente trovato nuovo impulso nella descrizione delle cosiddette *onde anomale* o, anche, *onde mostro*, *canaglia* e *rogue waves* [68]. Infatti esistono altre classi di soluzioni per l'equazione NLS oltre agli involuppi solitonici di Zakharov. Questi asintoticamente traslano a velocità ed ampiezza costanti ed interagiscono senza disperdersi in maniera analoga ai solitoni di KdV. Ma la NLS si presta a modellare fenomeni di instabilità nella modulazione dell'ampiezza. Infatti tra le soluzioni ne esistono

di *omocline* nel tempo, cioè a tempi grandi la soluzione ritorna ad una speciale configurazione iniziale, oppure di periodiche. Esempi di questo fenomeno sono riportati in Figura 25. In particolari valori del tempo l'energia complessiva del campo si concentra spazialmente in certe zone ristrette, provocando un accrescimento esorbitante, rispetto alla configurazione iniziale, del modulo di ψ . L'effetto può essere devastante per imbarcazioni e dispositivi di vario genere, a seconda del contesto nel quale stiamo considerando il fenomeno. Questo tipo di onda sarà dettagliatamente discussa nel lavoro di Grinevich e Santini presente in questo numero di Ithaca.



Figura 26: Un possibile esempio di onda anomala (canaglia o rogue)

In ottica non-lineare è stata derivata per la prima volta nel 1964 in [69], per studiare effetti di auto-intrappolamento di fasci luminosi propagantesi in un mezzo con indice di rifrazione dipendente dal campo elettrico applicato. Questo fenomeno, assieme ad altri, si riscontrano nella propagazione di intensi segnali luminosi in fibre ottiche [70, 71] per fini di telecomunicazione e nei cristalli liquidi [72], nelle onde di Langmuir nei plasmi caldi [73] e di onde radio nella ionosfera. Permette di descrivere la propagazione di eccitazioni localizzate di Davydov nelle α -elicke di proteine [74, 75], che sono responsabili del trasporto di energia lungo catene molecolari.

La NLS è in stretta relazione di equivalenza con il modello ferromagnetico di Heisenberg continuo (chiamato anche equazione di

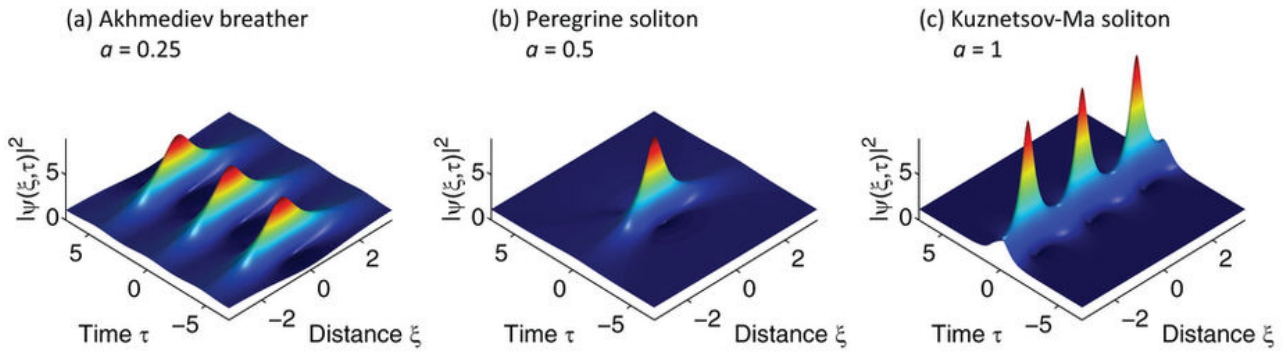


Figura 25: I solitoni di Akhmediev, di Peregrine e di Kuznetsov-Ma sono localizzate spazialmente ma anche nel tempo.

Landau-Lifshitz)

$$S_t = [S, S_{xx}] \quad (33)$$

dove la matrice (2×2) $S \in SU(2)$ descrive una catena continua di spin nel limite semi-classico [27]. Infine, partendo dal modello quantistico di Lieb e Liniger [76] per un gas monodimensionale di bosoni interagenti a contatto, cioè con un potenziale della forma $\delta(x_i - x_j)$, è possibile derivare per il campo (tramite il cosiddetto *Bethe ansatz*) ancora una volta l'equazione NLS. Questo fu il primo modello quantistico a multi-corpi non lineare ad essere completamente risolto. Le corrispondenti funzioni di correlazione furono calcolate esattamente nell'ambito del cosiddetto *Quantum inverse scattering method* [77], che generalizza al contesto quantistico la IST.

La già sottolineata corrispondenza con gli spin classici, consente di far *trasmutare* il modello bosonico in uno fermionico, detto di Thirring. Tale fenomeno si verifica solo in una dimensione spaziale.

È superfluo dilungarsi sul metodo IST applicato a questa equazione, in quanto, fatte le dovute modifiche, non cambia la sostanza della procedura rispetto al caso di KdV. L'unico aspetto che merita considerazione è che si partì direttamente con lo studio di una coppia di Lax matriciale

$$L = \iota \begin{pmatrix} 1+k & 0 \\ 0 & 1-k \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & \psi^* \\ \psi & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \iota k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_x^2 + \begin{pmatrix} \frac{-\iota|\psi|^2}{1+k} & \psi_x^* \\ -\psi_x & \frac{\iota|\psi|^2}{1-k} \end{pmatrix}, \quad (34)$$

che permise a Zakharov e Shabat di integrare esattamente questa equazione. Tale coppia è proprio il punto di partenza per lo studio delle on-

de anomale discusse nell'articolo di Grinevich e Santani.

Il modello definito dall'equazione di NLS in 2 dimensioni spaziali ($o \geq 2$) è ben noto e rilevante in molte applicazioni di interesse fisico, ma ha un grosso difetto: non è integrabile !!! Tipicamente le sue soluzioni divergono in un tempo finito in un certo punto del piano [78].

In effetti esiste un suo analogo integrabile, che è interessante nello studio della propagazione di involucri ondosi in vari contesti, in particolare in fisica dei plasmi. Esso si chiama Davey - Stewartson [79]

$$\begin{aligned} \psi_t + \frac{1}{2} (\psi_{xx} + \sigma^2 \psi_{yy}) + |\psi|^2 \psi &= \phi \psi, \\ \phi_{xx} - \sigma^2 \phi_{yy} &= 2 (|\psi|^2)_{xx}, \end{aligned} \quad (35)$$

dove ϕ è reale e $\sigma^2 = \pm 1$, corrispondente alle due varianti DSI e DSII, rispettivamente.

Quindi l'ampiezza di involuppo ψ è accoppiata al campo ϕ , che non segue una sua evoluzione indipendente, ma è generato dal termine di sorgente $(|\psi|^2)_{xx}$. I fisici direbbero che (ψ, ϕ) è un campo *composito*: la particella descritta da ψ dinamicamente si completa con il campo ϕ associato. In questa prospettiva emerge una analogia con la teoria degli anyoni che è stata utilizzata in vari lavori [80]. Si osservi inoltre che se il tensore di dispersione per ψ è ellittico, allora quello per ϕ è iperbolico, e viceversa. Ovviamente questo fatto conduce a distinguere il caso DSI da DSII. Le due equazioni implicano dei comportamenti del tutto diversi nelle loro soluzioni, studiate con i metodi di Riemann-Hilbert e $\bar{\partial}$. Furono determinate soluzioni solitoniche a parete [81, 82] e, analogamente ad altre equazioni integrabili in dimensioni superiori, anche numerose altre proprietà, quali algebre di Kac-Moody di simmetrie

puntuali, riduzioni per simmetria alle equazioni di Painlevé e possesso della proprietà di Painlevé, trasformazioni di Bäcklund, infinite leggi di conservazione in commutazione, struttura Hamiltoniana e operatore di ricorrenza. Tuttavia, in analogia con il caso KP si era molto scettici sulla possibilità che esistessero soluzioni esponenzialmente localizzate nel piano. In effetti soluzioni di questo tipo furono determinate prima mediante l'uso delle trasformazioni di Bäcklund [83] e, poi, nell'ambito del problema $\bar{\partial}$ [84, 85]. Ma ci si rese subito conto che non era possibile separare la dinamica dei due campi. Infatti, se si richiede che $\psi \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow \infty$, il campo ϕ è necessariamente non nullo, nemmeno costante e statico, nello stesso limite. In particolare, è stato chiaramente dimostrato che i solitoni di DSI sono instabili, in quanto le condizioni al bordo per ϕ sono in genere dipendenti dal tempo. Esse fissano la cinematica dei solitoni, mentre la dinamica della loro reciproca interazione è determinata dalla condizione iniziale scelta per ψ . Le soluzioni possono simulare effetti di fusione e fissione, creazione e assorbimento da diffusione anelastica, ma tutto dipende dal comportamento asintotico scelto per ϕ [86]. Per sottolineare questo aspetto in [85] tali soluzioni furono battezzate *dromioni*. L'interesse verso di essi si è recentemente rinnovato con gli studi su versioni con invarianza PT, nell'ambito dei modelli per le onde anomale [87]. La DSII invece ha soluzioni esatte che divergono in un tempo finito e quindi sembrano avere un ruolo nello studio delle onde anomale in fluidodinamica [88].

Sine-Gordon: superfici e particelle

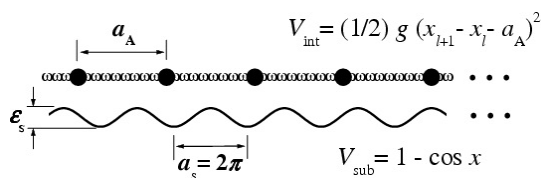


Figura 27: Schematizzazione del modello Frenkel-Kontorova: due tipi di forze a scale spaziali differenti sono in gioco: una forza di interazione elastica a primi vicini ed una forza comune periodica.

Altro modello molto noto è dato dall'equazio-

ne di sine-Gordon

$$u_{tt} \mp u_{xx} = \Lambda^2 \sin u, \quad (36)$$

che nella determinazione negativa costituisce un modello relativisticamente invariante, con quella positiva una equazione di tipo ellittico. Il parametro Λ può essere posto ad 1 senza perdere in generalità, ma avendo una interpretazione fisica e geometrica si è preferito tenerne memoria. Se si utilizzano le coordinate di cono-luce $\zeta = t + \sqrt{\mp 1} x$ e $\bar{\zeta} = t - \sqrt{\mp 1} x$, l'equazione precedente si può scrivere nella forma simmetrica

$$u_{\zeta \bar{\zeta}} = \Lambda^2 \sin u,$$

che in alcune circostanze può risultare più comoda da usare.

La sine-Gordon è un problema di tipo evolutivo del secondo ordine e possiede la coppia di Lax nella forma (15) (qui scritta in coordinate del cono-luce)

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -i k & -\frac{u_{\zeta}}{2\Lambda^2} \\ \frac{u_{\bar{\zeta}}}{2\Lambda^2} & i k \end{pmatrix} \\ \mathbf{G} = \frac{i}{4k} \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ \sin u & -\cos u \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Quindi la sua soluzione generale nel piano $(\zeta, \bar{\zeta})$ (o (t, x)) si può ottenere ancora una volta con il metodo IST.

Il caso iperbolico fu originariamente introdotto da Bour [89] e da Bianchi [90] nel corso di studi riguardanti la determinazione di superfici a curvatura gaussiana negativa costante $-\Lambda^2$. In questo contesto il suo studio fu approfondito da Bäcklund [91], il quale scoprì le notevolissime *Trasformazioni* che portano il suo nome (BT), e da Bianchi [90], che invece dedusse il cosiddetto Teorema di Permutazione delle BT. Tali strumenti matematici consentono di ottenere vaste classi di soluzioni particolari.

L'equazione fu poi riscoperta da Frenkel e Kontorova (1939), nel loro studio delle dislocazioni di cristallo [92], e come *modello-giocattolo* nell'ambito della teoria non perturbativa dei campi quantistici [93, 94, 95]. Il modello è stato introdotto sia perché è una modifica non lineare dell'equazione di Klein-Gordon per bosoni scalari liberi (in effetti il nome dell'equazione deriva da questo accostamento concettuale). Ma è una estensione

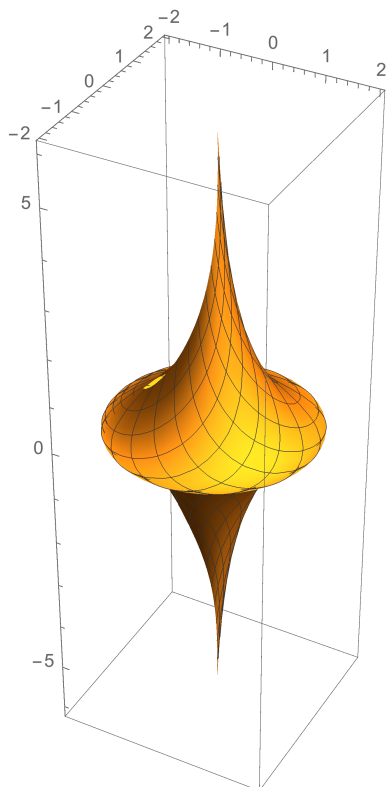


Figura 28: La pseudosfera è una superficie a curvatura gaussiana negativa, piuttosto che positiva come la sfera ordinaria. La pseudosfera si può costruire a partire dalla soluzione particolare (39) per un particolare β . Essa può essere generata semplicemente dalla rotazione della curva trattrice attorno al suo asintoto.

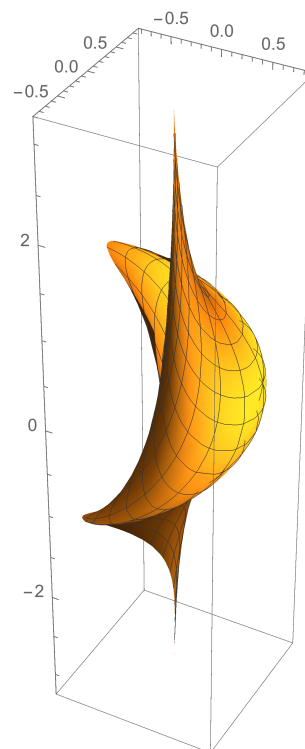


Figura 29: La superficie di Dini è a curvatura costante negativa, connessa alla soluzione particolare di (39) per una scelta particolare di β .

alla teoria delle brane, alle vibrazioni in sistemi magneto-eletto-elastici.

anche del modello non lineare più semplice, cioè ϕ^4 , che però non è integrabile. Quindi in questo caso si possono esplorare simultaneamente in un unico modello sia effetti di rottura spontanea di simmetria, sia soluzioni esatte estese tra due stati di vuoto, sia aspetti legati all'integrabilità. Da un punto di vista più fenomenologico la sine-Gordon è stata utilizzata per descrivere la propagazione di impulsi ultra-corti in mezzi ottici non lineari [96] e nello studio delle giunzioni Josephson nella fisica dei superconduttori [15] ed in quello dei cristalli liquidi chirali [97, 98]. Perciò il suo utilizzo come laboratorio teorico è del tutto attuale. Basti dire che per il solo 2017 nel sotto-sito arXiv/hep-th si contano 22 lavori che coinvolgono questa equazione e le sue estensioni, applicate ai più disparati settori della Fisica Teorica: dalla teoria algebrica dei campi quantistici alla propagazione di elettroni nel grafene, dalla riduzione di modelli di Skyrmlioni

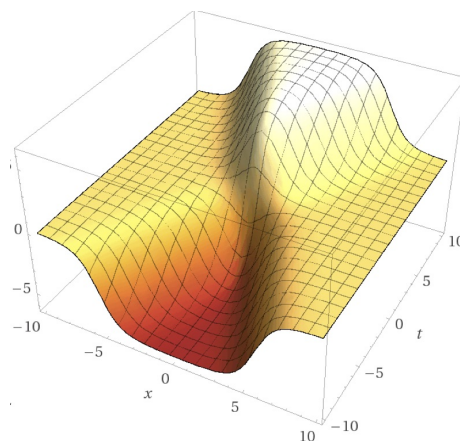


Figura 30: Soluzione di sine-Gordon relativistica, nella quale è descritta la collisione di un kink con un anti-kink. Le due perturbazioni del campo u viaggiano in direzione opposta, sono dotati di energia finita e dopo la collisione riemergono con la stessa forma, ma con uno sfasamento rispetto alle loro traiettorie originarie. Quindi sono un tipo di solitoni.

In questa breve rassegna, in particolare in questo paragrafo, abbiamo spesso menzionato le

Trasformazioni di Bäcklund come uno strumento importante per studiare i sistemi integrabili. Allora sembra proprio opportuno almeno dare un'idea di come funzionino.

Si consideri il sistema di equazioni differenziali contenenti un parametro reale β

$$\begin{cases} \left(\frac{u'-u}{2}\right)_\zeta = \beta \Lambda \sin \frac{u'+u}{2}, \\ \left(\frac{u'+u}{2}\right)_{\bar{\zeta}} = \frac{\Lambda}{\beta} \sin \frac{u'-u}{2}. \end{cases} \quad (38)$$

dove $u'(\zeta, \bar{\zeta})$ è una nuova funzione da determinare sapendo che $u(\zeta, \bar{\zeta})$ è una soluzione particolare della sine-Gordon. Ora è facile dimostrare, eseguendo le derivate miste e imponendole uguali tra loro, che il sistema è integrabile nel senso di Frobenius solo se u' è anch'essa una soluzione di sine-Gordon !!! Allora questo sistema può essere utilizzato per costruire nuove soluzioni a partire da una nota.

Ad esempio, consideriamo la soluzione più semplice possibile: $u(\zeta, \bar{\zeta}) \equiv 0$. Ovviamente il sistema (38) si semplifica parecchio e la sua integrazione è molto più semplice dell'equazione originaria. Con un po' di lavoro si ottiene la soluzione

$$u' = 4 \arctan \left[\exp \Lambda \left(\beta \zeta + \frac{\bar{\zeta}}{\beta} + \beta_0 \right) \right], \quad (39)$$

dove β_0 è una costante di integrazione. Assumendo $\beta \in \mathbb{R}$, il grafico di questa funzione è quello di un gradino smussato, o di una rampa monotonamente crescente: è quello che in gergo viene chiamato un *kink* (piega, difetto). Grazie alla forma simmetrica dell'equazione, il cambio di segno della β e della x porta alla soluzione a rampa decrescente, che si muove nella direzione opposta: è l'*anti-kink*.

Si possono fare alcune osservazioni sulla soluzione a kink: 1) non è possibile deformarla con continuità a quella nulla, qualunque sia il valore di β , 2) essa varia sempre tra 0 e 2π , qualunque sia il valore dei parametri, 3) la variazione significativa del campo avviene nella regione della piega dell'ordine di $\ell_{sol} \sim 1/\Lambda$, 4) nella stessa regione si calcola una significativa densità di energia, che si annulla esponenzialmente a grandi distanze. Integrata fornisce la massa classica del kink, che vale $M_{sol} \approx \Lambda$.

Queste osservazioni ci portano alla conclusio-

ne che la soluzione ottenuta non descrive le particelle elementari della teoria quantistica, ma stati coerenti non perturbativi, che interpolano tra due stati di vuoto della teoria (0 e 2π sono minimi adiacenti del potenziale di auto-interazione). Anzi, facendo uno sviluppo in serie del potenziale di auto-interazione (sine-Gordon è un onesto modello lagrangiano) e confrontandolo con Klein-Gordon si nota facilmente che $\Lambda = \frac{m}{g}$, dove m è la massa dei bosoni della teoria libera e g la costante di accoppiamento. Quindi queste soluzioni non svaniscono per accoppiamenti deboli e si può congetturare che sopravvivano come stati quantistici, se la loro lunghezza d'onda Compton $\lambda_C \sim \frac{1}{M_{sol}} \ll g\ell_{sol}$. Questa è l'idea che sta dietro a tutti i calcoli di stati non perturbativi in teoria dei campi, a prescindere se si considerino *monopoli*, *skymioni*, *istantoni* od altri -oni.

Tutto questo discende da considerazioni sulla semplice soluzione (39). La domanda che allora ci poniamo è se si possano costruire soluzioni più complesse, come quelle a 2 o N solitoni di KdV. In analogia con questo caso, è possibile risolvere problema diretto ed inverso associato a sine-Gordon (37), ma un'altra strada ce la propone di nuovo il sistema (38) delle BT. Infatti supponiamo di conoscere una soluzione *seme* (diciamo u_0) e di essere in grado di integrare il sistema (38) per due diversi parametri β_1 e β_2 non necessariamente reali. Otterremo quindi due nuove soluzioni u_1 e u_2 , rispettivamente. Ora ripetiamo l'operazione precedente risolvendo il sistema delle BT inserendo u_1 con β_2 , oppure u_2 con β_1 . In generale dovremmo ottenere due soluzioni distinte, che indichiamo con $u_{1,2}$ e $u_{2,1}$. Ma se si richiede che $u_{1,2} \equiv u_{2,1} = U$, combinando linearmente, con appropriati coefficienti, le equazioni (38) corrispondenti, si ottiene la seguente *formula di Permutazione di Bianchi*

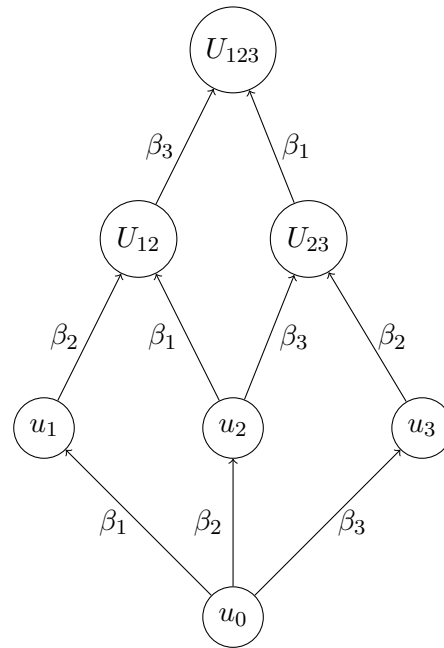
$$U = u_0 + 4 \arctan \left[\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \tan \left(\frac{u_1 - u_2}{4} \right) \right]. \quad (40)$$

La formula di Bianchi costituisce quindi la regola di sovrapposizione per soluzioni di sine-Gordon e naturalmente la cosa più ovvia da fare è metterla alla prova con due soluzioni semplici quali un kink ed un anti-kink che collidono come in Figura 30. Se invece, poniamo $\beta_2 = \bar{\beta}_1$, la formula di Bianchi produce una soluzione periodica nel tempo e convergente a 0 in entrambi i versi

dell'asse x . Questa soluzione, nota con il nome di *breather* (respiro) ha la forma

$$u = 4 \arctan \left(c \frac{\sin \xi}{\cosh \eta} \right)$$

dove ξ ed η sono particolari combinazioni lineari di x, t con coefficienti dipendenti da $\beta_1, \bar{\beta}_1$.



Reticolo di Bianchi per 3-kink

Oppure si possono comporre due kink con parametri diversi. Questa soluzione varierà tra 0 e 4π , collegando due vuoti della teoria che non sono più adiacenti. Naturalmente questo processo può essere iterato, portando alla costruzione di soluzioni speciali sempre più complesse, analoghe a quelle N-solitoniche di KdV e per le quali si possono scrivere formule analoghe. Così anche i kink (e anti-kink) di sine-Gordon collideranno elastiche con l'unico effetto di produrre degli sfasamenti nelle posizioni, relativamente al moto libero. Gli sfasamenti totali si potranno esprimere in termini degli sfasamenti a coppie e quindi i kink sono a tutti gli effetti solitoni. Ma con in più la proprietà di mantenere invariata durante tutto il processo dinamico il valore del salto totale, che può essere solo un multiplo intero di 2π . Questo è un esempio di carica topologica conservata. Ovviamente non sarà sfuggito il fatto che il sistema (38) sia un sistema del primo ordine sovradeterminato, che ha come condizione di compatibilità la particolare equazione che stiamo studiando. Esattamente la stessa richiesta che si fa per il problema spettrale associato ad una equazione non lineare integrabile. Non è infatti un caso e si può dimostrare che l'esistenza di un problema spettrale lineare implica delle BT e viceversa. Si tratta di rappresentazioni diverse della stessa algebra di simmetria (generalizzata) sottostante la proprietà di integrabilità. Il volume [99] è dedicato ad un'ampia trattazione delle BT e loro estensioni.

Modelli discreti

Senza entrare in dettagli, basti dire che il metodo IST fu applicato con grande successo allo studio dei sistemi discreti, a partire dai celebri modelli di sistemi discreti a N gradi di libertà di Calogero - Moser [100, 101] e di Toda [102], sia con estremi fissi che con condizioni al bordo periodiche, nonché le loro varianti relativistiche [103] e quantistiche [104] qualche tempo dopo. Va ricordato che la catena di Toda è l'estensione integrabile del sistema di Fermi-Pasta-Ulam, che abbiamo incontrato all'inizio del nostro percorso. Pertanto riceve tuttora grande attenzione per quanto concerne l'instaurarsi di regimi caotici nei sistemi Hamiltoniani. Menzioniamo solo il fatto che le ricorrenze osservate da FPU sono modi esatti periodici in Toda. Mentre in FPU esse si disperdono su una scala temporale che dipende dalla densità di energia per particella, con una netta transizione di fase dipendente dai parametri costitutivi [105].

I sistemi di Toda hanno una bellissima relazione con le classificazioni delle algebre di Lie semplici sia a livello classico che quantistico [106, 107] e costituiscono il punto di partenza per i cosiddetti campi di Toda, che sono sistemi alle derivate parziali di grande interesse, per esempio, nell'ambito della teoria dei sistemi statistici esattamente risolubili [108].

Quantizzare

Appena le idee fondamentali su come trattare i sistemi non lineari classici si furono consolidati, la versione quantistica del metodo IST nelle teorie di campo venne elaborata dalla scuola di Leningrado - San Pietroburgo (si veda ad esempio [109]), avente a capo Ludwig Faddeev e, tra gli



Figura 31: L. D. Faddeev (1934 - 2017). Un ricordo ed omaggio dei suoi diretti allievi può essere letto al sito [Ludwig D. Faddeev](#)

altri, Korepin, Kulish, Reshetikhin, Sklyanin, Semenov-Tian-Shansky e Takhtajan [110]. Essi stabilirono un approccio sistematico ai sistemi meccanici quantistici integrabili, collegandoli con la teoria dei gruppi quantici di Drinfeld e Jimbo [111, 112] e aprendo la strada alla riformulazione algebrica del problema. Questo approccio ha il potere di unificare in un unico quadro matematico teorie di campo quantistico integrabili [113] insieme a sistemi quantistici di particelle [40] e di spin sul reticolo [39].

Perché l'integrabilità ?

In una occasione L. Faddeev ha scritto [114] :

Ci si chiede cosa ci sia di interessante nei modelli $1 + 1$, quando il nostro spazio-tempo possiede $3 + 1$ dimensioni. Esistono diverse risposte particolari a questa domanda.

(a) I modelli giocattolo in dimensioni $1 + 1$ ci possono insegnare il comportamento delle teorie di campo in regime non perturbativo. In effetti fenomeni quali la rinormalizzazione, la libertà asintotica, la trasmutazione dimensionale (cioè l'emergere della

massa attraverso i parametri di regolarizzazione) contengono modelli integrabili e possono essere descritti esattamente.

(b) Esistono numerose applicazioni fisiche dei modelli dimensionali $1 + 1$ nella fisica della materia condensata.

(c) Il formalismo di modelli integrabili ha mostrato diverse volte di essere utile nella moderna teoria delle stringhe, la superficie di universo delle quali è bidimensionale. In particolare, i modelli di teoria del campo conforme sono speciali limiti a massa nulla di modelli integrabili.

(d) La teoria dei modelli integrabili ci insegna l'esistenza di nuovi fenomeni, che non emergono da nei precedenti sviluppi della Teoria dei Campi Quantistici, specialmente in relazione allo spettro di massa.

(e) Non posso fare a meno di ricordare che lavorare con i modelli integrabili è un delizioso passatempo. Hanno anche dimostrato di essere uno strumento di grande successo per scopi educativi.

Queste ragioni mi sono state sufficienti per continuare a lavorare in questo campo negli ultimi 25 anni (compresi 10 anni di sistemi solitonici classici) e a insegnare a pochi seguaci, spesso definiti come la scuola di Leningrado-San Pietroburgo.

Conclusioni

Speriamo che questo contributo abbia stimolato la curiosità di numerosi lettori nell'approfondire la tematica dei sistemi integrabili e abbiano preparato il terreno per gli articoli successivi in questo numero di Ithaca.

Questo settore attrae rappresentanti di diverse comunità, con interessi che vanno dalla matematica pura alla fisica matematica e alla fisica teorica. Siamo sicuri che la nuova generazione di fisici e matematici realizzerà grandi progressi nelle direzioni menzionate. Gli strumenti sviluppati per determinare le condizioni di integrabilità di molte classi di sistemi e i loro sviluppi applicativi conseguenti sono stati fatti propri e correntemente utilizzati in molte e differenziate comunità scientifiche. Sia in ambito strettamente matematico, che in quello della fisica teorica e delle sue più svariate applicazioni. In un certo senso si è stati testimoni e partecipi di una importante stagione di conquiste concettuali. Ora bisogna ampliare la loro potenza con nuove idee. In effetti il messaggio di quanto scritto non è quello di

mostrare quante cose si riesca a fare, ma di quante si riconducono a delle strutture fondamentali, dal disordine accidentale all'ordine nascosto dietro le contingenze. L'ordine stesso può essere complesso da descrivere, ma un solo concetto sintetizza un universo. Tutti i sistemi fisici che ho descritto si possono tranquillamente simulare al calcolatore, ma quante liste di numeri potranno mai dare la stessa chiarezza e profondità di idee, che si distillano in una sola delle soluzioni esposte? Naturalmente non tutto si esaurisce in un bell'elenco di equazioni e di strumenti analitici o algebrici, sappiamo che il mondo fuori di noi è ben più complicato. Quanto vogliamo complicarcelo in aggiunta, cioè renderlo ancora meno decifrabile, dipende da noi.

D'altra parte non è molto interessante avere un campo con un unico e uniforme tipo di piantagione, o perfettamente arato e ben noto fino alla singola zolla, ma un campo che possa fiorire. Il che non avviene se non vi si diffondono semi e germogli familiari ed estranei assieme. Ognuno di essi prenderà una sua conformazione specifica per varietà, suolo, pioggia, sole e cure. E ancora più interessante sarà se compariranno ibridi ed incroci nuovi e fecondi. Così accade per le idee.



[1] I. Newton: *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Jussu Societatis Regiæ ac Typis Joseph Streater, Londini (1687). <http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/PR-ADV-B-00039-00001/1>

[2] J.-L. Lagrange: *Mécanique Analytique, Tomes I et II*. Courcier, Paris (1811). <https://archive.org/details/mcaniqueanalyti06lagrgoog>

[3] C. Rovelli: *L'ordine del Tempo*. Adelphi, Milano (2017).

[4] C. Rovelli, F. Vidotto: *Covariant Loop Quantum Gravity*. Cambridge University Press, Cambridge (2014).

[5] D. Gross, M. Henneaux, A. Sevrin: *The theory of Quantum World, Proceedings of the 25th Solvay Conference on Physics*. World Scientific, Singapore (2013).

[6] E. Fermi, J. R. Pasta, S. M. Ulam: "Studies of non linear problems", *Los Alamos Sc. Lab.* **LA-1940** (1955) Gli autori ringraziarono Ms M. Tsingou per aver programmato la simulazione sul MANIAC.

[7] J. Von Neumann, R. D. Richtmyer: "A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks", *J. Appl. Phys.* **21** (1950) 232-237.

[8] H. Poincaré: *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Gauthier-Villars et fils, Paris (1892).

[9] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko: *Classical Mechanics (Third Edition)*. Addison Wesley, San Francisco (2000).

[10] A.N. Kolmogorov: "On conservation of conditionally periodic motions under small perturbations of the hamiltonian", *Dokl. Acad. Nauk SSR* **98** (1954) 527-530. in russo

[11] V. I. Arnold: "Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the hamiltonian", *Russian Mathematical Surveys* **18** (1963) 9-36.

[12] J. Moser: "On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus", *Nachricht von der Akademie der Wissenschaften Gottingen II, Math. Phys.* **K1** (1962) 1-20.

[13] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura: "Method for solving the Korteweg-deVries equation", *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1095.

[14] J. S. Russell: "Report on Waves", *Report of the XIV meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, 1844, London* (1845) 311.

[15] A. C. Scott: "Propagation of magnetic flux on a long Josephson junction", *Nuovo Cimento* **B69** (1970) 241-261.

[16] J. Boussinesq: "Essai sur la theorie des eaux courantes", *Acad. des Sci. Inst. Nat. France* **XXIII** (1877)

[17] D. J. Korteweg, G. de Vries: "On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves", *Philosophical Magazine* **39** (1895) 422.

[18] G. B. Witham: *Linear and non linear waves*. John Wiley & Sons, New York (1974).

[19] N. J. Zabusky, M. D. Kruskal: "Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States", *Phys. Rev. Lett.* **15** (1965) 240-243.

[20] P. D. Lax: "Integrals of non linear equations of evolution and solitary waves", *Commun. Pure Appl. Math.* **28** (1968) 141-188.

[21] F. Magri: "A simple model of the integrable Hamiltonian equation", *J. Math. Phys.* **1978** (19) 1156-1162.

[22] A. B. Shabat and V. E. Zakharov: "A scheme for integrating the non linear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. I", *Funct. Anal. Appl.* **8** (1974) 226.

[23] A. B. Shabat and V. E. Zakharov: "Integration of non linear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering. II", *Funct. Anal. Appl.* **13** (1979) 166.

[24] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur: "The inverse scattering transform-Fourier analysis for non linear problems", *Studies in Appl. Math.* **53** (1974) 249-315.

[25] T. Eguchi, P. B. Gilkey, A. J. Hanson: "Gravitation, gauge theories and differential geometry", *Physics Reports* **66** (1980) 213 - 393.

- [26] H. D. Wahlquist, F. B. Estabrook: "Bäcklund Transformation for Solutions of the Korteweg-de Vries Equation", *Phys. Rev. Lett.* **31** (1973) 1386–1390.
- [27] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan: *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*. Springer-Verlag, Berlin (1987).
- [28] M. J. Ablowitz, H. Segur: *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. SIAM, Philadelphia (1981).
- [29] F. Calogero, A. Degasperis: *Spectral Transform and Solitons I*. North-Holland, Amsterdam (1982).
- [30] S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevsky and V. E. Zakharov: *Theory Of Solitons. The Inverse Scattering Method*. Consultants Bureau, New York (1984).
- [31] C. Rebbi, G. Soliani: *Solitons and Particles*. World Scientific, Singapore (1984).
- [32] B. G. Konopelchenko: *Non linear Integrable Equations*. Lecture Notes in Physics, Springer, Berlin (1987).
- [33] M. Toda: *Non linear waves and solitons*. Kluwer, Dordrecht (1989).
- [34] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson: *Solitons, non linear Evolution Equations and Inverse Scattering*. Cambridge University Press, Cambridge (1991).
- [35] V. E. Zakharov: *What is Integrability?*. Springer-Verlag, Berlin (1991).
- [36] R. Rajaraman: *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*. North-Holland, Amsterdam (1989).
- [37] B. G. Konopelchenko: *Introduction to Multidimensional Integrable Equations*. Plenum Monograph in non linear Physics, Springer, Berlin (1992).
- [38] O. Babelon, D. Bernard and M. Talon: *Introduction to classical integrable systems*. Cambridge University Press, Cambridge (2003).
- [39] R. J. Baxter: *Exactly solved models in statistical mechanics*. Dover Publications, Inc., New York (2007).
- [40] B. Sutherland: *Beautiful Models. 70 Years of Exactly Solved Quantum Many-Body Problems*. World Scientific, Singapore (2007).
- [41] M. Dunajski: *Solitons, Instantons, and Twistors*. Oxford University Press, Oxford (2010).
- [42] N. Manton, P. Sutcliffe: *Topological Solitons*. Cambridge University Press, Cambridge (2004).
- [43] E. J. Weinberg: *Classical Solutions in Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge (2012).
- [44] H. Segur: "Integrable models of waves in shallow water", *Probability, geometry and integrable systems* (2008) 345-371.
- [45] I. M. Gelfand and B. M. Levitan: "On the determination of a differential equation from its spectral function", *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2* **1** (1955) 253-304.
- [46] V. A. Marchenko: "Sturm-Liouville operators and their applications", *Kiev Izdatel Naukova Dumka* **1** (1977) 332. in russo.
- [47] N. I. Akhiezer: "Continuous analogues of the polynomials orthogonal on the system of intervals", *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **141** (1961) 263-266.
- [48] D. Mumford: *Tata lectures on Theta - II*. Birkhäuser, Boston (1984).
- [49] B. A. Dubrovin: "The inverse scattering problem for periodic finite-zone potentials", *Funct. Anal. Appl.* **9** (1975) 61-62.
- [50] A.R. Its, V.B. Matveev: "Hill operators with a finite number of lacunae", *Funct. Anal. Appl.* **9** (1975) 65-66.
- [51] T. Trogdon, B. Deconinck: "Numerical computation of the finite-genus solutions of the Korteweg - de Vries equation via Riemann-Hilbert problems", *Applied Mathematics Letters* **26** (2013) 5-9.
- [52] E. Arbarello: "Sketches of KdV", *Contemp. Math. Amer. Math. Soc.* **312** (2002) 9-70.
- [53] R. Camassa, D. D. Holm: "An integrable shallow water equation with peaked solitons", *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 1661-1664.
- [54] A. Degasperis: *Multiscale Expansion and Integrability of Dispersive Wave Equations*. Integrability, Ed. A. V. Mikhailov, Springer, Berlin (2009).
- [55] B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili: "On the stability of solitary waves in weakly dispersive media", *Sov. Phys. - Dokl.* **15** (1970) 539-541.
- [56] S. V. Manakov: "The inverse scattering transform for the time-dependent Schrödinger equation and Kadomtsev-Petviashvili equation", *Physica* **3D** (1981) 420-427.
- [57] A.S. Fokas, M. J. Ablowitz: "On the inverse scattering and direct linearizing transforms for the Kadomtsev-Petviashvili equation", *Phys. Lett.* **94A** (1983) 67-70.
- [58] M. Boiti, J. J.-P. Leon, F. Pempinelli: "Spectral transform and orthogonality relations for the Kadomtsev-Petviashvili I equation", *Phys. Lett. A* **141** (1989) 96-100.
- [59] D. David, D. Levi, P. Winternitz: "Bäcklund Transformations and the infinite-dimensional symmetry group of the Kadomtsev-Petviashvili equation", *Phys. Lett. A* **118** (1986) 390-394.
- [60] F. Magri, C. Morosi, G. Tondo: "Nijenhuis G -manifolds and Lenard bicomplexes: a new approach to KP systems", *Comm. Math. Physics* **3** (1988) 457-475.
- [61] T. Miwa, M. Jimbo and E. Date: *Solitons: Differential equations, symmetries and infinite-dimensional algebras*. Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [62] R. Beals, R.R. Coifman: *Scattering, transformations spectrales et equations d'evolution non lineaire, I and II*. Seminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, École Polytechnique, Palaiseau (1981-1982).
- [63] V. L. Ginzburg, L. D. Landau: "On the Theory of superconductivity", *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20** (1950) 1064-1082.
- [64] E. P. Gross: "Structure of a quantized vortex in boson systems", *Il Nuovo Cimento* **20** (1961) 454-477.
- [65] L. P. Pitaevskii: "Vortex lines in an imperfect Bose gas", *Sov. Phys. JETP.* **13** (1961) 451-454.

- [66] L. P. Pitaevskii, S. Stringari: *Bose-Einstein Condensation*. Clarendon Press, Oxford (2003).
- [67] V. E. Zakharov: "Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid", *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **9** (1968) 190-194.
- [68] M. Onorato, D. Proment, G. Clauss, M. Klein: "Rogue Waves: From non linear Schrödinger Breather Solutions to Sea-Keeping Test", *PLOS ONE* **8** (2013) e54629.
- [69] R. Y. Chiao, E. Garmire, and C. H. Townes: "Self-Trapping of Optical Beams", *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 479.
- [70] A. Hasegawa and Y. Kodama: *Solitons in Optical Communications*. Clarendon, Oxford (1995).
- [71] G. P. Agrawal: *Non linear Fiber Optics*. Academic Press, San Diego (1995).
- [72] G. Assanto and N. F. Smyth: "Light-Induced Waveguides in Nematic Liquid Crystals", *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics* **22** (2016) 4400306.
- [73] V. I. Karpman: "On the Dynamics of Sonic-Langmuir Solitons", *Physica Scripta* **11** (1975) 263.
- [74] A. S. Davydov: "The theory of contraction of proteins under their excitation", *Journal of Theoretical Biology* **38** (1973) 559-569.
- [75] L. Brizhik, A. Eremko, B. Piette, W. Zakrzewski: "Solitons in α -helical proteins", *Physical Review E* **70** (2004) 031914.
- [76] E. H. Lieb, W. Liniger: "Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. I", *Physical Review* **130** (1963) 1605-1616.
- [77] V.E. Korepin, N.M. Bogoliubov, A.G. Izergin: *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*. Cambridge University Press, Cambridge (1993).
- [78] C. Sulem, P.-L. Sulem: *The non linear Schrödinger equation. Self focusing and wave collapse*. Springer, Berlin (1999).
- [79] A. Davey, K. Stewartson: "On three-dimensional packets of surface waves", *Proc. Roy. Soc. London A* **338** (1974) 101-110.
- [80] L. Martina, O.K. Pashaev, G. Soliani: "Chern-Simons Field Theory and Completely integrable Systems", *Phys. Lett. B* **378** (1996) 175-180.
- [81] V.A. Arkadiev, A.K. Pogrebkov, M.C. Polivanov: "Closed string-like solutions of the Davey-Stewartson equation", *Inverse Problems* **5** (1989) L1-L6.
- [82] V.A. Arkadiev, A.K. Pogrebkov, M.C. Polivanov: "Inverse scattering transform method and soliton solutions for Davey-Stewartson II equation", *Physica D* **36** (1989) 189-197.
- [83] M. Boiti, J.J-P. Leon, L. Martina, F. Pempinelli: "Scattering of localized solitons in the plane", *Phys. Lett. A* **132** (1988) 432-439.
- [84] F. Pempinelli, M. Boiti, J. Leon, L. Martina: *Exponentially localized solitons in 2+1 dimensions*. in "non linear World", Eds. V.G. Bar'yakhtar et al., World Scientific Pub. Co., Singapore (1990).
- [85] Fokas, A. S. and Santini, P. M.: "Coherent structures in multidimensions", *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 1329-1333.
- [86] M.Boiti, L. Martina, O.K. Pashaev, F. Pempinelli: "Dynamics of multidimensional solitons", *Phys. Lett. A* **160** (1991) 55-63.
- [87] B. Yang, Y. Chen, General rogue waves and their dynamics in several reverse time integrable nonlocal non linear equations, arXiv:1712.05974 [nlin.SI] (2017).
- [88] C. Klein, N. Stoilov, Numerical study of blow-up mechanisms for Davey-Stewartson II systems arXiv:1712.08814 [math.AP] (2017).
- [89] E. Bour: "Théorie de la déformation des surfaces", *J. Ecole Imperiale Polytechnique* **19** (1862) 1848.
- [90] L. Bianchi: *Lezioni di Geometria differenziale*. Spoerri, Pisa (1922).
- [91] A. V. Bäcklund: "Zur Theorie der Flächentransformationen", *Math. Ann.* **XIX** (1882) 387-422.
- [92] J. Frenkel, T. Kontorova: "On the theory of plastic deformation and twinning", *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Fizicheskaya* **1** (1939) 137-149.
- [93] J. Goldstone, R. Jackiw: "Quantization of non linear waves", *Phys. Rev. D* **11** (1975) 1486-1498.
- [94] R. Jackiw: "Quantum meaning of classical field theory", *Rev. Mod. Phys.* **49** (1977) 681-706.
- [95] S. Coleman: "Quantum sine-Gordon equation as the massive Thirring model", *Phys. Rev. D* **11** (1975) 2088-2097.
- [96] G. L. Lamb: "Analytical Descriptions of Ultrashort Optical Pulse Propagation in a Resonant Medium", *Rev. Mod. Phys.* **43** (1971) 99-124.
- [97] I.W. Stewart: *The Static and Dynamic Continuum Theory of Liquid Crystals*. Taylor and Francis, London and New York (2004).
- [98] G. De Matteis, L. Martina, V. Turco: "Skyrmion States In Chiral Liquid Crystals", *in via di pubblicazione su Theor. Math. Phys.* **194** (2018) .
- [99] C. Rogers, W. K. Schief: *Bäcklund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- [100] F. Calogero: "Solution of the one-dimensional N-body problem with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials", *J. Math. Phys.* **12** (1971) 419-436. (Erratum, *ibidem* **37** (1996), 3646)
- [101] J. Moser: "Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations", *Adv. Math.* **16** (1975) 197-220.
- [102] M. Toda: "Vibration of a Chain with non linear Interaction", *Journal of the Physical Society of Japan* **22** (1967) 431-436.
- [103] S. N. M. Ruijsenaars: "Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities", *Commun. Math. Phys.* **110** (1987) 191-213.
- [104] B. Sutherland: "Exact results for a quantum many-body problem in one dimension. I and II", *Phys. Rev. A* **4** (1971) 2019-2021.; *ibidem* **5** (1972), 1372-1376.

- [105] M. Leo, R. A. Leo, P. Tempesta: "On the high energy stability of the nonlinear modal solutions for the Fermi-Pasta-Ulam β system", *J. Stat. Mech.: Th. Exp.* **2011** (2011) P03003.
- [106] M.A. Olshanetsky and A.M. Perelomov: "Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras", *Physics Reports* **71** (1981) 313 - 400.
- [107] M.A. Olshanetsky and A.M. Perelomov: "Quantum integrable systems related to lie algebras", *Physics Reports* **94** (1983) 313 - 404.
- [108] G. Mussardo: *Statistical Field Theory. An Introduction to Exactly Solved Models in Statistical Physics*. Oxford University Press, Oxford (2009).
- [109] E. K. Sklyanin: "Quantum version of the method of inverse scattering problem", *J. Sov. Math.* **19** (1982) 1546.
- [110] L. D. Faddeev and V. E. Zakharov: "Korteweg-de Vries equation: A Completely integrable Hamiltonian system", *Funct. Anal. Appl.* **5** (1971) 280.
- [111] V. G. Drinfeld: "Quantum groups", *J. Sov. Math.* **41** (1988) 898.
- [112] M. Jimbo: "Quantum R matrix for the generalized Toda system", *Comm. Math. Phys.* **102** (1986) 537-547.
- [113] A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov: "Factorized S -Matrices in Two-Dimensions as the Exact Solutions of Certain Relativistic Quantum Field Models", *Annals Phys.* **120** (1979) 253.
- [114] L. D. Faddeev, "How algebraic Bethe ansatz works for integrable model", Les Houches lectures, 1995. arXiv:9605187 [hep-th] (1996).



Luigi Martina: Luigi Martina è professore associato di Fisica Teorica presso l'Università del Salento. La sua attività di ricerca è incentrata nello studio di sistemi fisici non lineari con metodi analitici e algebrici.

Trascendenti di Painlevé e integrabilità

Davide Guzzetti *SISSA, Trieste, Italia*

In questo scritto verrà analizzato come sia possibile definire nuove funzioni speciali attraverso la soluzione di equazioni differenziali e sviluppare metodi per conoscerne le proprietà di interesse, quando le equazioni stesse godono della così detta proprietà di Painlevé. In particolare, introdurremo le sei equazioni di Painlevé. Ciò permette di stabilire una nozione di integrabilità che si differenzia da quella nota in meccanica classica (riduzione delle equazioni del moto a delle integrazioni), e che è molto importante per diversi modelli della fisica matematica contemporanea.

Introduzione

In fisica matematica classica e meccanica quantistica, le leggi oggetto di studio sono spesso espresse nella forma di equazioni differenziali lineari del secondo ordine, cioè equazioni che coinvolgono le derivate prime e seconde di una funzione incognita. Queste equazioni sono state ben studiate nei secoli passati, e probabilmente ogni studente di fisica, ingegneria e matematica, che abbia affrontato problemi di meccanica, fenomeni ondulatori o di diffusione, elettromagnetismo e meccanica quantistica, ha incontrato le equazioni di Bessel, di Legendre, di Airy, di Weber, di Riemann-Gauss (equazione ipergeome-

trica), e così via. Nella seconda parte del secolo scorso e in quello presente, la fisica matematica ha conosciuto un forte sviluppo, specialmente motivato da problemi di meccanica statistica e teoria dei campi, in cui le leggi oggetto di studio risultano formulate in termini di equazioni non lineari. Queste ultime sono molto più difficili da studiare, ma sorprendentemente presentano delle proprietà che le rendono “risolubili”, cioè “integrabili”, in un modo analogo, anche se più complesso, al caso lineare. In questo contesto, un ruolo centrale è assunto dalle equazioni non lineari del secondo ordine note, sin dall’inizio del XX secolo, come *equazioni di Painlevé*.

Le equazioni differenziali lineari sono state fondamentali per le applicazioni, in quanto è stato possibile studiare e capire tutte le proprietà delle soluzioni. Più precisamente, le soluzioni, in generale, *non* sono funzioni quali i polinomi, le funzioni razionali (rapporto di polinomi), le funzioni algebriche, le funzioni elementari come l’esponenziale e^z e le funzioni trigonometriche, o le loro inverse, come il logaritmo. Sono funzioni più complesse, dette trascendenti. Tuttavia, è possibile conoscerne tutte le proprietà che ci servono: sappiamo come si comportano localmente, vicino a ogni valore della variabile indipendente; sappiamo come si comportano globalmente, cioè per tutti i valori della variabile indipendente; conosciamo le eventuali singolarità, e così via. In questo senso, le equazioni differenziali lineari sono *integrabili*: conosciamo tutte le

proprietà delle loro soluzioni. Scopo di questa presentazione è mostrare che anche le equazioni di Painlevé, benché non lineari e più complesse da studiare, sono integrabili nello stesso senso: possiamo conoscere le proprietà locali e globali delle soluzioni. Di conseguenza, potremo dire *integrabili* tutti quei modelli, sistemi o problemi la cui soluzione è ottenuta in termini di equazioni di Painlevé. In verità, non esiste un unico tipo di integrabilità, e quindi un'unica definizione di "sistema integrabile"; quella specificata dalle equazioni di Painlevé è un tipo. Ve ne sono altri, come l'integrabilità dei sistemi dinamici classici. Torneremo su ciò alla fine di questo scritto.

Un po' di storia

Consideriamo un'equazione differenziale lineare

$$y^{(n)} + c_1(z)y^{(n-1)} + c_2(z)y^{(n-2)} + \dots \\ \dots + c_{n-1}(z)y' + c_n(z)y = 0,$$

con coefficienti $c_1(z), \dots, c_n(z)$ nella variabile indipendente z appartenente al campo complesso \mathbb{C} . $y = y(z)$ è la funzione l'incognita. Usiamo la notazione

$$y' := \frac{dy}{dz}, \quad y'' := \frac{d^2y}{dz^2}, \quad y^{(k)} := \frac{d^k y}{dz^k}.$$

Le soluzioni $y(z)$ hanno un ruolo centrale nella fisica matematica classica, specialmente nel caso $n = 2$. Le soluzioni delle equazioni più semplici sono *funzioni elementari*, come l'esponenziale $y(z) = e^{\lambda z}$, che risolve equazioni con c_1, \dots, c_n costanti. Le soluzioni delle equazioni del secondo ordine ($n = 2$), più complesse, menzionate nell'introduzione, furono chiamate *funzioni speciali* o *trascendenti*, e tra esse troviamo la funzione ipergeometrica, le funzioni di Legendre, quelle di Bessel, di Whittaker, di Mathieu, la funzione parabolica del cilindro, e così via (per la verità, nella classe delle funzioni speciali, ce ne sono anche di quelle definite da integrali e serie: per esempio, la funzione Gamma $\Gamma(z)$ e la zeta di Riemann $\zeta(z)$). Dunque, le equazioni differenziali lineari permettono di *definire* delle funzioni, che sono le soluzioni:

$$\begin{aligned} \text{Eq. diff. lineari secondo ordine} &\implies \\ \implies &\text{funzioni speciali/trascendenti.} \end{aligned}$$

Che cosa accade invece se usiamo equazioni non lineari? Possiamo definire funzioni usando equazioni non lineari? Fu questa la domanda che i matematici si posero alla fine del XIX secolo. Per capirne il senso, occorre dire qualcosa di più sulle soluzioni di equazioni lineari.

Se i coefficienti $c_1(z), \dots, c_n(z)$ sono funzioni analitiche della variabile complessa z (cioè regolari differenziabili infinite volte), allora anche le soluzioni $y(z)$ sono analitiche su \mathbb{C} (questo è un teorema). Per esempio $y' - y = 0$ ha soluzione generale $y = ce^z$, con c costante, che è analitica su tutto il piano complesso. Consideriamo invece il caso in cui i coefficienti sono analitici sul piano complesso a meno di un numero finito di singularità isolate, cioè a meno di punti

$$z = a_1, a_2, \dots, a_N.$$

In tali punti può accadere che il limite per $z \rightarrow a_j$ di qualche coefficiente è infinito, per esempio

$$c_1(z) = \frac{1}{z - a_j},$$

e $z = a_j$ si chiama *polo*; oppure il limite non esiste, per esempio

$$c_3(z) = e^{\frac{1}{z - a_j}},$$

e $z = a_j$ si chiama *singularità essenziale*. Allora, ogni $z = a_j$ risulta essere una singularità anche per la soluzione generale (intendiamo per *generale* una soluzione dipendente da costanti di integrazione in numero uguale all'ordine dell'equazione). Cioè, $z = a_j$ è un polo o una singularità essenziale della soluzione generale, oppure un *punto di diramazione*. Diciamo che $z = a_j$ è un punto di diramazione se, percorrendo un cammino costituito da una piccola circonferenza con centro in $z = a_j$, così che il valore di $y(z)$ varia lungo il cammino, quando si torna al punto di partenza si ottiene un valore diverso dall'iniziale. Per esempio, la soluzione generale di $y' - \frac{1}{2(z-a)}y = 0$ è

$$y(z) = c\sqrt{z - a},$$

ove c è una costante di integrazione. Se percorriamo una circonferenza intorno a $z = a$ come nella Figura 1 tornando al punto di partenza, la solu-

zione cambia segno $y(z) \mapsto -y(z)$. Essa assume quindi i due valori $y(z)$ e $-y(z)$ lungo il cammino. Quindi, $z = a$ è un punto di diramazione.

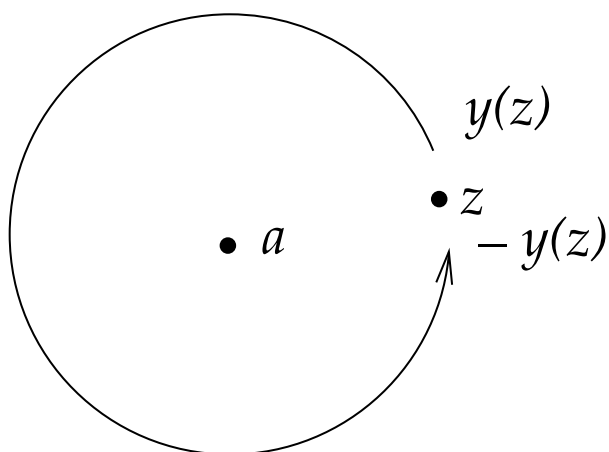


Figura 1: $y(z) = c\sqrt{z-a}$ cambia segno se, partendo da z , si ritorna in z lungo un cammino che racchiude a . Ciò corrisponde ai due possibili segni della radice quadrata di $z-a$.

Le equazioni lineari hanno la proprietà importante che la soluzione generale non può avere altre singolarità all'infuori di quelle dei coefficienti $c_1(z), \dots, c_n(z)$. Si noti che le soluzioni non sono funzioni ben definite su \mathbb{C} meno i punti $z = a_1, a_2, \dots, a_N$, perché possono assumere più valori, a causa delle diramazioni. Sono però funzioni ben definite su uno spazio più grande. Tale spazio si chiama *ricoprimento universale* di \mathbb{C} privato dei punti singolari a_1, a_2, \dots, a_N . Per esempio $\sqrt{z-a}$ definisce la funzione $(z-a)^{1/2}$ sul ricoprimento universale di $\mathbb{C} - \{a\}$. Siccome i punti singolari di $c_1(z), \dots, c_n(z)$ sono *fissi*, cioè sono determinati una volta per tutte dall'equazione, lo spazio di ricoprimento è a sua volta ben definito una volta per tutte. Questa è una proprietà di *integrabilità* delle equazioni lineari, in quanto stabilisce l'esistenza di una soluzione generale su uno spazio di ricoprimento ben definito, la quale soluzione si può adattare a tutti i valori possibili delle costanti di integrazione.

Che cosa accade invece se usiamo equazioni non lineari? La proprietà sopra descritta non vale più. Per esempio, prendiamo l'equazione non lineare $yy' = 1/2$. La soluzione generale è $y(z) = \sqrt{z-a}$, dove a è la costante di integrazione. Il punto di diramazione $z = a$, che non appare nei coefficienti dell'equazione, dipende dalla soluzione, cioè dalla costante di integrazione a . Un altro esempio è $y'' + (y')^2 = 0$, che ha

soluzione generale

$$y(z) = \log_e(z-a) + c.$$

Qui, a e c sono le costanti di integrazione. La soluzione, partendo da un punto z dove vale $y(z)$ e percorrendo il cammino circolare intorno ad a per k volte, fino a tornare in z , assume il valore finale $y(z) + 2\pi ik$ (qui, $i = \sqrt{-1}$). La funzione $\log_e(z-a)$ è ben definita (come funzione, appunto, che assegna a un valore di z un valore di $\log_e(z-a)$) se z è pensato come un punto del ricoprimento universale di $\mathbb{C} - \{a\}$. Si noti bene, però, che questo spazio di ricoprimento dipende da a , cioè dalla costante di integrazione; non è fissato dall'equazione una volta per tutte le soluzioni.

In conclusione, non possiamo in generale definire funzioni speciali usando equazioni non lineari, perché non c'è uno spazio di ricoprimento unico e fisso su cui la soluzione generale è definita. In altre parole, le soluzioni possono avere dei punti di diramazione "mobili", che cambiano variando le costanti di integrazione. La cosa è ancor più sconsolante perché queste singolarità mobili, non apparendo nell'equazione, non sono prevedibili con semplicità.

Possiamo però cercare equazioni non lineari che mantengano la proprietà di quelle lineari, nel senso che eventuali punti di diramazione della soluzione generale siano determinati esclusivamente dall'equazione. Che tali equazioni esistano, è chiaro dal seguente esempio:

$$y' + \frac{1}{z}y^2 = 0 \implies y(z) = \frac{1}{\log_e(z/a)}, \quad a \neq 0.$$

La soluzione generale $y(z)$ ha un polo in $z = a$ (i.e. $\lim_{z \rightarrow a} y(z) = \infty$), che è dipendente dalla costante di integrazione a . Il punto di diramazione $z = 0$ dipende invece solo dall'equazione.

Alla fine del XIX secolo, i matematici cercarono di classificare le equazioni non lineari tali che gli eventuali punti di diramazione della soluzione generale dipendano solo dall'equazione, e non dalle costanti di integrazione; come nell'esempio poco sopra. Oggi, questa è detta *proprietà di Painlevé*. Si tratta di una proprietà di "integrabilità", come già discusso sopra.

Per quanto riguarda le equazioni del primo ordine, il problema è risolto dal teorema di L. Fu-

chs, Poincaré e Painlevé, stabilendo che le uniche equazioni che soddisfano la proprietà di Painlevé sono quella di Riccati

$$y' = c_1(z)y^2 + c_2(z)y + c_3(z),$$

ove $c_1(z)$, $c_2(z)$ e $c_3(z)$ sono funzioni meromorfe di z , cioè analitiche su \mathbb{C} meno poli isolati a_1, \dots, a_N ; e l'equazione

$$(y')^2 = 4y^3 - c_2y - c_3,$$

con c_2, c_3 costanti. Quest'ultima ha soluzione

$$y(z) = \wp(z - a; c_2, c_3),$$

con a costante di integrazione. Essa definisce la funzione speciale di Weierstrass $\wp(z; c_2, c_3)$, che è il prototipo di funzione bi-periodica (detta *elittica*) sul piano complesso (i periodi dipendono da c_2 e c_3). Essa è una funzione speciale, nuova rispetto a quelle che si ottengono da equazioni lineari. L'equazione di Riccati, invece, si trasforma in un'equazione lineare per una funzione $u(z)$, con il cambio di variabile $y = -c_1(z)^{-1}u^{-1}u'$, e quindi non introduce nuove funzioni speciali rispetto al quelle lineari. Sono state classificate anche equazioni in cui appare la potenza $(u')^m$, ma le soluzioni non definiscono nuove funzioni speciali. Si veda [16].

Per quanto riguarda le equazioni del secondo ordine, limitatamente al caso

$$y'' = R(z, y, y'),$$

con R funzione razionale di y e y' (rapporto di polinomi) e meromorfa di z , la classificazione fu completata da Painlevé [23] [24] [25] e dal suo studente Gambier [11] tra il 1900 e il 1910. A meno di trasformazioni di Möbius $y \mapsto (\varphi_1(z)y + \varphi_2(z))/(\varphi_3(z)y + \varphi_4(z))$, si ottengono poco più di 50 equazioni, delle forma

$$y'' = L(z, y)(y')^2 + M(z, y)y' + N(z, y),$$

dove L, M, N sono funzioni razionali. Tutte, tranne sei, si possono ridurre mediante operazioni classiche ad equazioni lineari, oppure ad equazioni integrabili per quadrature, ovvero alle sei equazioni rimanenti. Queste ultime si chiamano *equazioni di Painlevé*, indicate con PI, PII, PIII, PIV, PV e PVI. La forma esplicita di L, M, N è come

segue.

Per PI:

$$L = M = 0, \quad N = 6y^2 + z.$$

Per PII:

$$L = M = 0, \quad N = 2y^3 + zy + \alpha.$$

Per PIII:

$$L = \frac{1}{y}, \quad M = -\frac{1}{z}, \\ N = \frac{\alpha y^2 + \beta}{z} + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}.$$

Per PIV:

$$L = \frac{1}{2y}, \quad M = 0, \\ N = \frac{3y^3}{2} + 4zy^2 + 2(z^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y}.$$

Per PV:

$$L = \frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}, \quad M = -\frac{1}{z}, \\ N = \frac{(y-1)^2}{z^2} \left(\alpha y + \frac{\beta}{y} \right) + \frac{\gamma y}{z} + \frac{\delta y(y+1)}{y-1}.$$

Per PVI:

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-z} \right), \\ M = - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{y-z} \right),$$

$$N = \frac{y(y-1)(y-z)}{z^2(z-1)^2} \cdot \left(\alpha + \beta \frac{z}{y^2} + \gamma \frac{z-1}{(y-1)^2} + \delta \frac{z(z-1)}{(y-z)^2} \right), \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}.$$

Per tutte le equazioni PI,...,PVI, le funzioni L, M, N hanno dei poli in almeno uno dei punti

$$z = 0, 1, \infty$$

(qui estendiamo il piano complesso al punto $z = \infty$; indichiamo il piano esteso con il simbolo $\bar{\mathbb{C}}$). Queste sono le singolarità fisse che, per la proprietà di Painlevé, costituiscono gli unici possibili punti di diramazione della soluzione generale. Sono dette *punti critici*. In particolare,

le soluzioni di PI, PII, PIV non hanno punti di diramazione, ma solo singolarità essenziali in $z = \infty$. Le soluzioni di PIII e PV hanno punti di diramazione in $z = 0, \infty$, ma se si cambia variabile $z = e^\xi$, le diramazioni vengono rimosse. PVI ha punti di diramazione in $z = 0, 1, \infty$, che non si possono rimuovere. Se una soluzione ha altre singolarità dipendenti dalle costanti di integrazione, queste potranno essere solamente poli "mobili".

Tra le circa 50 equazioni classificate, solo per le sei di Painlevé non si seppe trovare una riduzione ad equazioni già note. Dunque, solo queste sono candidate a definire nuove funzioni speciali. Effettivamente, alla fine degli anni 80 del XX secolo, Umemura [27] ha dimostrato che la soluzione generale di queste equazioni non è una funzione classica. Per funzione classica si intende una ottenuta da funzioni razionali mediante l'iterazione finita di certe operazioni classiche (il prendere le radici di polinomi i cui coefficienti sono funzioni razionali, producendo le funzioni algebriche, l'integrazione e la differenziazione di funzioni razionali e algebriche, la soluzione di equazioni differenziali lineari con coefficienti razionali, l'inversione di integrali). La soluzione generale di un'equazione differenziale lineare è quindi una funzione classica. Le soluzioni di equazioni di Painlevé definiscono invece una nuova classe di funzioni speciali, dette *trascendenti di Painlevé*.

Importanza delle equazioni di Painlevé

Ci si rese conto dell'importanza delle equazioni di Painlevé in fisica matematica quando apparve un lavoro di McCoy, Tracy, Wu e Barouch su Physical Review B nel 1976 [21]. Gli autori mostrarono che una funzione di correlazione nel modello di Ising, in un certo regime critico, si poteva ottenere come soluzione di una equazione PIII.

Da allora, le equazioni di Painlevé sono diventate uno strumento centrale in diversi campi della fisica matematica e della matematica pura, con applicazioni nello studio di equazioni delle onde non lineari "integrabili", quali l'equazione KdV, nella teoria delle matrici aleatorie (random matrices), nello studio dei polinomi ortogona-

li, in teoria dei numeri (distribuzione degli zeri della funzione zeta di Riemann), in geometria differenziale ed algebrica (per esempio le varietà di Frobenius), in problemi di combinatoria, in teorie dei campi quantistiche e topologiche e in relatività generale. Per una collezione di lezioni che coprono diversi aspetti si veda [5]. Tutti questi esempi possono pensarsi come sistemi non lineari dei quali si può studiare la soluzione globale, cioè sistemi "integrabili". Questa proprietà di integrabilità è spesso legata al fatto che le soluzioni sono ottenute riducendosi a equazioni di Painlevé, le quali sono esse stesse integrabili, nel senso precedentemente discusso, cioè godono delle proprietà di Painlevé; per cui ha senso studiare le proprietà globali dei trascendenti su un ricoprimento universale. Questo studio è praticamente fattibile col metodo che andremo ad illustrare nel seguito.

Integrazione delle equazioni di Painlevé

Occorre ancora ricordare una importante proprietà delle soluzioni di equazioni differenziali lineari. Come già detto, se i coefficienti $c_1(z), \dots, c_n(z)$ sono funzioni meromorfe, cioè funzioni con dei poli isolati in punti a_1, a_2, \dots, a_N e ∞ del piano complesso $\overline{\mathbb{C}}$ esteso all'infinito, allora la soluzione generale $y(z)$ sarà una funzione analitica sul ricoprimento universale di $\overline{\mathbb{C}} - \{a_1, \dots, a_N, \infty\}$. Di essa sappiamo esplicitamente scrivere il comportamento locale vicino ad ogni singolarità $z = a_j$, per ogni $j = 1, 2, \dots, N$, come funzione dipendente da n costanti di integrazione, che indicheremo con

$$\mathbf{I}_j = (I_{j,1}, \dots, I_{j,n}),$$

ove ogni $I_{j,k}$ è una costante in \mathbb{C} . Indicheremo la funzione che dà il comportamento locale con $F_j(z; \mathbf{I}_j)$, cioè

$$y(z) = F_j(z; \mathbf{I}_j).$$

La $F_j(z; \mathbf{I}_j)$ si sa rappresentare come combinazione di serie, potenze complesse di z ed esponenziali di z . Questa rappresentazione vale, di solito, solo per z vicino ad a_j . Per esempio, per

l'equazione ipergeometrica di Gauss

$$y'' + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\alpha + \beta - \gamma + 1}{z - 1} \right) y' + \left(\frac{\alpha\beta}{z - 1} - \frac{\alpha\beta}{z} \right) y = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C},$$

abbiamo, vicino al polo $z = 0$, la rappresentazione

$$y(z) = F(z; \mathbf{I}_0) := I_{0,1} \mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma; z) + I_{0,2} z^{1-\gamma} \mathcal{F}(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; z),$$

con le serie

$$\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma; z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n} z^n, \\ (\alpha)_n := \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1).$$

Nell'esempio qui sopra, la rappresentazione locale vale per z vicino a 0, precisamente per $|z| < 1$. Se $|z| \geq 1$, le serie divergono.

Supposte note le rappresentazioni locali $F_1(z; \mathbf{I}_1), F_2(z; \mathbf{I}_2), \dots, F_N(z; \mathbf{I}_N)$, per conoscere il comportamento globale della soluzione ci serve saper ottenere le costanti \mathbf{I}_k in funzione delle \mathbf{I}_j , per ogni $1 \leq j \neq k \leq N$. Per le equazioni lineari, si dimostra che esiste una relazione lineare $\mathbf{I}_k = \mathbf{I}_j C_{kj}$, dove C_{kj} è una matrice costante. Nel caso $n = 2$, si è stati in grado di calcolare esplicitamente C_{kj} (tutti questi valori sono tabulati nei manuali di funzioni speciali), grazie all'esistenza di rappresentazioni integrali $y(z) = \int_{\gamma} \varphi(z, t) dt$ lungo opportuni cammini γ , che possono valutarsi vicino a diversi punti singolari a_j e a_k . Per esempio, nel caso dell'equazione di Gauss ci sono diverse rappresentazioni integrali, una di queste essendo $\mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma; z) =$

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha} dt.$$

Il problema di trovare la relazione tra le costanti di integrazione è noto come *problema di connessione*. Le C_{jk} sono dette matrici di connessione.

Come nel caso lineare, risolvere una equazione di Painlevé significherà innanzitutto ottenere per una soluzione delle rappresentazioni locali esplicite, dette *comportamenti critici*, del tipo $y(z) = F_0(z, I_{0,1}, I_{0,2})$ vicino al punto critico $x = 0$, $y(z) = F_1(z, I_{1,1}, I_{1,2})$ vicino a $x = 1$ (se

l'equazione di Painlevé in questione lo ammette), e $y(z) = F_{\infty}(z, I_{\infty,1}, I_{\infty,2})$ vicino a ∞ . Queste rappresentazioni si possono ottenere con vari metodi asintotici, più o meno sofisticati. Per esempio, nel caso di PVI, si hanno espressioni del tipo (si veda [18])

$$F_0(z, I_{0,1}, I_{0,2}) = I_{0,1} z^{I_{0,2}} (1 + o(1)) \\ \text{per } z \rightarrow 0,$$

$$F_1(z, I_{1,1}, I_{1,2}) = 1 + I_{1,1} (1 - z)^{I_{1,2}} (1 + o(1)) \\ \text{per } z \rightarrow 1,$$

$$F_{\infty}(z, I_{\infty,1}, I_{\infty,2}) = I_{\infty,1} z^{I_{\infty,2}} (1 + o(1)) \\ \text{per } z \rightarrow \infty.$$

Qui, $o(1)$ indica termini che tendono a zero. Come altro esempio, si mostra (vedasi [1], [15]) che PII, con $\alpha = 0$, ha una famiglia di soluzioni $y_k(z)$, $k \in \mathbb{C}$, tali che

$$y_k(z) = \frac{k}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} (1 + o(1)) \\ \text{per } z \rightarrow +\infty,$$

Le stesse si comportano come segue per $z \rightarrow -\infty$ e $|k| < 1$

$$y_k(z) = C |z|^{-1/4} \sin \left(\frac{2}{3} |z|^{3/2} - \frac{3}{4} C^2 \log_e |z| + \phi \right) \\ + \text{termini che tendono a zero più di } z^{-1/4},$$

ove C e ϕ sono costanti, che devono dipendere da k . Inoltre

$$y_k(z) = \text{sign}(k) \sqrt{\frac{|z|}{2}}, \quad \text{per } |k| = 1.$$

In figura 2 è rappresentato il caso $k = 1$. Se $|k| > 1$, si hanno poli sull'asse reale negativo (si veda la figura 3). Il comportamento per $z \rightarrow \infty$ in \mathbb{C} è più complicato (si ricordi che $z = \infty$ è una singolarità essenziale), ed è stato studiato soprattutto da A. Kapaev (per una rassegna, si veda [7]).

Il secondo problema, il vero problema, sarà passare da proprietà locali a proprietà globali, cioè il problema di connessione. Dobbiamo

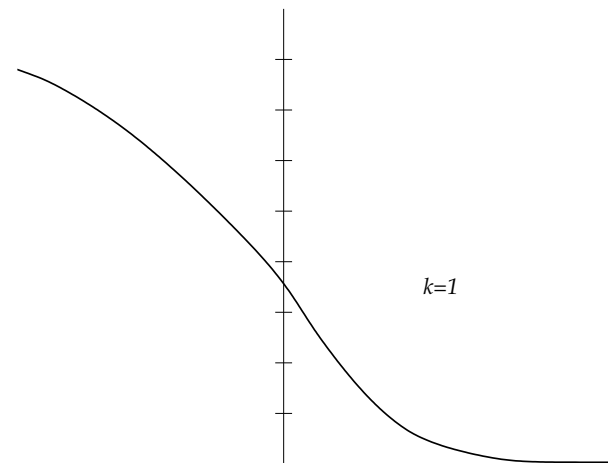


Figura 2: La soluzione $y_{k=1}(z)$ di $\text{PII}_{\alpha=0}$, per z sull'asse reale.

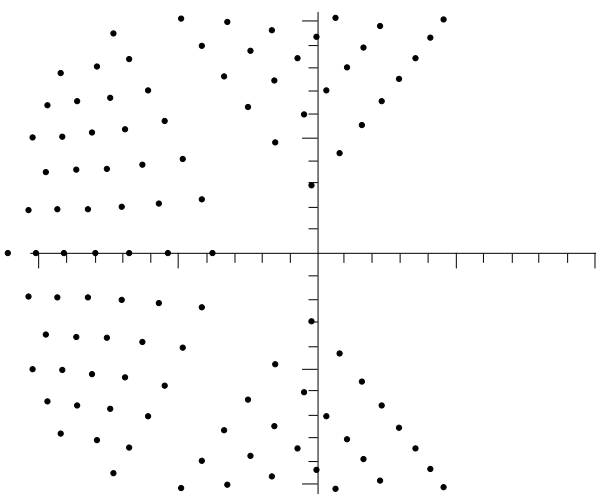


Figura 3: I poli di $y_{k=1,01}(z)$ nel piano complesso \mathbb{C} della variabile z . Ringrazio M. Bertola per avermi fornito questa figura, che appare in [4], dove è possibile trovare le figure relative ad altri valori di k .

trovare le relazioni

$$\begin{cases} I_{0,1} = f_1(I_{1,1}, I_{1,2}) \\ I_{0,2} = f_2(I_{1,1}, I_{1,2}) \end{cases}, \quad \begin{cases} I_{0,1} = g_1(I_{\infty,1}, I_{\infty,2}) \\ I_{0,2} = g_2(I_{\infty,1}, I_{\infty,2}) \end{cases}$$

che connettano le costanti di integrazione, espresse esplicitamente mediante funzioni elementari o classiche $f_1(\dots)$, $f_2(\dots)$, $g_1(\dots)$, $g_2(\dots)$. Nel particolare esempio dato per le soluzioni $y_k(z)$ di $\text{PII}_{\alpha=0}$, vorremmo anche avere la relazione tra C , ϕ e k . A causa della non linearità delle equazioni di Painlevé, il problema di connessione è stato per lungo tempo ritenuto irrisolvibile. Mancano infatti rappresentazioni integrali dei trascendenti di Painlevé.

Così come le equazioni di Painlevé sono nate

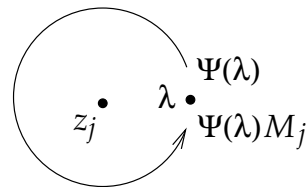


Figura 4: La trasformazione di monodromia $\Psi(\lambda) \mapsto \Psi(\lambda)M_j$ lungo un cammino intorno a z_j ; il cammino che circonda altri punti z_k per $k \neq j$.

all'inizio del '900 ma hanno trovato applicazioni diversi decenni dopo, anche le premesse alla risoluzione del problema di connessione risalgono al XIX secolo e all'inizio del '900. Possiamo farle risalire a Riemann, che si pose il seguente problema. Indichiamo ora con λ (e non z) la variabile in $\bar{\mathbb{C}} - \{z_1, \dots, z_N, \infty\}$, dove z_1, \dots, z_N sono punti assegnati. Riemann voleva costruire una funzione matriciale di dimensione $n \times n$, che qui denotiamo con $\Psi = \Psi(\lambda)$, con la proprietà che se si percorre un cammino che, come in figura 4, gira intorno a z_j , partendo da un certo λ e tornando in λ stesso, allora

$$\Psi(\lambda) \text{ si trasforma in } \Psi(\lambda)M_j$$

i.e. Ψ moltiplicata a sinistra da una matrice M_j , ove M_j è una matrice costante, detta *matrice di monodromia*. Ne consegue che se M_j non è la matrice identità, allora la Ψ ha un punto di diramazione in $\lambda = z_j$. Per inciso, si noti che in questo caso $\Psi(\lambda)$ è ben definita come funzione sul ricoprimento universale di $\bar{\mathbb{C}} - \{z_1, \dots, z_N, \infty\}$. Ci possono essere diversi tipi di punti di diramazione: il tipo algebrico o logaritmico, cioè $(\lambda - z_j)^L$, ove L è una matrice $n \times n$, così che il valore assoluto $|(\lambda - z_j)^L|$ cresce al più come una potenza di $(z - z_j)$ per $z \rightarrow z_j$; ed il tipo non incluso nel precedente, per esempio $(\lambda - z_j)^L \exp\{(z - z_j)^{-1}\}$, oppure $\exp\{(z - z_j)^{-1/2}\}$. Riemann si interessò al tipo algebrico o logaritmico. In questo caso, se la matrice Ψ ha qualche altra proprietà di invertibilità vicina a ogni z_j , si mostra che essa soddisfa un sistema differenziale lineare di dimensione $n \times n$, detto *fuchsiano*

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} = \left(\frac{A_1}{\lambda - z_1} + \frac{A_2}{\lambda - z_2} + \dots + \frac{A_N}{\lambda - z_N} \right) \Psi. \quad (1)$$

Riemann quindi si pose il problema, date M_1, \dots, M_N , di stabilire se esiste $\Psi(\lambda)$ con tali matrici di

monodromia e, inoltre, tale da soddisfare un sistema differenziale lineare fuchsiano come sopra. Ammesso che tale Ψ esista (in genere esiste, tranne alcune eccezioni: si veda [2]), essa dipenderà anche da $\mathbf{z} := (z_1, \dots, z_N)$. Bisogna allora capire come dipendono

$$\Psi = \Psi(\lambda, \mathbf{z})$$

e le matrici

$$A_1 = A_1(\mathbf{z}), \dots, A_N = A_N(\mathbf{z})$$

dai parametri \mathbf{z} , essendo le matrici di monodromia M_1, \dots, M_N costanti indipendenti da \mathbf{z} . Il problema fu ripreso da R. Fuchs, R. Garnier e L. Schlesinger all'inizio del '900. Schlesinger mostrò in [26] che la condizione che le M_1, \dots, M_N restino fisse, mentre \mathbf{z} varia, equivale al fatto che le matrici $A_j(\mathbf{z})$ soddisfino un sistema di equazioni differenziali non lineare (le *equazioni di Schlesinger*)

$$\frac{\partial A_j}{\partial z_k} = \frac{A_j A_k - A_k A_j}{z_j - z_k} \quad j \neq k,$$

$$\frac{\partial A_k}{\partial z_k} = - \sum_{j \neq k} \frac{A_k A_j - A_j A_k}{z_k - z_j}.$$

Fuchs [8] [9] e Garnier [12] mostrarono anche che le condizioni che opportune equazioni scalari $\frac{d\psi}{d\lambda^2} = p(\lambda, z)\psi$ dipendenti da un parametro z abbiano monodromia indipendente dal parametro z conducevano ad equazioni di Painlevé.

Riprendendo questi approcci, nel 1981, M. Jimbo, T. Miwa e K. Ueno sistematicamente svilupparono in [19] la teoria delle *deformazioni isomonodrome*, come segue. Consideriamo un sistema differenziale lineare $n \times n$

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} = A(\lambda, z_1, \dots, z_m)\Psi,$$

in cui la matrice A , di dimensione $n \times n$, dipende da λ in modo razionale, con dei poli in punti $\lambda = z_1, \dots, z_N, \infty$. Inoltre, dipende analiticamente da altri parametri, inclusi i poli stessi, parametri che indicheremo con $z_1, \dots, z_m, m \geq N$. Una soluzione matriciale $\Psi(\lambda, \mathbf{z})$ (con determinante non nullo) è ben definita se si considera λ sul ricoprimento universale di $\overline{\mathbb{C}} - \{z_1, \dots, z_N, \infty\}$. Anche in questo caso generale, lungo un cammino che gira intorno ad z_j in $\overline{\mathbb{C}} - \{z_1, \dots, z_N, \infty\}$,

la Ψ si trasforma in ΨM_j , ove M_j è una matrice di monodromia. Jimbo, Miwa e Ueno hanno ottenuto la condizione necessaria e sufficiente affinché la deformazione sia *isomonodroma*, cioè affinché le matrici di monodromia siano indipendenti dai *parametri di deformazione* z_1, \dots, z_m (volendo essere rigorosi, dovremmo studiare in dettaglio la struttura di Ψ , così da determinare un insieme di dati matriciali che servono per costruire M_1, \dots, M_N , detti dati di monodromia; sono essi che devono rimanere indipendenti da z_1, \dots, z_m). Tale condizione è che $A(\lambda, z_1, \dots, z_m)$ soddisfi un sistema non lineare di equazioni differenziali

$$\frac{\partial A}{\partial z_j} - \frac{\partial \Omega_j}{\partial \lambda} = \Omega_j A - A \Omega_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

dove le $\Omega_j(\lambda, z_1, \dots, z_m)$ sono matrici $n \times n$ che dipendono razionalmente dagli elementi di matrice di A , sicché il sistema non-lineare è un sistema su A . Per esempio, se A è come in (1), allora $\Omega_j = -A_j/(z - z_j)$ e il sistema diventa le equazioni di Schlesinger.¹

Jimbo e Miwa in [20] hanno fornito una lista di sei sistemi 2×2 ($n = 2$), per una opportuna scelta di $A(\lambda, z)$ (qui abbiamo solo $z_1 = z$), tali che le (2) si riducono alle sei equazioni di Painlevé. Per esempio, si ottiene PI se

$$A(\lambda, z) = A_2 \lambda^2 + A_1(z)\lambda + A_0(z),$$

con opportuna scelta di A_0, A_1, A_2 . Se

$$A(\lambda, z) = \frac{A_1(z)}{\lambda} + \frac{A_2(z)}{\lambda - z} + \frac{A_3(z)}{\lambda - 1}$$

si ottiene PVI. Si mostra che gli elementi della matrice $A(\lambda, z)$ sono funzioni di z sia esplicitamente, sia attraverso una dipendenza razionale da $y, dy/dz$ e $\int y$, ove y è soluzione dell'equazione di Painlevé in questione. Quindi, possiamo scrivere

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} = A(\lambda, z, y(z))\Psi. \quad (3)$$

¹Si noti che (2) è la condizione di compatibilità, e quindi integrabilità (questa volta, secondo Frobenius), della così detta *coppia di Lax*

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} = A(\lambda, z_1, \dots, z_m)\Psi,$$

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial \Psi}{\partial z_j} dz_j = \sum_{j=1}^m \Omega_j(\lambda, z_1, \dots, z_m)\Psi dz_j.$$

La teoria delle deformazioni isomonodrome ha permesso di risolvere il problema di connessione per le equazioni di Painlevé, con il *metodo delle deformazioni isomonodrome*. Consideriamo $y(z) = F_0(z, I_{0,1}, I_{0,2})$ vicino al punto critico $z = 0$. Il termine dominante di $F_0(z, I_{0,1}, I_{0,2})$ per $z \rightarrow 0$ è una funzione elementare o classica di $(z, I_{0,1}, I_{0,2})$. Sostituiamo $F_0(z, I_{0,1}, I_{0,2})$ in (3) e prendiamo il limite per $z \rightarrow 0$ del sistema

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} = A(\lambda, z, F_0(z, I_{0,1}, I_{0,2}))\Psi, \quad (4)$$

(a volte, servono opportuni riscaldamenti di Ψ e λ , ma omettiamo questo dettaglio tecnico). Si ottiene un sistema limite più semplice, indipendente da z

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} = A(\lambda, I_{0,1}, I_{0,2})\Psi.$$

Di questo sistema più semplice si riescono a calcolare le matrici di monodromia, che collettivamente indichiamo con \mathbf{M} . Infatti, si mostra che il sistema più semplice è risolto classicamente, cioè si riduce a una equazione differenziale del secondo ordine risolubile con funzioni speciali classiche. In questo modo, possiamo calcolare la formula esplicita

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(I_{0,1}, I_{0,2}),$$

che esprime la monodromia come funzione elementare o trascendente classica di $(I_{0,1}, I_{0,2})$. Invertiamo poi le formule (si dimostra che ciò è possibile), ottenendo

$$I_{0,1} = I_{0,1}(\mathbf{M}), \quad I_{0,2} = I_{0,2}(\mathbf{M}).$$

Ora, il punto cruciale è che il sistema (3) è isomonodromo! Dunque, la monodromia non dipende da z , così che quando $z \rightarrow 0$ le matrici di monodromia non cambiano. Ne consegue che il risultato $\mathbf{M}(I_{0,1}, I_{0,2})$ ottenuto è la monodromia di (4) e (3), associata a $y(z)$.

La *medesima* soluzione y ha una rappresentazione vicino ad un altro punto critico, per esempio $z = \infty$, della forma $y(z) = F_\infty(z, I_{\infty,1}, I_{\infty,2})$. Ripetiamo la stessa procedura e otteniamo

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(I_{\infty,1}, I_{\infty,2}).$$

Per la proprietà di isomonodromia, quella ottenuta è la monodromia del sistema (3) associa-

ta alla medesima $y(z)$. Dunque, il problema di connessione è risolto, avendo ottenuto

$$I_{0,1} = I_{0,1}(\mathbf{M}(I_{\infty,1}, I_{\infty,2})),$$

$$I_{0,2} = I_{0,2}(\mathbf{M}(I_{\infty,1}, I_{\infty,2})).$$

Queste sono proprio le formule di connessione cercate

$$\begin{cases} I_{0,1} = g_1(I_{\infty,1}, I_{\infty,2}), \\ I_{0,2} = g_2(I_{\infty,1}, I_{\infty,2}). \end{cases}$$

La costruzione seguita fa uso di sistemi differenziali lineari risolti da funzioni classiche, la cui monodromia dipende in modo classico dai coefficienti del sistema. Segue che g_1 e g_2 sono funzioni classiche. Abbiamo così un risultato notevole: benché un trascendente di Painlevé sia una funzione nuova e altamente trascendente, le formule di connessione sono esplicitamente scritte usando funzioni classiche. Per esempio, nel caso delle soluzioni $y_k(z)$ per $\text{PII}_{\alpha=0}$, si trova $C^2 = -\pi^{-1} \log_e(1 - k^2)$, e una espressione un po' più complicata $\phi = \phi(k)$.

Le vere costanti di integrazioni delle equazioni di Painlevé sono i dati di monodromia del sistema lineare (3) associato. Si tratta di vere e proprie "costanti del moto", quando le equazioni di Painlevé vengano scritte come sistemi dinamici hamiltoniani. A questo proposito, ricordiamo che le equazioni di Painlevé possono sempre essere scritte come sistemi hamiltoniani dipendenti dal tempo. Per esempio, PI è un sistema hamiltoniano per

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2} - 2q^3 - tq,$$

così che

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = 6q^2 + t \quad \implies \quad \ddot{q} = 6q^2 + t$$

L'ultima equazione è proprio PI, con $z = t$ e $y(z) = q(t)$. Questo fatto ci permette un'ultima considerazione sui tipi di integrabilità. Un sistema hamiltoniano classico con variabili canoniche $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ è integrabile secondo Liouville se ammette n costanti del moto indipendenti ed in involuzione. Le hamiltoniane $H(q, p, t)$ dipendenti da t delle equazioni di Painlevé non sono integrabili secondo Liouville. Tuttavia, le equazioni del moto sono integrabili nel senso di

Painlevé discusso in questo articolo.²

Il metodo di deformazione isomonodroma è stato notevolmente affinato. Oggi, con il metodo di *non-linear steepest descent* (si veda il lavoro originale di Deift e Zhou [6], dopo del quale vi è stata una proliferazione di lavori e applicazioni; per una rassegna delle applicazioni alle equazioni di Painlevé si veda [7]) è possibile partire dal dato \mathbf{M} e costruire il sistema (3) nel regime asintotico $z \rightarrow c \in \{0, 1, \infty\}$. In questo modo, si ottiene costruttivamente il comportamento critico $y(z) = F_c(z, I_{c,1}, I_{c,2})$ senza bisogno di ricavarlo preliminarmente o ipotizzarlo con un *ansatz*. Contemporaneamente, si ottengono le formule esplicite $I_{c,j} = I_{c,j}(\mathbf{M})$, $j = 1, 2$.

Per concludere questa discussione, va ricordato che le funzioni di Painlevé non sono forse l'oggetto più naturale da studiare nell'approccio isomonodromo. Infatti, possono essere generate derivando rispetto a z il logaritmo di una funzione introdotta in [19], chiamata funzione $\tau(z)$. Malgrange e Miwa hanno dimostrato che quest'ultima ha prolungamento analitico sul ricoprimento universale di $\bar{\mathbb{C}}$ meno i punti critici fissi delle equazioni di Painlevé. Il prolungamento ha zeri isolati "mobili", cioè che dipendono dalle costanti di integrazione. Essi corrispondono ai poli mobili dei trascendenti di Painlevé. Dunque, la formulazione delle equazioni di Painlevé, quali condizioni di isomonodromia, permette di dimostrare in chiave moderna, usando la funzione τ , la proprietà di Painlevé.

Conclusione

Le equazioni di Painlevé, introdotte all'inizio del '900 nella classificazione delle equazioni non lineari, in grado di definire funzioni speciali su un ricoprimento universale, sono diventate il cardine della fisica matematica contemporanea, alla base della teoria dei sistemi integrabili. La loro integrabilità, cioè la possibilità di ottenere il comportamento globale delle soluzioni su uno spazio di ricoprimento universale fissato dall'e-

²È curioso osservare che sistemi integrabili secondo Liouville possono non esserlo secondo Painlevé. Per esempio, data l'hamiltoniana integrabile secondo Liouville $H(q, p) = p^2/2 + q^k$, con $k \geq 4$ intero, le soluzioni $q(t)$ delle equazioni del moto, che si ottengono integrando $\dot{q}^2/2 + q^k = E$ costante, non hanno la proprietà di Painlevé (t va vista come variabile complessa).

quazione, è garantita dalla proprietà di Painlevé, e si realizza concretamente mediante il metodo di deformazione isomonodroma. Questo metodo sostituisce il metodo delle rappresentazioni integrali per le equazioni lineari.

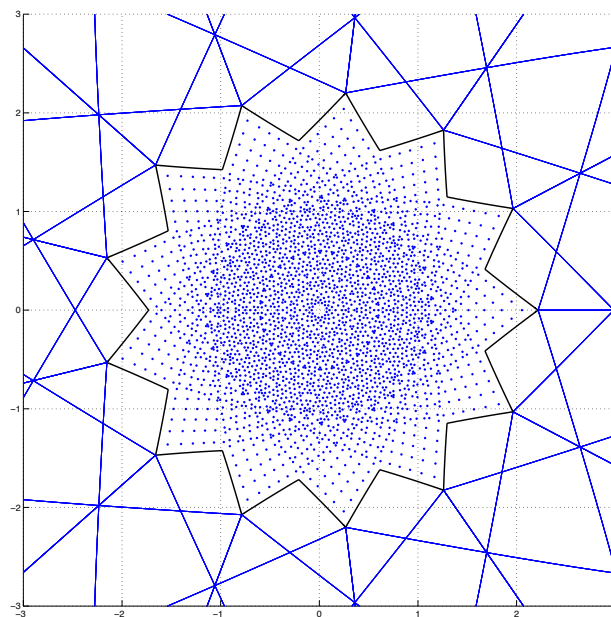


Figura 5: Poli (all'interno della regione delimitata da linee nere) di una delle soluzioni razionali di una gerarchia di equazioni integrabili, che generalizza PII. Ringrazio M. Bertola per la figura, che si può trovare in [3]. Le linee blu non hanno solo funzioni estetiche, avendo un significato tecnico per l'analisi delle soluzioni, per il quale si rimanda a [3].

Alla fine del XX secolo e nei primi anni del XXI, i problemi di connessione sono stati sostanzialmente risolti. Grossi contributi sono stati dati da Andrei Kapaev (per una dettagliata discussione dei riferimenti bibliografici e di tutti i metodi sopra esposti, particolarmente per PI, PII, ..., PV, si veda il testo [7]; per dettagli relativi a PVI, si veda [14]). Recentemente, è stata ottenuta una rappresentazione della funzione τ come serie i cui coefficienti sono tutti calcolabili in forma chiusa, essendo essi i blocchi conformi in teoria conforme dei campi (tra i vari articoli, si può vedere [10]).

Va anche ricordato che le equazioni di Painlevé ammettono generalizzazioni di ordine superiore, organizzate in gerarchie di equazioni integrabili. Anch'esse appaiono nelle applicazioni ricordate in questo scritto. Un linea di ricerca attuale consiste nello studio di un'altra proprietà globale delle equazioni di Painlevé e delle gerarchie,

cioè la distribuzione dei poli (figura 3) e degli zeri mobili di soluzioni (questo studio fu iniziato agli inizi del secolo XX, da P. Boutroux) e delle loro simmetrie (si veda la figura 5). Vanno poi ricordati gli studi per il calcolo numerico di varie proprietà dei trascendenti, in piena esplorazione.

I trascendenti di Painlevé possono ora considerarsi funzioni speciali “note”. La comunità internazionale ha lanciato il così detto *Painlevé Project*, per raccogliere e tabulare tutte le proprietà dei trascendenti, in tavole e manuali, così come è stato fatto per le funzioni trascendenti classiche. Si tratta di un progetto ambizioso. Il progetto è stata iniziato in un capitolo di NIST Digital Library of Mathematical Functions (<http://dlmf.nist.gov>). Per l'equazione PII e PIII, vari risultati sono raccolti in [7], e per PVI nelle tavole di [13]. Il lavoro più grande è da farsi.

Concludiamo, a riassumere la filosofia seguita nella costruzione di nuove funzioni speciali, citando Charles Briot et Jean-Claude Bouquet (1859): *Les cas où l'on peut intégrer une équation différentielle sont extrêmement rares, et doivent être regardés comme des exceptions; mais on peut considérer une équation différentielle comme définissant une fonction, et se proposer d'étudier les propriétés de cette fonction sur l'équation différentielle elle-même.*



[1] M. J. Ablowitz, H. Segur: “Asymptotic solutions of the Korteweg-de Vries equation”, *Stud. Appl. Math.* **57** (1977) 13-44.

[2] D.V.Anosov - A.A.Bolibrukh: *The Riemann-Hilbert Problem. Aspects of Mathematics E22*. Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig (1994).

[3] F. Balogh, M. Bertola, T. Bothner: “Hankel Determinant Approach to Generalized Vorob'ev-Yablonski Polynomials and Their Roots”, *Constr. Approx.* **44** (2016) 417-453.

[4] M. Bertola: “On the location of poles for the Ablowitz? Segur family of solutions to the second Painlevé equation”, *Nonlinearity* **25** (2012) 1179–1185.

[5] R. Conte (editor): *The Painlevé property. One century later*. CRM series in Mathematical Physics, Springer, Berlino (1999).

[6] P. A. Deift, X Zhou: “A steepest descent method for oscillatory Riemann-Hilbert problems. Asymptotics for the MKdV equation”, *Ann. of Math.* **137** (1993) 295-368..

[7] A. Fokas, A. Its, A. Kapaev, V. Novokshenov: *Painlevé Transcendents: The Riemann-Hilbert Approach*. AMS, New York (2006).

[8] R. Fuchs: “Sur quelques équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme.”, *C. R. Acad. Sc. Paris* **145** (1905) 555-558.

[9] R. Fuchs: “Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegene wesentlich singuläre Stellen.”, *Math. Ann.* **63** (1907) 301-321.

[10] Gamayun, N. Iorgov, O. Lisovyy, O: “How instanton combinatorics solves Painlevé VI, V and IIIs”, *J. Phys. A* **46** (2013) 335203, 29 pp.

[11] B. Gambier: “Sur les équations différentielles du seconde ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes.”, *Tesi* (1909); *Acta Math.* **33** (1910) 1-55.

[12] R. Garnier: “Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes”, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* **29** (1912) 1-126.

[13] D. Guzzetti: “Tabulation of Painlevé 6 Transcendents”, *Nonlinearity* **25** (2012) 3235-3276.

[14] D. Guzzetti: “A review of the sixth Painlevé equation.”, *Constr. Approx.* **41** (2015) 495-527.

[15] S. P. Hastings, J. B. McLeod: “A boundary value problem associated with the second Painlevé transcendent and the Korteweg-de Vries equation”, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **73** (1980) 31-51.

[16] E. L. Ince: *Ordinary differential equations*. Dover, New York (1956).

[17] K.Iwasaki, H.Kimura, S.Shimomura, M.Yoshida: *From Gauss to Painlevé. Aspects of Mathematics, 16*, Springer (Berlino). 1991

[18] M.Jimbo: “Monodromy Problem and the Boundary Condition for Some Painlevé Transcendents”, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **18** (1982) 1137-1161.

[19] M.Jimbo, T.Miwa, K.Ueno: “Monodromy Preserving Deformations of Linear Ordinary Differential Equations with Rational Coefficients (I)”, *Physica D2* (1981) 306.

[20] M.Jimbo, T.Miwa: “Monodromy Preserving Deformations of Linear Ordinary Differential Equations with Rational Coefficients (II)”, *Physica D2* (1981) 407-448.

[21] T. T. Wu, B. M. McCoy, C. A. Tracy, E. Barouch: “Spin-spin correlation functions for the two-dimensional Ising model: Exact theory in the scaling region”, *Phys. Rev. B* **13** (1976) 316-374.

[22] NIST Digital Library of Mathematical Functions <http://dlmf.nist.gov>

[23] P. Painlevé: “Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme.”, *Bull. Soc. Math. France* **28** (1900) 201-261.

[24] P. Painlevé: “Sur les équations différentielles du seconde ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme.”, *Acta Math.* **25** (1902) 1-85.

- [25] P. Painlevé: “Sur les équations différentielles du seconde ordre à points critiques fixes.”, *C. R. Acad. Sc. Paris* **143** (1906) 1111-1117.
- [26] L. Schesinger: “Über eine Klasse von Differential-systemen beliebiger Ordnung mit festen kritischen Punkten”, *J. Reine Angew. Math.* **141** (1912) 96 -145.
- [27] H.Umemura: “ On the Irreducibility of the First Differential Equation of Painlevé”, *Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honour of Masayoshi Nagata.Tokyo: Kinokuniya* (1987) 771-789.



Davide Guzzetti: È Professore Associato presso la SISSA, Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati di Trieste, nel gruppo di sistemi integrabili dell'Area di Matematica. Ha lavorato al RIMS (Kyoto University) e KIAS (Seoul) e poi in SISSA, occupandosi di analisi asintotica, equazioni di Painlevé, deformazioni isomonodrome e teoria analitica di varietà di Frobenius. Si è occupato anche di sistemi dinamici quantistici, in collaborazione con il “Center for Nonlinear and Complex Systems”, Dipartimento di Fisica e Matematica, Università degli Studi dell'Insubria.

Solitoni e Triangolazioni

Triangulations and solitons

Yuji Kodama *Department of Mathematics, Ohio State University, Columbus, USA*

Trovare connessioni tra aree differenti della Matematica è un fatto interessante. In questo articolo mostreremo una connessione elementare, ma notevole, tra la triangolazione di poligoni e le configurazioni di onde prodotte dalle soluzioni solitoniche dell'equazione di Kadomtsev-Petviashvili (KP). L'equazione di KP descrive onde di superficie in acque poco profonde, e la connessione qui analizzata potrebbe fornire una descrizione combinatoriale delle figure a rete che spesso osserviamo su ogni spiaggia con un fondo abbastanza piatto.

L'equazione KP e le soluzioni solitoniche

Cominciamo a dare delle informazioni di base sull'equazione KP e le sue soluzioni solitoniche, chiamate KP-solitoni. L'equazione KP è un'equazione differenziale non lineare dispersiva e bidimensionale data da

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-4 \frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

dove $u = u(x, y, t)$ rappresenta l'ampiezza

It is quite interesting to find a connection between several different areas of mathematical sciences. In this paper, we explain an elementary but interesting connection between the triangulations of polygons and wave patterns generated by the soliton solutions of the Kadomtsev-Petviashvili (KP) equation. The KP equation describes surface waves in shallow water, and the connection discussed here may provide a combinatorial description of web-like patterns we often observed at any beach with nearly flat bottom.

The KP equation and soliton solutions

Let us first provide a background information on the KP equation and its soliton solutions, called the KP solitons. The KP equation is a two-dimensional nonlinear dispersive wave equation given by

where $u = u(x, y, t)$ represents the wave am-



Figura 1: Onde di superficie, costituite da treni d'onde quasi-solitonici in acque basse. L'interazione di tali onde può essere descritta tramite l'equazione di Kadomtsev-Petviashvili. Foto scattata al Phares des Baleines, nel punto più occidentale dell' Île de Ré sulla sponda atlantica della Francia. Autore Michel Griffon, 2010-01-02.

d'onda nel piano xy ad un dato tempo t . L'equazione KP fu proposta per la prima volta per studiare la stabilità della soluzione mono-solitonica dell'equazione di Korteweg - de Vries (KdV) sotto l'influenza di una piccola perturbazione trasversale [1]. L'equazione può anche essere derivata dall'equazione di Eulero in 3 dimensioni per un fluido irrotazionale incompressibile, assumendo che si voglia descrivere la propagazione di onde di piccola ampiezza, nelle approssimazioni di grande lunghezza d'onda e di quasi bi-dimensionalità (si veda per esempio [2, 3]).

In questo breve articolo esprimiamo la soluzione u tramite una nuova funzione, chiamata funzione τ (per approfondimenti sul metodo di bilinearizzazione di Hirota si veda ad esempio [4]), nella forma seguente

$$u(x, y, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \tau(x, y, t). \quad (2)$$

La funzione τ soddisfa l'equazione bilineare

plitude on the xy -plane for fixed time t . The KP equation was first proposed to study the stability of one-soliton solution of the KdV equation under the influence of weak transverse perturbations [1]. The equation can be also derived from the three-dimensional Euler equation for an irrotational and incompressible fluid under the assumptions that it describes wave propagation of small amplitude, long wavelength and quasi-two dimensional approximations (see e.g. [2, 3]).

In this short note, we consider the solution u in the following form with a new function τ , called the τ -function (see e.g. [4]),

The τ -function then satisfies the bilinear equation

$$P(D_x, D_y, D_t)\tau \cdot \tau := (-4D_x D_t + D_x^4 + 3D_y^2)\tau \cdot \tau = 0, \quad (3)$$

dove D_z^n indica la derivata di Hirota, che è definita da

$$D_z^n f \cdot g := \frac{\partial^n}{\partial s^n} f(z+s)g(z-s) \Big|_{s=0}.$$

Osservazione 1 Per piccoli valori di u si può trascurare il termine quadratico in (1) e dalla parte lineare residua si ricava la relazione di dispersione della KP, che si esprime nella forma

$$P(p, q, \omega) = -4p\omega + p^4 + 3q^2 = 0,$$

che viene soddisfatta anche introducendo la parametrizzazione

$$p = \kappa_i - \kappa_j, \quad q = \kappa_i^2 - \kappa_j^2, \quad \omega = \kappa_i^3 - \kappa_j^3, \quad (4)$$

qualunque siano le costanti κ_i and κ_j . È quindi facile vedere che una soluzione dell'equazione (3) è data dalla semplice funzione

$$\tau(x, y, t) = \sum_{i=1}^M a_i e^{\theta_i(x, y, t)} \quad \text{con/with} \quad \theta_i(x, y, t) = \kappa_i x + \kappa_i^2 y + \kappa_i^3 t.$$

Si noti che per l'Osservazione 1 si ha

$$P(D_x, D_y, D_t)e^{\theta_i} \cdot e^{\theta_j} = 0.$$

Inoltre e senza perdere di generalità, noi qui assumiamo che i parametri κ_i siano ordinati secondo la relazione

$$\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_M.$$

Notiamo ora che se valesse sempre $a_i > 0$, avremmo $\tau > 0$, cioè la soluzione u è regolare. Nel caso in cui la funzione τ abbia solo due termini esponenziali, cioè $\tau = a_i e^{\theta_i} + a_j e^{\theta_j}$, si ottiene la soluzione mono-solitonica

$$u(x, y, t) = \frac{(\kappa_i - \kappa_j)^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \tilde{\theta}_{[i, j]}(x, y, t) \right) \quad \text{con/with} \quad \tilde{\theta}_{[i, j]} = \theta_i - \theta_j + \ln \frac{a_i}{a_j}. \quad (5)$$

Denotiamo con $[i, j]$, dove $i < j$, l'indicatore di questo tipo di solitone, che chiameremo $[i, j]$ -solitone. Osserviamo che l' $[i, j]$ -solitone è localizzato lungo la linea $\tilde{\theta}_{[i, j]}(x, y, t) = 0$ nel piano xy .

Per le soluzioni solitoniche generali, la funzione τ è data dal determinante Wronskiano (si veda [4, 5, 6, 7, 8]), quindi

where D_z^n is the Hirota derivative defined by

Remark 1 The dispersion relation of the KP equation is given by

which has the following parametrization

with arbitrary constants κ_i and κ_j .

It is then easy to see that the following simple function gives a solution

Note that

$$P(D_x, D_y, D_t)e^{\theta_i} \cdot e^{\theta_j} = 0$$

from Remark 1.1. Without loss of generality, we here assume the order in the κ_i -parameters as

Note here that if all $a_i > 0$, we have $\tau > 0$ i.e. the solution is regular. One soliton solution is obtained in the case where the τ -function has only two exponential terms, i.e. $\tau = a_i e^{\theta_i} + a_j e^{\theta_j}$,

We let $[i, j]$ with $i < j$ denote the index pair for this type of soliton and call it $[i, j]$ -soliton. Note that the $[i, j]$ -soliton is localized along the line $\tilde{\theta}_{[i, j]}(x, y, t) = 0$ in the xy -plane.

For the general soliton solutions, the τ -function is given by the Wronskian determinant (see e.g. [4, 5, 6, 7, 8]), i.e.,

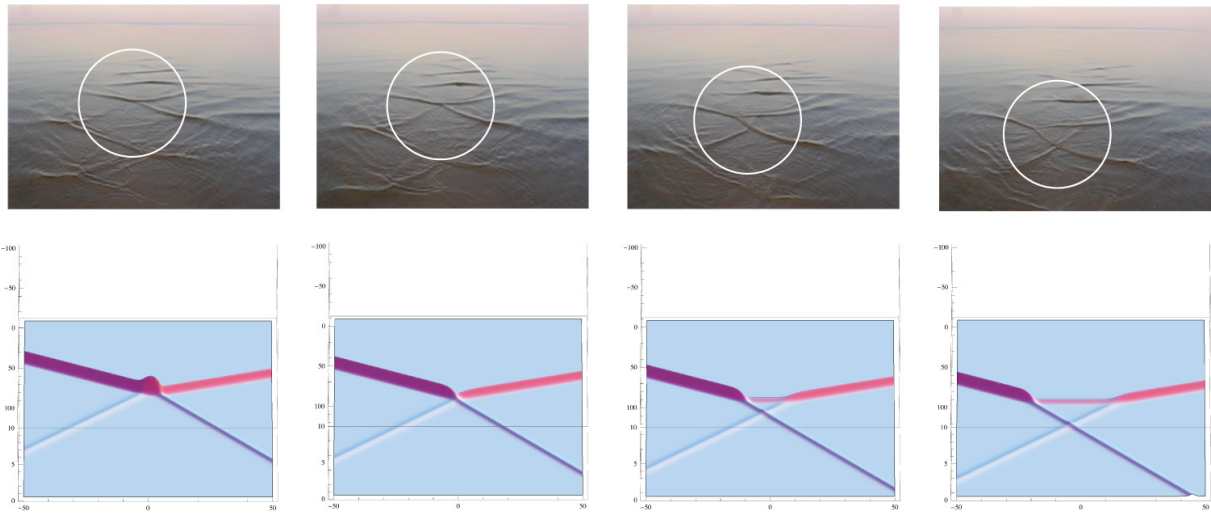


Figura 2: Evoluzione di un gruppo di onde nel lago Peipsi, in Estonia. Tale configurazione ondosa corrisponde ad una soluzione particolare dell'equazione di KP, denominata solitone $Gr(2,4)$ con derangement $\pi = (2413)$ come verrà spiegato nel testo. La sequenza fotografica è tratta da un video ripreso e cortesemente ricevuto dalla Dr.ssa Ira Didenkulova, Università Tecnologica di Tallin (Estonia). *Waves in Lake Peipsi, Estonia and the corresponding KP soliton from $Gr(2,4)$ with the derangement $\pi = (2413)$. (Snapshot from a video courtesy of Ira Didenkulova)*

$$\tau = \text{Wr}(f_1, \dots, f_N) = \det \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_N \\ \partial_x f_1 & \dots & \partial_x f_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_x^{N-1} f_1 & \dots & \partial_x^{N-1} f_N \end{pmatrix}$$

dove le funzioni $f_i = f_i(x, y, t)$ sono date da

where $f_i = f_i(x, y, t)$ are given by

$$(f_1, \dots, f_N) = (E_1, \dots, E_M)A^T \quad \text{con/with} \quad E_j = \exp(\kappa_j x + \kappa_j^2 y + \kappa_j^3 t), \quad (6)$$

mentre $A = (a_{ij})$ è una matrice costante $N \times M$ con $N < M$, con A^T la sua trasposta. Quindi, usando il lemma di Cauchy-Binet per il calcolo dei determinanti e le (6), la funzione τ può essere espressa come somma di termini esponenziali:

where $A = (a_{ij})$ is an $N \times M$ constant matrix with $N < M$, and A^T is its transpose. Then using the Cauchy-Binet lemma for the determinant, the τ -function with (6) can be expressed as a sum of exponential terms:

$$\tau(x, y, t) = \text{Wr}(f_1, \dots, f_N) = \sum_{I \in \binom{[M]}{N}} \Delta_I(A) K_I \exp(\Theta_I(x, y, t)), \quad (7)$$

dove si indica con $I = \{i_1, \dots, i_N\}$ un N -indice e con $\binom{[M]}{N}$ l'insieme di tutti tali sotto-insiemi dell'insieme numerico $[M] := \{1, \dots, M\}$ e, infine, $K_I = \prod_{j>l} (\kappa_{i_j} - \kappa_{i_l}) > 0$. Inoltre il coefficiente $\Delta_I(A)$ è il minore $N \times N$ della matrice A con le colonne fissate dall' N -indice I , mentre l'esponente $\Theta_I(x, y, t)$ è dato da

where $I = \{i_1, \dots, i_N\}$, and $\binom{[M]}{N}$ denotes the set of all N -index subsets of the number set $[M] := \{1, \dots, M\}$, and $K_I = \prod_{j>l} (\kappa_{i_j} - \kappa_{i_l}) > 0$. Here the coefficients $\Delta_I(A)$ is the $N \times N$ minor of the matrix A with the columns labeled by the index set I , and the exponent $\Theta_I(x, y, t)$ is given by

$$\Theta_I(x, y, t) = \sum_{i \in I} \theta_i(x, y, t) = p_I x + q_I y + \omega_I t, \quad (8)$$

con/where $p_I = \sum_{i \in I} \kappa_i, \quad q_I = \sum_{i \in I} \kappa_i^2, \quad \omega_I = \sum_{i \in I} \kappa_i^3.$

È stato mostrato in [9] che la funzione τ è positiva per ogni (x, y, t) (quindi la soluzione u è regolare) se e solo se $\Delta_I(A) \geq 0$ per tutti gli N -indici I . In questo caso, la matrice A è detta *totalmente non negativa* (TNN) [10].

Nei precedenti lavori [6, 9, 11, 12], è stato mostrato che la soluzione solitonica (2) della KP con la funzione τ data in (7) consiste in N solitoni distinti quando $y \gg 0$, mentre di soli $M - N$ solitoni come $y \ll 0$. Ognuno di questi solitoni asintotici è parametrizzato in maniera univoca da una coppia $\{\kappa_i, \kappa_j\}$, con $i < j$, e quindi corrisponde all' $[i, j]$ -solitone.

La coppia $\{i, j\}$ è univocamente caratterizzata da una mappa π tale che $\pi(i) = j$ se l' $[i, j]$ -solitone appare a $y \gg 0$, mentre $\pi(j) = i$ se l' $[i, j]$ -solitone si manifesta a $y \ll 0$. Quindi la mappa π risulta essere una permutazione senza punto fisso, o *derangement* (anche dismutazione), dell'insieme di indici $\{1, \dots, M\}$. È stato quindi dimostrato [10] che ogni *derangement* può essere usato per parametrizzare una matrice A di tipo TNN. Quindi anche la struttura asintotica di un solitone KP generato da una matrice A TNN è completamente determinata dal corrispondente *derangement* (si veda [13] per una disanima dell'argomento).

Osservazione 2 L'equazione di KP ammette un numero infinito di flussi in commutazione ed essi definiscono una struttura detta *gerarchia di KP*. Si denotino con $\{t_n : n = 1, 2, \dots\}$ i parametri di flusso. Allora la funzione τ per la gerarchia di KP è data dalla stessa forma che compare nell'equazione (7) (si veda [13, 14]). Ponendo $t_1 = x, t_2 = y, t_3 = t$ e i restanti t_n per i flussi superiori, ognuna delle f_i soddisfa ora il sistema di equazioni lineari

$$\frac{\partial f_i}{\partial t_n} = \frac{\partial^n f_i}{\partial x^n} \quad \text{per/for} \quad n = 1, 2, \dots$$

It was then shown in [9] that the τ -function is positive for all (x, y, t) (i.e. the solution is regular) if and only if $\Delta_I(A) \geq 0$ for all the N -element subset I . In this case, the matrix A is called a *totally nonnegative* (TNN) matrix [10].

In the previous works [6, 9, 11, 12], it was shown that the KP soliton solution (2) with the τ -function (7) consists of N solitons as $y \gg 0$ and $M - N$ solitons as $y \ll 0$. Each of those asymptotic solitons is uniquely parametrized by a pair $\{\kappa_i, \kappa_j\}$ for $i < j$, and is denoted as the $[i, j]$ -soliton.

The pair $\{i, j\}$ is uniquely characterized by a map π such that $\pi(i) = j$ if the $[i, j]$ -soliton appears at $y \gg 0$, and $\pi(j) = i$ if the $[i, j]$ -soliton appears at $y \ll 0$. The map π turns out to be a fixed-point free permutation or *derangement* of the index set $\{1, \dots, M\}$. It was shown in [10] that each *derangement* can be used to parameterize a TNN matrix A . That is, the asymptotic structure of the KP soliton generated by a TNN matrix A is completely determined by the corresponding *derangement*. (See [13] for a survey of these results.)

Remark 2 The KP equation admits an infinite number of commuting flows, and these flows all together define the *KP hierarchy*. Let $\{t_n : n = 1, 2, \dots\}$ denote the flow parameters. Then the τ -function for the KP hierarchy is also given in the same form as (7) where each f_i now satisfies the linear equations with $t_1 = x, t_2 = y, t_3 = t$ and the rest of t_n 's gives the higher flows. (See e.g. [13, 14].)

Grassmanniane totalmente non negative e grafi solitonici

Totally nonnegative Grassmannian and soliton graphs

Permutazioni

Prendiamo un qualunque insieme costituito da N elementi, che quindi possiamo esprimere come $[N] = \{1, 2, \dots, N\}$. Una *permutazione* è una applicazione biunivoca $\pi : [N] \leftrightarrow [N]$. Il numero di possibili permutazioni è $N!$. Esse si possono rappresentare in vari modi, ad esempio per $N = 4$ si può avere

$$\pi = (2, 4, 1, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La prima forma mette in evidenza la struttura ciclica della permutazione. In questo esempio non ci sono valori per i quali $\pi(n) = n$: si dice che essa è libera da punti fissi, o che è un *derangement* o, anche, una *dismutazione*. Invece la permutazione

$$\pi' = (2, 4, 1)(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ha 3 come punto fisso.

Le permutazioni formano un *gruppo* S_N sull'insieme $[N]$, secondo la regola di composizione $(\pi \circ \rho)(n) = \pi(\rho(n))$ con $n \in [N]$. Esso è basilare nella teoria dei Gruppi Finiti e delle loro rappresentazioni.

Per ogni permutazione σ e $n \in [N]$ si chiama *orbita* di n rispetto a σ l'insieme $\{n, \sigma(n), \sigma^2(n), \dots\}$. Pertanto ogni permutazione possiede l'insieme delle sue orbite $Orb(\sigma)$. Ogni orbita è un ciclo. Ogni permutazione è il prodotto dei cicli che costituiscono le sue orbite.

Si può introdurre il concetto di *lunghezza di una permutazione* come $\ell(\sigma) = N - \#(Orb(\sigma))$. Quindi per i due esempi precedenti si ha $\ell(\pi) = 3$ e $\ell(\pi') = 2$. La lunghezza di un ciclo è sempre pari al numero dei suoi elementi $- 1$.

Una *trasposizione* è una permutazione che scambia due elementi e mantiene gli altri fissi. Le trasposizioni tra elementi adiacenti vengono indicate nel testo con $s_i = (i, i + 1)$. Il prodotto di una trasposizione per una generica permutazione produce una divisione di orbite, o una loro fusione, in accordo con l'appartenenza degli elementi trasposti alla stessa orbita oppure no.

Per spiegare la connessione tra derangement e le matrici TNN, ci si consenta di spiegare i risultati riportati in [9] (si veda anche [10]).

In primo luogo osserviamo che l'insieme di funzioni $\{f_i\}_{i=1}^N$ in (6) costituisce una base di un sotto-spazio N -dimensionale di \mathbb{R}^M , poiché l'insieme delle funzioni (di x) $\{E_j\}_{j=1}^M$ sono linearmente indipendenti e spazzano \mathbb{R}^M . Ancora più precisamente si ha la relazione

$$\mathbf{E}_j = (1, \kappa_j, \dots, \kappa_j^{M-1})^T E_j \in \mathbb{R}^M \quad \text{e quindi/ and then} \quad \mathbf{f}_i = (f_i, \partial_x f_i, \dots, \partial_x^{M-1} f_i)^T \in \mathbb{R}^M.$$

Questo implica che ciascuna matrice A può essere considerata come un punto della varietà reale $\text{Gr}(N, M)$, cioè l'insieme di tutti i sotto-spazi N -dimensionali di \mathbb{R}^M . Tale varietà possiede la

To explain the connection between the derangement and the TNN matrix, let us briefly explain the result of [9] (see also [10]). First note that the set of functions $\{f_i\}_{i=1}^N$ in (6) forms a basis of N -dimensional subspace of \mathbb{R}^M since the linearly independent set of functions (of x) $\{E_j\}_{j=1}^M$ spans \mathbb{R}^M . More precisely,

This implies that each matrix A can be considered as a point of the real Grassmannian $\text{Gr}(N, M)$, the set of all N -dimensional subspaces in \mathbb{R}^M , which has the Schubert decomposition given by

Flussi in commutazione

Come tutti i sistemi integrabili con infiniti gradi di libertà, anche KP possiede infinite quantità conservate, che possono assumere valori arbitrari e indipendenti, dai quali la soluzione dipende con continuità. Una forma alternativa per esprimere tale proprietà consiste nel dimostrare l'esistenza di infinite simmetrie continue locali dell'equazione, compresa la stessa KP. Per simmetria locale si intende una equazione del primo ordine in un parametro ausiliario per il campo $u(x = t_0, y = t_1, t = t_2, t_3 \dots, t_n, \dots)$ della forma

$$u_{t_i} = \mathcal{K}(u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{x\dots x}), \quad i \geq 1$$

nella quale il secondo membro dipenda solo dal campo e dalle sue derivate rispetto ad x , fino ad un certo ordine finito. Per un sistema integrabile tali simmetrie sono algebricamente calcolabili e la trasformazione che ognuna di esse genera è parametrizzata indipendentemente dalle altre. Tali infinite equazioni di simmetria sono tra loro compatibili, nel senso che lo scambio di ordine tra due di tali trasformazioni sul campo u commutano tra di loro. Questa è quindi una famiglia infinita di flussi in commutazione.

Sato e la sua scuola [14] sintetizzarono tale complessa struttura, calcolando le simmetrie esplicitando un'unica relazione operatoriale formale

$$\partial_{t_n} L = [L_+^n, L] \quad n \geq 1,$$

dove è stato introdotto l'operatore pseudo-differenziale

$$L = \partial_x + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \partial_x^{1-m},$$

L_+^n indica la parte differenziale di L^n , le a_m sono funzioni di $(x = t_0, y = t_1, t = t_2, t_3 \dots, t_n, \dots)$. L'operatore ∂_x^{-1} è un inverso opportunamente definito si ∂_x , che soddisfa la regola di Leibniz generalizzata $\partial_x^{-n} f = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(n+l-1)!}{l!(n-l)!} f^{(l)} \partial_x^{-n-l}$, $n > 0$. Infine il simbolo $[\cdot, \cdot]$ denota il commutatore tra operatori differenziali. L'equazione di KP si ottiene combinando le equazioni per $n = 1, 2$ e ponendo $a_1 = u$.

cosiddetta *decomposizione di Schubert*, data da

$$\text{Gr}(N, M) = \bigsqcup_{w \in S_M^{(N)}} \Omega_w,$$

dove Ω_w è chiamata la *cella di Schubert* associata alla permutazione w . Essa è l'insieme delle matrici A la cui forma triangolare superiore ha l'insieme dei pivot pari a $\{w(M-N+1), w(M-N+2) \dots, w(M)\}$. Qui $S_M^{(N)}$ indica quel sottoinsieme del gruppo delle permutazioni S_M tale che ogni elemento (ridotto) $w \in S_M^{(N)}$ deve terminare con il simbolo s_{M-N} , dove $s_i = (i, i+1)$ è la trasposizione di indici adiacenti [15].

Le soluzioni solitoniche regolari di KP sono in corrispondenza con le matrici TNN, dette TNN

where Ω_w is called the Schubert cell associated to a permutation w , and it is the set of A matrices whose row echelon form has the pivot set $\{w(M-N+1), w(M-N+2) \dots, w(M)\}$. Here $S_M^{(N)}$ is the subset of the symmetric group S_M such that every (reduced) element $w \in S_M^{(N)}$ must end with the letter s_{M-N} , where $s_i = (i, i+1)$ is the adjacent transposition of indices [15]. The regular KP soliton solutions are associated with the set of all TNN matrices called the TNN Grassmannian $\text{Gr}(N, M)_{\geq 0}$ which admits a finer

Varietà Grassmanniane

Nello spazio vettoriale reale a N dimensioni \mathbb{R}^N si consideri l'insieme di tutti i sottospazi a n dimensioni, cioè di tutti i piani di dimensione n passanti per l'origine O . L'insieme che si ottiene è una varietà (differenziabile) di $n(N - n)$ dimensioni, denotata con $\text{Gr}(N, n)$.

Un modo pratico per rappresentare una varietà Grassmanniana segue dalla rappresentazione matriciale di un sottospazio n -dimensionale W di \mathbb{R}^N , il quale può essere descritto (in una certa base) come una matrice A in $\mathbb{R}^{n \times N}$ di rango massimo. Le sue righe sono le componenti di n vettori indipendenti di \mathbb{R}^N che generano W .

Se esiste una matrice reale $D \in GL_{\mathbb{R}}(n)$ tale che valga $A = D \cdot B$, allora A e B descrivono lo stesso spazio W . In questo modo si può esprimere la Grassmanniana come

$$\text{Gr}(N, n) \cong \frac{\{\text{matrici reali } n \times N \text{ di rango massimo } n\}}{GL_{\mathbb{R}}(n)}. \quad (9)$$

La libertà fornita dalle possibili scelte in $GL_{\mathbb{R}}(n)$ equivale alle operazioni di Gauss sulle matrici. Quindi si può fissare una forma particolarmente utile per lavorare con gli elementi di (9), ad esempio concentrandosi sulla forma triangolare superiore ridotta.

Da un punto di vista geometrico $\text{Gr}(N, n)$ è uno spazio omogeneo e può essere rappresentata in termini di spazio omogeneo (dei coset) per il gruppo ortogonale $O(N)$. Precisamente si ha che

$$\text{Gr}(N, n) \simeq \frac{O(N)}{O(N - n) \times O(n)}.$$

Casi particolari sono gli spazi reali proiettivi a N dimensioni, valendo la relazione $\mathbb{R}P^N = \text{Gr}(N + 1, 1) \simeq \frac{O(N+1)}{O(N) \times O(1)} = \frac{SO(N+1)}{O(N)}$. Queste relazioni dicono che le Grassmanniane costruite su spazi vettoriali reali (o complessi) sono varietà algebriche regolari compatte.

Queste ultime sono descritte in termini di *relazioni di Grassmann-Plücker*. Tali relazioni si possono ricavare a partire da note espansioni dei determinanti come quella di Laplace. In generale, considerando l'algebra esterna $\wedge^n \mathbb{R}^N$, associata a \mathbb{R}^N , si usa l'immersione di Plücker $\tilde{A} = \text{span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \in \mathbf{Gr}(N, n) \mapsto [\vec{v}_1 \wedge \dots \wedge \vec{v}_n]$.

Grassmanniane $\text{Gr}(N, M)_{\geq 0}$, che ammettono una descrizione più fine, chiamata *decomposizione di Deodhar* [16] (see also [9])

$$\text{Gr}(N, M)_{\geq 0} = \bigsqcup_{w \in S_M^{(N)}} \Omega_w^{\geq 0}, \quad \text{con/with} \quad \Omega_w^{\geq 0} = \bigsqcup_{\mathbf{v} \prec w} \mathcal{P}_{\mathbf{v}, w}$$

dove (si veda immediatamente nel seguito la sua definizione) \mathbf{v} denota una sotto-espressione *positiva* di una permutazione v e una coppia di esse (\mathbf{v}, w) determina univocamente la cosiddetta componente di Deodhar $\mathcal{P}_{\mathbf{v}, w}$ [9, 17]. Una sotto-espressione positiva di w si definisce come segue. Prima si scriva w come una espressione ridotta $w = s_{j_1} \dots s_{j_m}$, di lunghezza $\ell(w) = m$. Una sua sotto-espressione $\mathbf{v} = v_1 \dots v_m$ di v è ottenuta scegliendo $v_i \in \{1, s_{j_i}\}$ per ogni i . Definiamo ora $v_{(i)} := v_1 \dots v_i$. Allora una sotto-espressione

decomposition, called a Deodhar decomposition [16] (see also [9])

where \mathbf{v} is a *positive* subexpression of w , and $\mathcal{P}_{\mathbf{v}, w}$ is called the Deodhar component which is uniquely determined by the pair of permutation (\mathbf{v}, w) [17, 9]. A positive subexpression of w is defined as follows: First write w in a reduced expression, $w = s_{j_1} \dots s_{j_m}$, of length $\ell(w) = m$. A subexpression $\mathbf{v} = v_1 \dots v_m$ of w is obtained by choosing $v_i \in \{1, s_{j_i}\}$ for each i . Define $v_{(i)} := v_1 \dots v_i$. Then the subexpression \mathbf{v} is *positive*, if $\ell(v_{(i-1)}) < \ell(v_{(i-1)}s_{j_i})$ for all i . For example, let $w = s_2s_1s_3s_2$ which corresponds to the top cell

\mathbf{v} è detta *positiva*, se $\ell(v_{(i-1)}) < \ell(v_{(i-1)}s_{j_i})$ per ogni i . Per esempio, sia $\mathbf{w} = s_2 s_1 s_3 s_2$, che corrisponde alla cella di vertice di $\text{Gr}(2, 4)$, allora la sotto-espressione $\mathbf{v} = 111s_2$ è positiva, mentre $\mathbf{v} = s_2111$ non lo è (si noti che entrambe le \mathbf{v} producono $v = s_2$).

Nel lavoro [9] è stato dimostrato che ogni coppia (\mathbf{v}, \mathbf{w}) determina la matrice $A \in \mathcal{P}_{\mathbf{v}, \mathbf{w}}$, la quale possiede un numero $\ell(w) - \ell(v)$ di parametri liberi. Il corrispondente derangement π che parametrizza la soluzione solitonica è dato da $\pi = v w^{-1}$. Questo significa che se noi conosciamo l'insieme dei solitoni asintotici per $|y| \gg 0$, which fornisce un unico derangement π , allora noi potremmo costruire la corrispondente matrice A .

Quindi, la struttura asintotica dei solitoni di KP a grandi $|y|$ può essere classificata da un derangement associata ad una componente di Deodhar della varietà $\text{Gr}(N, M)_{\geq 0}$. In particolare noi siamo interessati alle configurazioni bi-dimensionali generati dai solitoni di KP. Per esempio, la Figura 3 mostra l'evoluzione temporale della soluzione associata ad una matrice A di tipo 3×6 con

$(\kappa_1, \dots, \kappa_6) = (-5/2, -5/4, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2)$. In questo caso tutti i minori 3×3 di A sono non nulli (questo tipo di matrice è chiamata *totalmente positiva*).

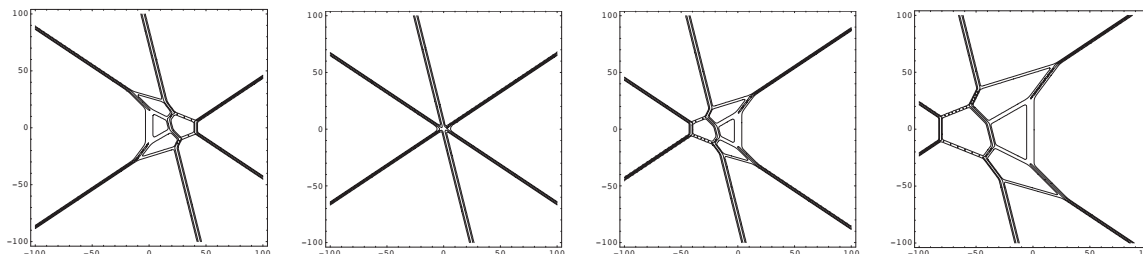


Figura 3: Grafico delle curve di livello per un solitone di KP associato a $\text{Gr}(3, 6)_{>0}$. Nei vari riquadri si mostra l'evoluzione temporale della soluzione $u(x, y, t)$ for $t = -10, 0, 10, 20$ da sinistra. The contour plots of the KP soliton for $\text{Gr}(3, 6)_{>0}$. The panels show the time evolution of the solution $u(x, y, t)$ for $t = -10, 0, 10, 20$ from the left.

Grafi Solitonici

Allo scopo di descrivere queste strutture ondose bi-dimensionali, in ogni punto del piano xy noi abbiamo bisogno di identificare il termine esponenziale dominante $\Delta_I(A)e^{\Theta_I}$, per un certo multi-indice $I = \{i_1, \dots, i_N\}$, della funzione τ . In particolare, noi studiamo tali strutture consi-

of $\text{Gr}(2, 4)$, then the subexpression $\mathbf{v} = 111s_2$ is positive, but $\mathbf{v} = s_2111$ is not positive (note that both \mathbf{v} give $v = s_2$).

It is shown in [9] that the pair (\mathbf{v}, \mathbf{w}) determines the matrix $A \in \mathcal{P}_{\mathbf{v}, \mathbf{w}}$ which has $\ell(w) - \ell(v)$ number of free parameters. The derangement π parametrizing the soliton solution is then given by $\pi = v w^{-1}$. This means that if we know the set of asymptotic solitons for $|y| \gg 0$ which gives a unique derangement π , then we can construct the corresponding matrix A .

Thus, the asymptotic structure of the KP soliton for a large $|y|$ can be classified by the derangement associated to the Deodhar component of $\text{Gr}(N, M)_{\geq 0}$. We are interested in the two-dimensional patterns generated by the KP solitons. For example, Figure 3 shows the time evolution of the solution for a 3×6 matrix A and $(\kappa_1, \dots, \kappa_6) = (-5/2, -5/4, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2)$. Here all 3×3 minors of A are nonzero (this type of matrix is called *totally positive* matrix).

Soliton graphs

In order to describe those two-dimensional wave pattern, we need to identify the dominant exponential $\Delta_I(A)e^{\Theta_I}$ for some $I = \{i_1, \dots, i_N\}$ in the τ -functions at each point in the xy -plane. In particular, we investigate these patterns by considering a large scale limit of the variables

Matroidi

Un matroide è una struttura combinatoria che generalizza il concetto di “lineare indipendenza”. Una delle definizioni più ricorrenti assume un insieme di n elementi E e una famiglia non-vuota $\mathcal{B} \subseteq 2^E$ di sottoinsiemi di E , detta *base*, che gode della seguente *proprietà di scambio*

per ogni coppia di elementi $X, Y \in \mathcal{B}$ e per ogni $x \in X \setminus Y$, esiste un elemento $y \in Y \setminus X$ tale che $X \setminus \{x\} \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

Un esempio di tale proprietà si incontra in algebra lineare. Si considerino matrici di dimensioni $k \times n$ (con $k < n$) di rango k . Supponiamo $X = \{x, i_2, \dots, i_k\}$ e $Y = \{j_1, \dots, j_k\}$ siano due di tali matrici. Allora, se x non appartiene a Y , l'assioma di scambio ci dice che esiste una colonna $j_* \in Y$ tale che $\{j_*, i_2, \dots, i_k\}$ è ancora costituita da colonne linearmente indipendenti.

Tuttavia la definizione di matroide si applica a contesti molto più ampi ed esistono, infatti, casi di matroidi non esprimibili come insieme di insiemi di k vettori linearmente indipendenti in un qualche spazio vettoriale (si può citare il *matroide di Vámos*).

Oltre che in algebra lineare, i matroidi sono ampiamente impiegati nella teoria dei grafi e delle reti, in teoria dell'informazione, recenti applicazioni si riscontrano in teoria dei codici e nella computer grafica.

derando il limite di grande scala delle variabili (x, y, t) . Più precisamente, noi riscaliamo le variabili secondo la prescrizione $x \rightarrow x/\epsilon, y \rightarrow y/\epsilon$ e $t \rightarrow t/\epsilon$ mediante un piccolo numero positivo $0 < \epsilon \ll 1$. Quindi la funzione τ si trasforma secondo la relazione

$$\tau_A \left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon}, \frac{t}{\epsilon} \right) = \sum_{I \in \mathcal{M}(A)} \exp \left(\frac{1}{\epsilon} \Theta_I(x, y, t) + \ln(K_I \Delta_J(A)) \right)$$

dove $\mathcal{M}(A)$ è un insieme, detto *matroide*, associato alla matrice A dalla definizione

$$\mathcal{M}(A) := \left\{ I \in \binom{[M]}{N} : \Delta_I(A) > 0 \right\}.$$

Allora è possibile anche definire una funzione lineare a tratti fornita dal cosiddetto *limite tropicale*

$$f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon \ln \tau_A) = \max_{I \in \mathcal{M}(A)} \{ \Theta_I(x, y, t) \}. \quad (10)$$

Dato un valore di t , la funzione $f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, t)$ rappresenta il *piano dominante* $z = \Theta_I(x, y, t)$ in \mathbb{R}^3 dove è localizzato il contributo più significativo per t . Noi allora possiamo definire ad ogni istante t il *grafo solitonico* come segue

(x, y, t) . More precisely, we rescale the variables as $x \rightarrow x/\epsilon, y \rightarrow y/\epsilon$ and $t \rightarrow t/\epsilon$ with a small positive number $0 < \epsilon \ll 1$. Then the τ -function becomes

where $\mathcal{M}(A)$ is the matroid associated to the matrix A defined by

Then we define a piecewise linear function given by the limit called a *tropical limit*

That is, $f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, t)$ represents a dominant plane $z = \Theta_I(x, y, t)$ in \mathbb{R}^3 for fixed t . We then define the *soliton graph* for each t by

$$\mathcal{C}_t(\mathcal{M}(A)) = \begin{cases} \{\text{il luogo dei punti del piano } xy \text{ nei quali } f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, t) \text{ non è lineare}\}. \\ \{\text{the locus of the } xy\text{-plane where } f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, t) \text{ is not linear}\}. \end{cases}$$

Si noti che l'insieme complementare a $\mathcal{C}_t(\mathcal{M}(A))$ è un dominio di linearità per $f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, t)$, quindi ciascuna di queste regioni è associata a un piano dominante $z = \Theta_I(x, y, t)$ per un certo $I \in \mathcal{M}(A)$. In altri termini il grafo solitonico mostra il tracciato spaziale che identifica il piano dominante in ogni punto del piano xy , ovvero il *piano di posizionamento* \mathbb{R}^3 . Rimane ancora un problema aperto la classificazione completa del grafo solitonico $\mathcal{C}_t(\mathcal{M}(A))$ per una assegnata matrice A appartenente alla Grassmanniana $\text{Gr}(N, M)_{>0}$ per $N \geq 3$ e $M \geq N + 4$.

Note that each region of the complement of $\mathcal{C}_t(\mathcal{M}(A))$ is a domain of linearity for $f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, t)$, hence each region is associated to a *dominant plane* $z = \Theta_I(x, y, t)$ for a certain $I \in \mathcal{M}(A)$. Then the soliton graph shows the spatial pattern which identifies the dominant plane at each point in the xy -plane, i.e. *plane arrangements in* \mathbb{R}^3 . It is still an open problem to give a complete classification of the soliton graphs $\mathcal{C}_t(\mathcal{M}(A))$ for the matrices A from the totally positive Grassmannian $\text{Gr}(N, M)_{>0}$ for $N \geq 3$ and $M \geq N + 4$.

Dualità tra grafi solitonici e triangolazioni

Per studiare il grafo solitonico, in primo luogo noi definiamo una biiezione, chiamata *mappa di dualità*, tra un piano in \mathbb{R}^3 e un punto in \mathbb{R}^3

$$\mu : (p, q, \omega) \longleftrightarrow \{(x, y, z) : z = px + qy + \omega\}, \quad (11)$$

dove si fissano $p = \kappa_i, q = \kappa_i^2$ ed una certa costante ω (per descrivere solitoni di KP si sceglie $\omega = \kappa_i^3 t$). Il vettore $\langle p, q, -1 \rangle$ è la normale al piano e il vettore $\mathbf{p} = \langle p, q \rangle$ fornisce la direzione di incremento dello stesso, cioè $\nabla z = \langle p, q \rangle$. Per chiarezza si veda la Figura 4. Usando la mappa di dualità, noi possiamo classificare il grafo solitonico $\mathcal{C}_t(\mathcal{M}(A))$ tramite le *triangolazioni* di un poligono inscritto in una parabola come vedremo nel seguito.

Duality between the soliton graph and the triangulation

In order to study the soliton graphs, we first define a bijection, called the *duality map*, between a plane in \mathbb{R}^3 and a point in \mathbb{R}^3

where $p = \kappa_i, q = \kappa_i^2$ and some constant ω ($\omega = \kappa_i^3 t$ for the KP soliton). The vector $\langle p, q, -1 \rangle$ is the normal vector of the plane, and the vector $\mathbf{p} = \langle p, q \rangle$ gives the increasing direction of the plane, i.e. $\nabla z = \langle p, q \rangle$. See Fig.4. Using the map, we can classify the soliton graphs $\mathcal{C}_t(\mathcal{M}(A))$ via the *triangulations* of a polygon inscribed in a parabola as described below.

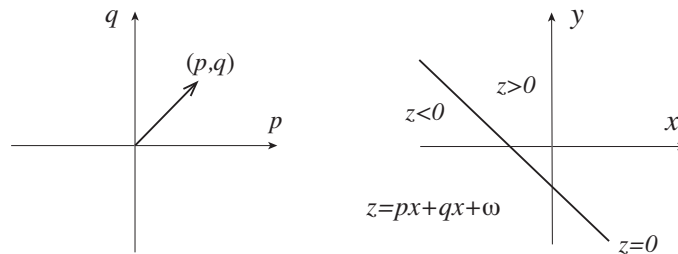


Figura 4: Mappa di Dualità. Il vettore $\hat{\mathbf{p}} = \langle p, q, -1 \rangle$ è la normale del piano $z = px + qy + \omega$ e il vettore $\mathbf{p} = \nabla z = \langle p, q \rangle$ fornisce la direzione di incremento di z .

Duality map. The vector $\hat{\mathbf{p}} = \langle p, q, -1 \rangle$ is the normal vector of the plane $z = px + qy + \omega$ and the vector $\mathbf{p} = \nabla z = \langle p, q \rangle$ gives the increasing direction of z .

A titolo di semplice esempio, consideriamo il caso con tre punti $\hat{\mathbf{p}}_i = (p_i, q_i, \omega_i) \in \mathbb{R}^3$ essendo $p_i = \kappa_i, q_i = \kappa_i^2$ and $\omega_i = \kappa_i^3 t$. Allora noi abbiamo un triangolo inscritto nella parabola $q = p^2$, i cui vertici sono $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$, con assegnato peso ω_i . Per semplicità, prendiamo tutti le $\omega_i = 0$. Allora tutti i piani $z = \theta_i(x, y) = p_i x + q_i y$ si intersecano nell'origine e, in ciascun punto (x, y) , uno dei piani diventa dominante. La Figura 5 mostra la *dualità* tra i triangoli nel piano pq e il grafo solitonico nel piano xy al tempo $t = 0$. La dinamica del punto di intersezione è lineare nel tempo t , essendo data da $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$.

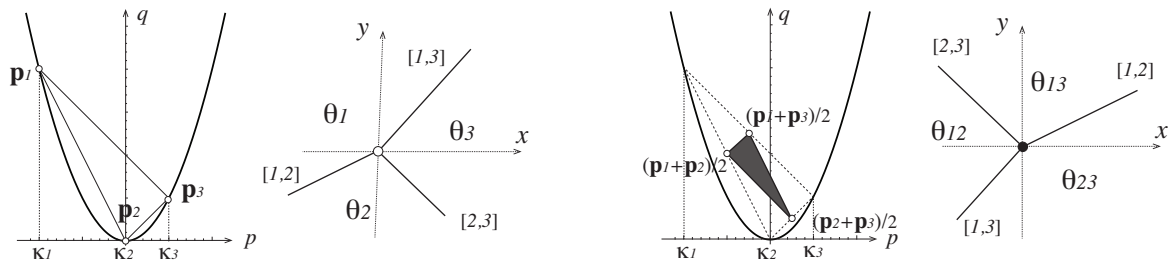


Figura 5: Dualità tra grafo solitonico e triangoli per $Gr(1, 3)_{>0}$ (sinistra) e $Gr(2, 3)_{>0}$ (destra).
Duality between the soliton graphs and the triangles for $Gr(1, 3)_{>0}$ and $Gr(2, 3)_{>0}$.

I due grafici a sinistra mostrano il caso per $Gr(1, 3)_{>0}$, il che vuol dire che abbiamo $\mathcal{M}(A) = \{1, 2, 3\}$ e

$$f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, 0) = \max\{\theta_i(x, y, 0) : i = 1, 2, 3\}.$$

Nel grafo solitonico (la seconda figura da sinistra) ogni regione è contrassegnata dal piano dominante $z = \theta_i(x, y)$. Il triangolo inscritto nella parabola è detto "bianco". In generale, l'insieme degli indici $\{I, J, L\}$ dei vertici per questo tipo di triangoli soddisfano le relazioni $I = I_0 \cup \{i\}$, $J = I_0 \cup \{j\}$ and $L = I_0 \cup \{l\}$ con un certo $(N - 1)$ -indice comune I_0 . Il punto di intersezione nel grafo solitonico viene simbolizzato con un vertice bianco, *duale* al triangolo bianco. Si osservi che ciascun lato del triangolo, diciamo $\mathbf{p}_{[i,j]} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j$, è perpendicolare alla retta data da $\theta_i = \theta_j$, che corrisponde all' $[i, j]$ -solitone. Si noti anche che i solitoni asintotici danno luogo alla permutazione $\pi = (3, 1, 2) = s_2 s_1$.

I due grafici a destra descrivono la situazione per $Gr(2, 3)$, quindi avendo $\mathcal{M}(A) = \{12, 13, 23\}$ e

$$f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, 0) = \max\{(\theta_i + \theta_j)(x, y, 0) : 1 \leq i < j \leq 3\},$$

As a simplest example, consider the case with three points $\hat{\mathbf{p}}_i = (p_i, q_i, \omega_i) \in \mathbb{R}^3$ with $p_i = \kappa_i, q_i = \kappa_i^2$ and $\omega_i = \kappa_i^3 t$. Then we have a triangle inscribed in the parabola $q = p^2$ whose vertices are $\{\hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{p}}_2, \hat{\mathbf{p}}_3\}$, and each vertex \mathbf{p}_i has a weight ω_i . For the simplicity, take all $\omega_i = 0$. Then all the planes $z = \theta_i(x, y) = p_i x + q_i y$ intersect at the origin, and at each point (x, y) , one of the plane becomes dominant. Figure 5 below shows the *duality* between the triangles in the pq -plane and the soliton graphs in the xy -plane at $t = 0$. The dynamics of the intersection point is linear in time t as given by $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$.

The left two panels show the case for $Gr(1, 3)_{>0}$, that is, we have $\mathcal{M}(A) = \{1, 2, 3\}$ and

In the soliton graph (the second figure from left), each region is labeled by the dominant plane $z = \theta_i(x, y)$. The triangle inscribed in the parabola is defined as "white" triangle. In general, the index set $\{I, J, L\}$ of the vertices of this type of triangle satisfies $I = I_0 \cup \{i\}$, $J = I_0 \cup \{j\}$ and $L = I_0 \cup \{l\}$ for some common $(N - 1)$ -index set I_0 . The intersection point in the soliton graph is then marked by a white vertex which is *dual* to the white triangle. Notice that each edge of the triangle, say $\mathbf{p}_{[i,j]} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j$, is perpendicular to the line given by $\theta_i = \theta_j$ which corresponds to the $[i, j]$ -soliton. Also note that the asymptotic solitons gives the permutation $\pi = (3, 1, 2) = s_2 s_1$. The right two panels show the case for $Gr(2, 3)$, that is, we have $\mathcal{M}(A) = \{12, 13, 23\}$ and

Questo triangolo è detto “nero”. In generale, l’insieme di multi-indici $\{I, J, L\}$ per i vertici di questo tipo soddisfano delle relazioni della forma $I = K_0 \setminus \{i\}, J = K_0 \setminus \{j\}$ and $L = K_0 \setminus \{l\}$ per un certo $(N + 1)$ -indice comune K_0 . Nella figura precedente il triangolo nero è l’involuppo convesso dei vertici $\{\frac{1}{2}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j) : 1 \leq i < j \leq 3\}$, cioè i vertici sono i punti medi dei lati del triangolo bianco nella figura di sinistra. Il punto di intersezione nel grafo solitonico è allora segnato con un vertice nero.

In generale, il grafo solitonico per $\text{Gr}(N, M)_{>0}$ ha solo vertici trivalenti, che sono colorati o bianchi o neri [12] (il grafico è allora equivalente al *grafo plabico*, cioè *piano e bicolore*, introdotto da [10]). Per esempio, nel caso di $\text{Gr}(2, 4)_{>0}$, si ha

$$f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, t) = \max\{(\theta_i + \theta_j)(x, y, t) : 1 \leq i < j \leq 4\},$$

La Figura 6 illustra il grafo solitonico a $t < 0$ (sinistra) e a $t > 0$ (destra). Nelle figure il cambiamento del grafo può essere inteso come un ribaltamento della triangolazione del quadrilatero fornito dall’involuppo convesso dell’insieme dei sei punti $\{\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j : 1 \leq i < j \leq 4\}$ (il ribaltamento corrisponde ad una *mutazione* nella corrispondente *cluster algebra* [12, 18, 19, 20]). Notiamo che il quadrilatero (un parallelogramma) nelle figure è dato dall’involuppo convesso di $\{\frac{1}{2}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j) : 1 \leq i < j \leq 4\}$.

Nel caso generale di $\text{Gr}(N, M)_{>0}$, noi possiamo dimostrare che l’involuppo complesso dell’insieme di tutti punti $\mathbf{p}_I = (p_I, q_I)$, con $I \in \binom{[M]}{N}$, è un M -gono, denotato da

$$\text{conv}(\mathcal{A}_{N,M}) = M\text{-gono} \quad \text{dove / where} \quad \mathcal{A}_{N,M} := \left\{ \mathbf{p}_I = (p_I, q_I) \in \mathbb{R}^2 : I \in \binom{[M]}{N} \right\}.$$

I vertici dell’ M -gono sono dati da

$$\{\mathbf{p}_{I_j} : I_j = \{j, j + 1, \dots, j + N - 1\}, j = 1, \dots, M \text{ (ordine ciclico / cyclic order)}\}.$$

Per esempio, nel caso di $\text{Gr}(2, 6)_{>0}$, l’involuppo convesso dei 15 punti $\{\mathbf{p}_{i,j} = \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j : 1 \leq i < j \leq 6\}$ è un *esagono* di vertici

$$\{\mathbf{p}_{1,2}, \mathbf{p}_{2,3}, \mathbf{p}_{3,4}, \mathbf{p}_{4,5}, \mathbf{p}_{5,6}, \mathbf{p}_{1,6}\}.$$

Qui si noti che tutti gli altri 9 punti $\mathbf{p}_{i,j}$ with $|i - j| > 1$ (in ordine ciclico) sono punti *interni* dell’esagono.

This triangle is defined as a “black” triangle. In general, the index set $\{I, J, L\}$ for the vertices of this type of triangle satisfies $I = K_0 \setminus \{i\}, J = K_0 \setminus \{j\}$ and $L = K_0 \setminus \{l\}$ for some common $(N + 1)$ -index set K_0 . In the figure above, the black triangle is the convex hull of the vertices $\{\frac{1}{2}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j) : 1 \leq i < j \leq 3\}$, i.e. the vertices are the mid points of the edges of the white triangle in the left figure. The intersection point in the soliton graph is then marked by a black vertex.

In general, the soliton graph for $\text{Gr}(N, M)_{>0}$ has only trivalent vertices which are colored by either white or black [12] (the graph is then equivalent to the *plabic graph* introduced in [10]). For example, in the case of $\text{Gr}(2, 4)_{>0}$, we have

Figure 6 illustrates the soliton graphs for $t < 0$ (left), and for $t > 0$ (right). In the figures, the change of the graphs can be considered as a flip in the triangulation of quadrilateral given by the convex hull of the set of six points $\{\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j : 1 \leq i < j \leq 4\}$, (the flip corresponds to the *mutation* in the cluster algebra [19, 20, 18, 12]). Note that the quadrilateral (parallelogram) in the figures are given by the convex hull of $\{\frac{1}{2}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j) : 1 \leq i < j \leq 4\}$.

In general case of $\text{Gr}(N, M)_{>0}$, we can show that the convex hull of the set of all the points $\mathbf{p}_I = (p_I, q_I)$ for $I \in \binom{[M]}{N}$ is an M -gon, denoted by

The vertices of the M -gon are given by

For example, in the case of $\text{Gr}(2, 6)_{>0}$, the convex hull of 15 points $\{\mathbf{p}_{i,j} = \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j : 1 \leq i < j \leq 6\}$ is a *hexagon* with the vertices

Note here that all other 9 points $\mathbf{p}_{i,j}$ with $|i - j| > 1$ (cyclic sense) are *inner* points of the hexagon.

Cluster Algebra

Le algebre cluster sono state definite da Fomin e Zelevinsky [19, 20] come particolari classi di anelli commutativi, ossia strutture algebriche dotate di due operazioni di *somma* e *prodotto*, che godono delle note proprietà associativa, commutativa e distributiva del prodotto rispetto alla somma. Esistono i corrispondenti elementi neutri, oltre che gli inversi additivi e la legge di annullamento del prodotto. Tali anelli sono generati a partire da un dato iniziale e da una regola di ricorrenza detta *mutazione*.

Per dare un esempio elementare si considerino due interi $a, b \in \mathbb{Z}$ ed un *seme* iniziale $\{x_1, x_2\}$, costituito da due elementi dell'algebra. Questo seme è un *cluster* dell'algebra, che ne genera un altro in accordo alla formula di ricorrenza

$$x_{m-1} x_{m+1} = \begin{cases} x_m^a + 1 & m \text{ dispari} \\ x_m^b + 1 & m \text{ pari} \end{cases} .$$

Iterando queste relazioni ogni x_m si può esprimere come una funzione razionale dei cluster $\dots \leftrightarrow \{x_1, x_2\} \leftrightarrow \{x_2, x_3\} \leftrightarrow \dots$. Quindi l'algebra è un sottoanello finito del campo delle funzioni razionali $Q(x_1, x_2)$.

Rinviando alla letteratura specialistica una definizione generale delle cluster algebre, basti dire che esse codificano l'informazione combinatoria contenuta in grafi orientati (*quiver*). In particolare, gli esempi di algebre cluster legati allo studio dei solitoni nel presente articolo sono riconducibili, con gli associati quiver, a diagrammi di Dynkin relativi ad algebre di Lie di tipo A_m .

La definizione di tali oggetti è stata motivata dallo studio delle algebre quantistiche e delle loro rappresentazioni, ma si è rapidamente estesa in vari ambiti della matematica e della fisica, a partire dalla teoria delle rappresentazioni e dei sistemi di radici, in analogia alla teoria delle algebre di Lie. Le regolarità delle algebre cluster le connettono anche a sistemi integrabili discreti, alle strutture combinatorie, fino alla teoria delle stringhe.

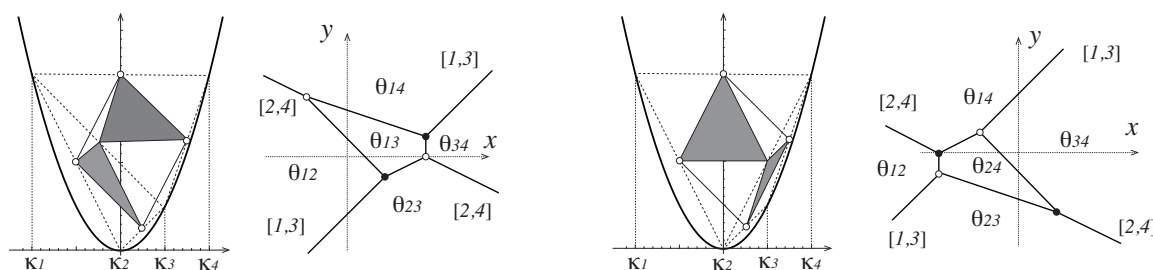


Figura 6: Dualità tra grafi solitonici (a sinistra per $t < 0$ e a destra per $t > 0$) e la triangolazione di quadrilateri per $Gr(2, 4)_{>0}$.
Duality between the soliton graphs (left for $t < 0$ and right for $t > 0$) and the triangulation of quadrilateral for $Gr(2, 4)_{>0}$.

Passiamo allora a considerare una triangolazione di questo M -gono, definita come segue (si veda ad esempio [21] per una informazione generale sulle triangolazioni). Indicato con $P = \text{conv}\{\mathbf{p}_I \in \mathbb{R}^2 : I \in \mathcal{M}\}$ un M -gono associato ad un matroide \mathcal{M} , allora noi definiamo

(a) Q è una “triangolazione” dell’ M -gono P se $\exists \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ con $\sigma_i \subset \mathcal{M}$ tale che $P_{\sigma_i} :=$

Then we consider a triangulation of this M -gon which is defined as follows (see e.g. [21] for the general information for the triangulations): Let $P = \text{conv}\{\mathbf{p}_I \in \mathbb{R}^2 : I \in \mathcal{M}\}$ be an M -gon associated with a matroid \mathcal{M} . Then we define

(a) Q is a “triangulation” of the M -gon P , if $\exists \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ with $\sigma_i \subset \mathcal{M}$ such that $P_{\sigma_i} :=$

$\text{conv}\{\mathbf{p}_I : I \in \sigma_i\}$ soddisfi

- (i) P_{σ_i} è un triangolo, cioè $|\sigma_i| = 3$,
- (ii) $Q = \cup_{i=1}^m P_{\sigma_i}$,
- (iii) $P_{\sigma_i} \cap P_{\sigma_j}$ è uno spigolo comune di questi poligoni.

(b) Una triangolazione Q è "regolare" se $\exists \omega = \{\omega_I : I \in \mathcal{M}\}$ tale che ciascun poligono P_{σ_i} sia ottenuto dalla proiezione delle facce superiori del poligono tri-dimensionale costruito sulla configurazione di punti sollevati con peso ω

$$P^\omega = \text{conv}\{(\mathbf{p}_I, \omega_I) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : I \in \mathcal{M}\}.$$

Ora introduciamo un metodo induttivo per costruire triangolazioni regolari dell' M -gono dato da $\text{conv}(\mathcal{A}_{N,M})$, per un certo insieme di punti $\mathcal{A}_{N,M}$. Per spiegare l'induzione, prendiamo l'esempio di $\text{Gr}(N, 11)_{>0}$ come mostrato nella figura sotto:

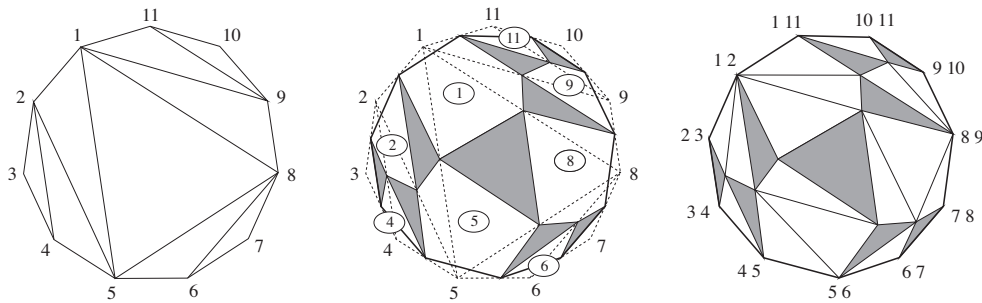


Figura 7: Costruzione per induzione di $Q_{2,11}$ a partire da $Q_{1,11}$. Ciascun poligono bianco nel riquadro mediano ha un indice comune nei vertici $\frac{1}{2}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j)$ ed è indicato cerchiato.
 Inductive construction of $Q_{2,11}$ from $Q_{1,11}$. Each white polygon in the middle panel has a common index in the vertices $\frac{1}{2}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j)$ which is shown in the circle.

Noi prima assegnamo un insieme di pesi $\{\omega_i : i = 1, \dots, M = 11\}$. La figura di sinistra mostra una triangolazione regolare di $Q_{1,11}$ dell' 11-gono. La triangolazione si può verificare nel modo seguente: siano $\{\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b\}$ con $a < b$ i vertici di una diagonale in $Q_{1,11}$. Allora per ogni coppia di vertici $\{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j\}$ con $a < i < b < j$ (in ordine ciclico), il determinante $D_{a,i,b,j}$ deve essere negativo

$$D_{a,i,b,j} := \begin{vmatrix} 1 & p_a & q_a & \omega_a \\ 1 & p_i & q_i & \omega_i \\ 1 & p_b & q_b & \omega_b \\ 1 & p_j & q_j & \omega_j \end{vmatrix} \quad \text{con / with} \quad \hat{\mathbf{p}}_i = (p_i, q_i, \omega_i), \text{ etc.}$$

$\text{conv}\{\mathbf{p}_I : I \in \sigma_i\}$ satisfy

- (i) P_{σ_i} is a triangle, i.e. $|\sigma_i| = 3$,
- (ii) $Q = \cup_{i=1}^m P_{\sigma_i}$, and
- (iii) $P_{\sigma_i} \cap P_{\sigma_j}$ is a common edge of those polygons.

(b) A triangulation Q is "regular", if $\exists \omega = \{\omega_I : I \in \mathcal{M}\}$ such that each polygon P_{σ_i} is given by the projection of the upper faces of the 3-dimensional polytope defined by the lifted point configuration with the weight ω

We introduce an inductive construction of the regular triangulation of the M -gon given by $\text{conv}(\mathcal{A}_{N,M})$, for the point set $\mathcal{A}_{N,M}$. To explain the induction, we take the example for $\text{Gr}(N, 11)_{>0}$ as shown in the figure below:

Questo può essere dimostrato notando che

$$D_{a,i,b,j} = -[(\hat{\mathbf{p}}_i - \hat{\mathbf{p}}_a) \times (\hat{\mathbf{p}}_j - \hat{\mathbf{p}}_a)] \cdot (\hat{\mathbf{p}}_b - \hat{\mathbf{p}}_a).$$

Possedendo la triangolazione di $Q_{1,11}$, si può ottenere una suddivisione connettendo i punti medi di tutti i lati di $Q_{1,11}$ come mostrato nella figura mediana. Ciascun triangolo bianco nella figura di sinistra fornisce un triangolo nero per $\text{Gr}(2, 11)_{>0}$, cioè il vertice del triangolo nero è dato da $\frac{1}{2}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j)$, dove $\{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j\}$ sono i vertici del lato in $Q_{1,11}$. La figura di mezzo consiste di triangoli neri e alcuni poligoni bianchi, le cui dimensioni sono determinate dal grado dei corrispondenti vertici in $Q_{1,11}$. Poiché ciascun poligono bianco ha un indice comune, mostrato dal numero cerchiato, esso può essere triangolato come nel caso precedente di $Q_{1,11}$, controllando i corrispondenti determinanti come dati sopra. Noi allora otteniamo $Q_{2,11}$ che è nella figura di destra. Si può continuare con questo processo induttivo per ottenere triangolazioni regolari $Q_{N,11}$ per $N \geq 3$ (si veda [22] per i dettagli). Basandoci sul processo di induzione, noi congetturiamo che nel il caso generale per $\text{Gr}(N, M)_{>0}$: Ogni triangolazione $Q_{N,M}$ è costituita da

- (a) un numero pari a $N(M - N) - M + N$ di triangoli neri,
- (b) un numero pari a $N(M - N) - N$ di triangoli bianchi,
- (c) un numero pari a $N(M - N) + 1$ di vertici.

Si osservi che $N(M - N)$ è la dimensione di $\text{Gr}(N, M)_{>0}$. In particolare, l'affermazione (c) è connessa al numero delle *collezioni massimali debolmente separate* in $\binom{[M]}{N}$, e quelle suddivisioni con poligoni colorati chiamati in combinatoria le *tassellature plabiche* [28, 29]. La Figura 8 mostra le triangolazioni di $\mathcal{A}_{3,6}$ per la Figure 3: sinistra per $t < 0$, la media per $t = 0$ e la destra per $t > 0$.

Allo scopo di classificare tutti i possibili grafi solitonici noi consideriamo la gerarchia di KP con variabili multi-temporali $\mathbf{t} = (t_3, t_4, \dots, t_{M-1})$. Allora la funzione lineare a tratti $f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, \mathbf{t})$ si esprime come

$$f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, \mathbf{t}) = \max_{I \in \mathcal{M}(A)} \left\{ \Theta_I(x, y, \mathbf{t}) = \sum_{i \in I} \theta_i(x, y, \mathbf{t}) \right\}$$

This can be shown by noting that

Having the triangulation $Q_{1,11}$, one can obtain a subdivision by connecting mid-points of all the edges in $Q_{1,11}$ as shown in the middle panel. Each white triangle in the left panel gives a black triangle for $\text{Gr}(2, 11)_{>0}$, that is, the vertex of the black triangle is given by $\frac{1}{2}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j)$ where $\{\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j\}$ are the vertices of the edge in $Q_{1,11}$. The middle panel consists of the black triangles and some white polygons whose sizes are determined by the degrees of the corresponding vertices in $Q_{1,11}$. Since each white polygon has a common index shown in the number in the circle, it can be triangulated as in the previous case of $Q_{1,11}$ by checking the corresponding determinants given above. We then obtain $Q_{2,11}$ which is in the right panel. One can continue this induction process to obtain the regular triangulation $Q_{N,11}$ for $N \geq 3$ (see [22] for the details). Based on the induction process, we conjecture the following for the general case for $\text{Gr}(N, M)_{>0}$: Each triangulation $Q_{N,M}$ consists of

- (a) $N(M - N) - M + N$ number of black triangles,
- (b) $N(M - N) - N$ number of white triangles, and
- (c) $N(M - N) + 1$ number of vertices.

Notice that $N(M - N)$ is the dimension of $\text{Gr}(N, M)_{>0}$. In particular, the item (c) is related to the number of *maximal weakly separated collections inside* $\binom{[M]}{N}$, and those subdivisions with colored polygons are called the *plabic tilings* in the combinatorics [28, 29]. Figure 8 shows the triangulations of $\mathcal{A}_{3,6}$ for Figure 3: Left for $t < 0$ and middle for $t = 0$ and right for $t > 0$.

In order to classify all possible soliton graphs, we consider the KP hierarchy with multi-time variables $\mathbf{t} = (t_3, t_4, \dots, t_{M-1})$. Then the piecewise linear function $f_{\mathcal{M}(A)}(x, y, \mathbf{t})$ is given by

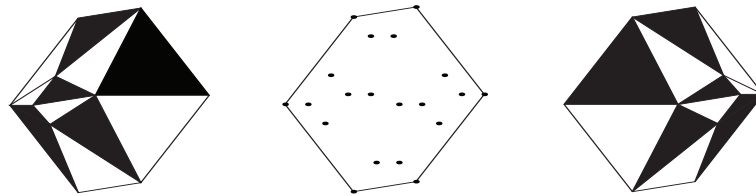


Figura 8: La triangolazione per i grafi solitonici della Fig.3. I punti a $t = 0$ (figura centrale) mostrano tutti i punti $\mathcal{A}_{3,6}$.
The triangulations for the soliton graphs in Fig.3. The dots at $t = 0$ (middle figure) show all the points in $\mathcal{A}_{3,6}$.

dove $\theta_i(x, y, \mathbf{t}) = \kappa_i x + \kappa_i^2 y + \omega_i(\mathbf{t})$ con $\omega_i(\mathbf{t}) = \sum_{k=3}^{M-1} \kappa_i^k t_k$ (si veda l'Osservazione 2). Notiamo che con un insieme di pesi $(\Omega_1, \dots, \Omega_M) \in \mathbb{R}^M$, si può identificare un unico punto (t_0, x, y, \mathbf{t}) , dove $t_0 + \theta_i(x, y, \mathbf{t}) = \Omega_i$ per $i = 1, \dots, M$. In altri termini si può assegnare un ordine dominante per i piani $z = \theta_i(x, y, \mathbf{t})$ in ogni punto (x, y, \mathbf{t}) . Quindi noi costruiamo una triangolazione regolare per ogni $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{M-3}$, che fornisce un unico grafo solitonico grazie alla mappa di dualità (11). La Figura 9 illustra la triangolazione per il caso $\text{Gr}(2, 5)_{>0}$ con i parametri κ pari a $(\kappa_1, \dots, \kappa_5) = (-2, -1, 0, 1, 2)$.

where $\theta_i(x, y, \mathbf{t}) = \kappa_i x + \kappa_i^2 y + \omega_i(\mathbf{t})$ with $\omega_i(\mathbf{t}) = \sum_{k=3}^{M-1} \kappa_i^k t_k$ (see Remark 2). Notice that with a set of weights $(\Omega_1, \dots, \Omega_M) \in \mathbb{R}^M$, one can identify a unique point (t_0, x, y, \mathbf{t}) where $t_0 + \theta_i(x, y, \mathbf{t}) = \Omega_i$ for $i = 1, \dots, M$. That is, one can assign an dominant order for the planes $z = \theta_i(x, y, \mathbf{t})$ at each point (x, y, \mathbf{t}) . Then we construct the regular triangulation for each $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{M-3}$ which gives a unique soliton graph via the duality map (11). Figure 9 illustrates the triangulation for the case of $\text{Gr}(2, 5)_{>0}$ with the κ -parameter $(\kappa_1, \dots, \kappa_5) = (-2, -1, 0, 1, 2)$.

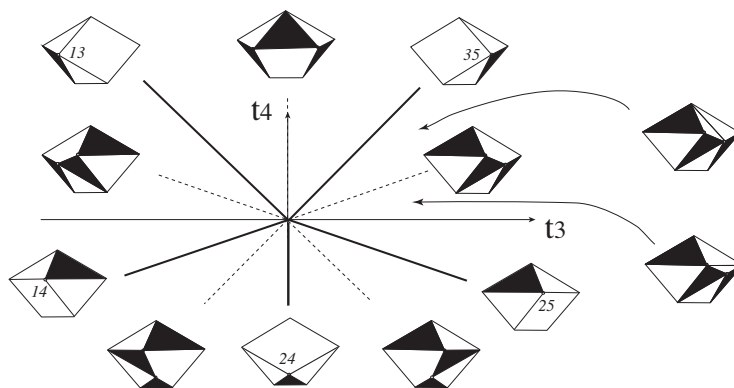


Figura 9: La struttura di cluster algebra dei grafi solitonici di $\text{Gr}(2, 5)_{>0}$. Ogni suddivisione regolare del pentagono è data dalla proiezione dell'involuppo convesso dell'insieme di punti $\{(\kappa_i, \kappa_i^2, \omega_i(\mathbf{t})) : i = 1, \dots, 5\}$ con $\omega_i(\mathbf{t}) = \kappa_i^3 t_3 + \kappa_i^4 t_4$. Le linee continue indicano la mutazione (o ribaltamento) della triangolazione, mentre le linee tratteggiate marciano la triangolazione dei poligoni bianchi. I grafi solitonici sono dati tramite la mappa di dualità (11).

A cluster algebra structure of the soliton graphs of $\text{Gr}(2, 5)_{>0}$. Each regular subdivision of pentagon is given by the projection of the convex hull of the set of points $\{(\kappa_i, \kappa_i^2, \omega_i(\mathbf{t})) : i = 1, \dots, 5\}$ with $\omega_i(\mathbf{t}) = \kappa_i^3 t_3 + \kappa_i^4 t_4$. The solid lines show the mutation (or flip) of the triangulations, and the dotted lines shows the triangulations of the white polygons. The soliton graphs are given via the duality map (11).

Si può identificare un'unica triangolazione regolare per ciascun punto $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{M-3}$ [22]. Lo spazio dei tempi \mathbb{R}^{M-3} si divide allora in diversi coni poliedrici (si veda la Figura 9), mentre i polipodi duali ai coni producono un *associaedro* generalizzato. Nel caso di $\text{Gr}(2, M)$, si può mo-

One can identify a unique regular triangulation for each point $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{M-3}$ [22]. The time space \mathbb{R}^{M-3} is then divided into several polyhedral cones (see Fig.9), and the dual polytope of the cones gives a generalized *associahedron*. In the case of $\text{Gr}(2, M)$, one can show that the dual

Associaedri

Il concetto di *associaedro* deriva dalla struttura che descrive i possibili ordinamenti che si devono adottare tra $n - 1$ elementi da *associare* con una operazione binaria. Quindi, dati $n - 1$ simboli ordinati $a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$, si intende descrivere tutti i possibili modi di aprire e chiudere parentesi per svolgere una data operazione binaria. Ad esempio, nel caso $n = 5$ otteniamo i casi $((a_1 a_2) a_3) a_4$, $(a_1 (a_2 a_3)) a_4$, $a_1 ((a_2 a_3) a_4)$, $a_1 (a_2 (a_3 a_4))$ e $(a_1 a_2) (a_3 a_4)$. La struttura algebrica che descriva questo insieme è un associaedro.

Gli associaedri sono estremamente importanti in ambito combinatorio, ove si possono citare gli alberi binari con $n - 1$ foglie, o i cammini su reticolo che non oltrepassino mai la diagonale principale. Tali corrispondenze danno una rilevanza peculiare al numero di triangolazioni ottenibili da n punti, che è pari al $(n - 2)$ -esimo *numero di Catalan*

$$C_{n-2} = \frac{1}{n-1} \cdot \binom{2n-4}{n-2}. \quad (12)$$

È da rimarcare il fatto che tanto la Grassmanniana totalmente positiva quanto l'associaedro rientrano nei più recenti studi sulle ampiezze di scattering in teorie quantistiche di campo particolarmente rilevanti, attraverso la nozione di *amplituedro* introdotta da Arkani-Hamed e Trnka

strare che il politopo duale è un associaedro in \mathbb{R}^{M-3} , i vertici del quale corrispondono ad un'unica triangolazione di un M -gono, o equivalentemente un grafo solitonico. Allora il numero di grafi solitonici per questo caso è dato dal numero di Catalan $C_{M-2} = \frac{1}{M-1} \binom{2M-4}{M-2}$. L'associaedro è un esempio di ciò che viene chiamato un *politopo secondario* in geometria combinatoria [21, 23, 24]. Notiamo anche che ogni vertice dell'associaedro corrisponde ad un insieme di variabili di cluster per il tipo A_{M-3} [19, 20, 12]. La struttura di cluster algebra su un grafo solitonico per $\text{Gr}(N, M)_{>0}$ è un interessante problema aperto (si veda [25]). Un altro importante problema aperto riguarda la classificazione di tutti i grafi solitonici della gerarchia di KP per le Grassmanniane TNN, usando diversi strumenti della geometria combinatoria, quali la *trasformata di Gale* [23, 24] (un risultato parziale è dato in [22]). Questi risultati saranno utilissimi per lo studio di configurazioni ondose complesse che noi spesso osserviamo sulla superficie di acqua bassa (ad esempio si veda [2, 26, 27]). Per esempio, la Figura 10 mostra un risultato sperimentale e il corrispondente solitone di KP che è la più complicata struttura ondosa ottenuta nel caso $\text{Gr}(2, 4)_{\geq 0}$.

polytope is the associahedron in \mathbb{R}^{M-3} whose vertices correspond to a unique triangulation of M -gon, equivalently the soliton graph. Then the number of soliton graphs for this case is given by the Catalan number $C_{M-2} = \frac{1}{M-1} \binom{2M-4}{M-2}$. The associahedron is an example of *secondary polytope* in the geometric combinatorics [21, 23, 24]. We also note that each vertex of the associahedron corresponds to a set of cluster variables for the type A_{M-3} [19, 20, 12]. A cluster algebra structure on the soliton graph for $\text{Gr}(N, M)_{>0}$ is an interesting open problem (see [25]). It is also an important open problem to classify all the soliton graphs of the KP hierarchy for the TNN Grassmannian using several tools from geometric combinatorics, such as the *Gale transform* [23, 24] (a partial result is given in [22]). The result will be very useful for the study of complex wave patterns we often observe on the surface of shallow water (see e.g. [2, 26, 27]). For example, Fig.10 shows the experimental result and the corresponding KP soliton which is the most complicated wave pattern obtained in the cases of $\text{Gr}(2, 4)_{\geq 0}$.



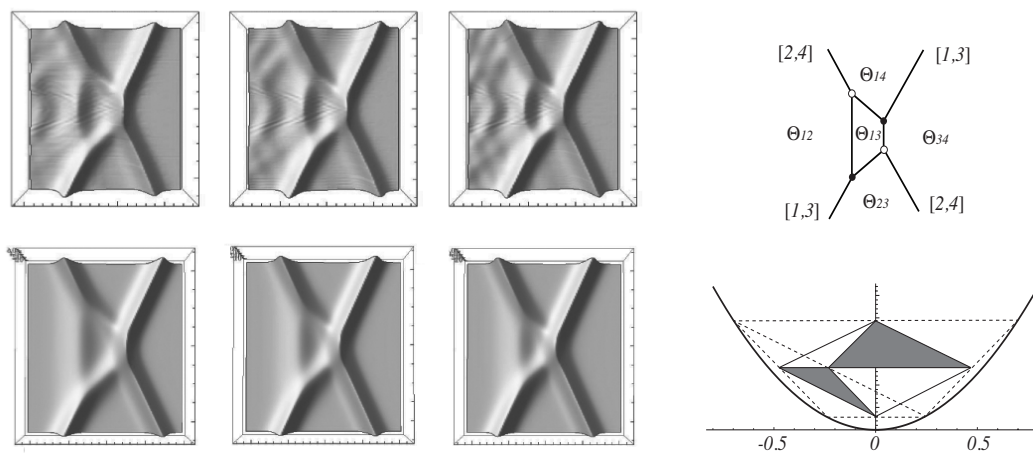


Figura 10: Configurazione ondosa generata in un contenitore d'acqua da Yeh e suoi collaboratori all' Oregon State University. Il riquadro superiore raffigura il risultato sperimentale. Si noti che oscillazioni di piccola ampiezza si stanno separando dalla struttura principale. Nel riquadro inferiore è riportato il corrispondente solitone di KP per un punto particolare della Grassmanniana $TNN Gr(2, 4)_{>0}$. A destra si mostra il grafo solitonico e la corrispondente triangolazione (si veda la Figura 6).

Wave pattern generated in the water tank by Yeh and his collaborator at Oregon State University. The upper panels show the experimental results. Note that the radiations are clearly separating from the main pattern. The lower panels show the corresponding KP soliton from a point of TNN Grassmannian $Gr(2, 4)_{>0}$, and the right panel shows the soliton graph and the corresponding triangulation (see Fig.6).

- [1] B. B. KADOMTSEV AND V. I. PETVIASHVILI: "On the stability of solitary waves in weakly dispersive media", *Sov. Phys. - Dokl.* **15** (1970) 539-541.
- [2] Y. KODAMA: " KP soliton in shallow water", *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** (2010) 434004.
- [3] Y. KODAMA AND H. YEH: " The KP theory and Mach reflection", *J. Fluid Mech.* **800** (2016) 766-786.
- [4] R. HIROTA: *The Direct Method in Soliton Theory.* Cambridge University Press, Cambridge (2004).
- [5] N. FREEMAN AND J. NIMMO: " Soliton-solutions of Korteweg-de Vries and Kadomtsev-Petviashvili equations: the Wronskian technique", *Phys. Lett. A* **95** (1983) 1-3.
- [6] S. CHAKRAVARTY AND Y. KODAMA: " Soliton solutions of the KP equation and application to shallow water waves", *Stud. Appl. Math.* **123** (2009) 83-151.
- [7] J. SATSUMA: " A Wronskian representation of N -soliton solutions of nonlinear evolution equations", *J. Phys. Soc. Japan* **46** (1979) 356-360.
- [8] M. SATO: " Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmannian manifold", *RIMS Kokyurok (Kyoto University)* **439** (1981) 30-46.
- [9] Y. KODAMA AND L. WILLIAMS: " The Deodhar decomposition of the Grassmannian and the regularity of KP soliton", *Adv. Math.* **244** (2013) 979-1032.
- [10] A. Postnikov Total positivity, Grassmannians, and networks, ArXiv Mathematics e-prints, math/0609764 <http://front.math.ucdavis.edu/math.CO/0609764> (2006).
- [11] S. CHAKRAVARTY AND Y. KODAMA: " Classification of the line-solitons of KP II", *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008) 275209.
- [12] Y. KODAMA AND L. WILLIAMS: " KP solitons and total positivity for the Grassmannian", *Invent. Math.* **198** (2014) 637-699.
- [13] Y. KODAMA: *KP solitons and the Grassmannian.* Springer Briefs in Mathematical Physics vol.22, Springer, Berlin (2017).
- [14] T. MIWA, M. JIMBO AND E. DATE: *Solitons: Differential equations, symmetries and infinite-dimensional algebras.* Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [15] A. BJÖRNER AND F. BRENTI: *Combinatorics of coxeter groups.* Springer Verlag, New York (2005).
- [16] V. DEODHAR: "On some geometric aspects of Bruhat orderings I. A finer decomposition of Bruhat cells", *Invent. Math.* **79** (1985) 499-511.
- [17] R. MARSH AND K. RIETSCH: " Parametrization of flag varieties", *Representation theory* **2** (2004) 212-242.
- [18] Y. KODAMA AND L. WILLIAMS: "KP solitons, total positivity, and cluster algebras", *PNAS* **108** (22) 2011.8984-8989
- [19] S. FOMIN, A. ZELEVINSKY: "Cluster Algebras I: Foundations", *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002) 497-529.
- [20] S. FOMIN, A. V. ZELEVINSKY: "Cluster algebras II: Finite type classification", *Invent. Math.* **154** (2003) 63-121. <http://www.math.lsa.umich.edu/fomin/cluster.html>

- [21] J. A. DELOERA, J. RAMBAU, F. SANTOS: *Triangulations, Algorithm and computation in Mathematics*. Springer, Berlin (2010).
- [22] J. Huang, *Classification of soliton graphs on totally positive Grassmannian*, PhD thesis, The Ohio State University (2015).
- [23] I. M. GELFAND, M. M. KAPRANOV, A. V. ZELEVINSKY: *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*. Birkhäuser, Boston (1994).
- [24] R. R. THOMAS: "Lectures in geometric combinatorics", *Student mathematical library: IAS/PARK city mathematical subseries* **33** (2006) AMS.
- [25] J. SCOTT: "Grassmannians and cluster algebras", *Proc. London Math. Soc.* **3** (2006) 345–380.
- [26] H. Yeh "Laboratory realization of Kodama's KP-solitons" Lectures delivered at the NSF/CBMS Regional Conference in the Mathematical Sciences Solitons in two-dimensional water waves and applications to tsunami UTPA, May 20-24 2013 <http://faculty.utpa.edu/kmaruno/nsfcbms-tsunami.html>
- [27] S. CHAKRAVARTY, Y. KODAMA: "Construction of KP solitons from wave patterns", *J.Phys. A: Math. Theor.* **47** (2014) 025201.
- [28] B. LECLERC, A. ZELEVINSKY: "Quasicommuting families of quantum Plücker coordinates", *AMS Transactions* **181** (1998) 85-108.
- [29] S. OH, A. POSTNIKOV AND D. E. SPYER: "Weak separation and plabic graphs", *Proc. London Math. Soc.* **110** (2015) 721-754.
- [30] H. YEH, W. LI AND Y. KODAMA: "Mach reflection and KP solitons in shallow water", *Eur. Phys. J. Special Topics* **185** (2010) 97-111.



Yuji Kodama: Y. Kodama è Full Professor presso The Ohio State University, Columbus (OH) , USA. Ha ottenuto il PhD in Fisica alla Nagoya University (Giappone) nel 1978 e in Matematica presso la Clakson University di New York nel 1980. Ha scritto oltre 200 articoli scientifici e diversi libri. Le sue citazioni ammontano a oltre 11mila. I suoi interessi scientifici spaziano in tutta la Fisica Matematica, in particolare i sistemi integrabili e le equazioni alle derivate parziali nonlineari, l' Algebra e le applicazioni all'Ingegneria.

Onde anomale

Petr Georgievich Grinevich

*L.D. Landau Institute for Theoretical Physics,
Russian Academy of Science, e
Lomonosov Moscow State University,
Department of Mechanics and Mathematics
Russia*

Paolo Maria Santini

*Dipartimento di Fisica, Università di Roma La Sapienza, e
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Roma*

L'equazione di Schrödinger non lineare (NLS) di tipo “focusing” è il modello universale più semplice nella descrizione della modulazione in ampiezza di onde quasi monocromatiche in mezzi debolmente non lineari, il meccanismo fisico principale per l'insorgenza di onde anomale in Natura. Di recente è stato risolto il problema di Cauchy per tale equazione sul segmento, con condizioni periodiche al bordo, il cui dato iniziale è una piccola perturbazione della soluzione di background instabile. Nel caso più semplice di un solo modo instabile, la dinamica è caratterizzata da una ricorrenza esatta di onde anomale descritte dal solitone di Akhmediev, i cui parametri, che variano ad ogni apparizione, sono legati in modo semplice alle condizioni iniziali. Tale ricorrenza esatta diventa una ricorrenza del tipo Fermi-Pasta-Ulam nei contesti fisici ai quali si applica la teoria NLS, come già confermato da alcuni esperimenti di ottica non lineare.

Introduzione

L'equazione di Schrödinger non lineare (NLS)

$$\begin{aligned} iu_t + u_{xx} + 2\eta|u|^2u &= 0, \\ u = u(x, t) \in \mathbb{C}, \quad \eta &= \pm 1 \end{aligned} \quad (1)$$

è il modello universale nella descrizione della propagazione di un'onda quasi monocromatica in un mezzo debolmente non lineare; in particolare, è rilevante nella teoria delle onde d'acqua [1], in ottica non lineare [2, 3, 4], nelle onde di Langmuir in un plasma [5], e nella teoria dei condensati di Bose-Einstein [6]. Il potenziale auto-indotto $V(x, t) = -\eta|u(x, t)|^2$ è attrattivo se $\eta = 1$ (la cosiddetta “focusing NLS”), e repulsivo se $\eta = -1$ (la cosiddetta “defocusing NLS”), e i due casi danno luogo a due dinamiche completamente diverse.

In modo qualitativo, se l'oscillatore armonico per equazioni differenziali ordinarie e l'onda monocromatica per equazioni differenziali alle derivate parziali (EDDP) giocano un ruolo rilevante nella descrizione delle piccole oscillazioni in una buca di potenziale, quando le oscillazioni non sono così piccole da poter trascurare le prime correzioni non lineari, siamo nel cosiddetto “regime debolmente non lineare”, nel quale l'equazione NLS ed altre EDDP nonlineari della fisica matematica giocano un ruolo rilevante. Sul nostro pianeta, ad esempio, dove le energie

coinvolte nei fenomeni fisici sono spesso piccole rispetto alle energie di legame della materia, tale regime è piuttosto frequente, e piccoli effetti non lineari giocano un ruolo rilevante su scale spazio-temporali lunghe.

Per fissare le idee principali, si consideri, ad esempio, la seguente famiglia di EDDP non lineari dispersive

$$[\partial_t + i\omega(-i\partial_x)]q = \mathcal{N}(q, q_x), \quad q(x, t) \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

dove $\mathcal{N}(q, q_x)$ è una funzione non lineare tale che $\mathcal{N}(\delta, \delta) \ll \mathcal{O}(\delta)$, con $0 \leq \delta \ll 1$, e $\omega(k)$ è la relazione di dispersione: $\omega(k) \in \mathbb{R}$, $\omega''(k) \neq 0$.

Se si cercano soluzioni della (2) nella forma di onde di "piccola ampiezza" e "quasi monocromatiche", esse possono approssimativamente essere descritte, per tempi finiti, attraverso la rappresentazione di Fourier

$$q(x, t) \sim \int_{\mathbb{R}} a(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk + c.c., \quad (3)$$

dove $a(k)$ è una funzione piccata intorno al numero d'onda k_0 ($a(k)$ è sensibilmente diversa da 0 in un piccolo intervallo di lunghezza ϵ intorno a k_0). Cambiando variabile: $k = k_0 + \delta k'$, e sviluppando ω intorno a k_0 , si ottiene l'onda quasi monocromatica

$$\begin{aligned} q(x, t) &\sim \delta A(x_1 - \omega'(k_0)t_1, t_2) e^{i\theta(x, t)} + c.c., \\ \theta(x, t) &= k_0 x - \omega(k_0)t, \\ x_1 = \delta x, \quad t_1 = \delta t, \quad t_2 = \delta^2 t, \end{aligned} \quad (4)$$

dove l'ampiezza lentamente variabile A è definita da

$$A(\xi, t_2) = \int_{\mathbb{R}} a(k_0 + \delta k') e^{i(k'\xi - \frac{1}{2}\omega''(k_0)k'^2 t_2)} dk', \quad (5)$$

e soddisfa all'equazione di Schrödinger per la particella libera

$$iA_{t_2} + \frac{\omega''(k_0)}{2} A_{\xi\xi} = 0. \quad (6)$$

L'equazione (4), combinando le due ipotesi fisiche del problema: **non linearità debole**, poiché l'ampiezza è piccola, e **quasi-monocromaticità**, a causa della lenta dipendenza dell'ampiezza A dalle variabili spazio-temporali, viene presa come il termine principale di uno sviluppo multiscale della soluzione dell'EDDP

non lineare (2). La non linearità ha due effetti importanti sullo sviluppo agli ordini successivi: generando i) armoniche di ordine superiore $\exp(\pm in\theta(x, t))$, $n \in \mathbb{N}$ e ii) secolarità, che vanno soppresse per garantire che la serie perturbativa sia asintotica [7]. La condizione per sopprimere la prima secolarità è che l'ampiezza dipenda dalle variabili lente attraverso la NLS

$$iA_{t_2} + \frac{\omega''(k_0)}{2} A_{\xi\xi} + b(k_0)|A|^2 A = 0, \quad (7)$$

dove il coefficiente $b(k)$ contiene le informazioni più rilevanti sulla struttura della non linearità in (2). Si veda, ad esempio, [8], per una derivazione dettagliata del risultato, e per mostrare che le condizioni per poter sopprimere secolarità di ordine superiore introducono la dipendenza dell'ampiezza da tempi più lunghi:

$$A((x_1 - \omega'(k_0)t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots)), \quad t_n = \epsilon^n t, \quad (8)$$

descritta da altrettanti flussi di simmetria che commutano con la NLS. Se $b(k_0) \in \mathbb{R}$, e se $b(k_0)\omega''(k_0) > 0$, allora siamo nel caso focusing; se $b(k_0)\omega''(k_0) < 0$, siamo nel caso defocusing. È infine un semplice esercizio ridefinire le variabili dipendenti e indipendenti per riscrivere l'equazione (7) nella forma standard (1). Quindi le equazioni (4),(7) ci dicono che **l'equazione NLS descrive la modulazione lenta dell'ampiezza di un'onda monocromatica in un regime debolmente non lineare.**

Si noti che l'esistenza di un insieme numerabile di simmetrie e costanti del moto in involuzione costruibili esplicitamente sono proprietà altamente non banali di una EDDP non lineare, e caratterizzano le proprietà algebriche e geometriche di un'EDDP "integrabile" [9, 10, 11], come l'equazione NLS. La proprietà aggiuntiva dell'esistenza della cosiddetta coppia di Lax [12], che permette di esprimere l'equazione integrabile come la condizione di integrabilità di una coppia di equazioni lineari per un campo ausiliario ψ :

$$\begin{aligned} \psi_x &= X(x, t, \lambda)\psi, \\ \psi_t &= T(x, t, \lambda)\psi, \\ \psi &= \psi(x, t, \lambda) \end{aligned} \quad (9)$$

dependente da un parametro "spettrale" λ , gioca un ruolo fondamentale nella possibilità di risol-

vere problemi di Cauchy rilevanti per l'equazione integrabile attraverso tecniche di natura spettrale [13, 14, 15, 16]: il problema di Cauchy sulla retta attraverso il metodo della Trasformata Spettrale (o Inverse Scattering (Spectral) Transform (IST)), una generalizzazione non lineare del metodo della Trasformata di Fourier per EDDP lineari; il problema di Cauchy sul segmento con condizioni periodiche al bordo attraverso il metodo del "Finite Gap" [17, 18, 19, 20, 21], una generalizzazione non lineare del metodo della serie di Fourier.

L'IST, introdotto nel lavoro [22] per un'altra EDDP non lineare integrabile, la famosa equazione di Korteweg-de Vries (KdV) [23]

$$v_t + v_{xxx} + vv_x = 0, \quad v = v(x, t), \quad (10)$$

modello universale nella descrizione di onde debolmente dispersive in regime debolmente non lineare [13, 14], è stato applicato con successo all'equazione NLS nel lavoro [24], in cui la coppia di Lax della NLS (1) fu scoperta nella seguente forma

$$\begin{aligned} X(\lambda; x, t) &= -i\lambda\sigma_3 + iU(x, t), \\ T(\lambda; x, t) &= 2\lambda X(\lambda; x, t) + iV(x, t), \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ U &= \begin{pmatrix} 0 & u(x, t) \\ \eta\bar{u}(x, t) & 0 \end{pmatrix}, \\ V &= \begin{pmatrix} \eta u(x, t)\bar{u}(x, t) & iu_x(x, t) \\ -i\eta\bar{u}_x(x, t) & -\eta u(x, t)\bar{u}(x, t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Una descrizione accurata di questi importanti risultati è al di là delle finalità di questa presentazione.

Universalità versus integrabilità: un problema filosofico?

Una domanda sorge spontanea a questo punto. L'equazione NLS è un modello universale nella descrizione di onde quasi monocromatiche debolmente non lineari (cioè, è molto speciale dal punto di vista delle applicazioni fisiche) e, al tempo stesso, è anche un modello integrabile (cioè, è molto speciale anche dal punto di vista matematico). È una coincidenza? La risposta è no, ed è

basata sul seguente elegante argomento [25]. Come abbiamo visto, un modello universale come la NLS può essere derivato da una classe molto vasta di EDDP non lineari, che includono sistemi di equazioni rilevanti in fisica, attraverso sviluppi multiscala; inoltre, gli sviluppi multiscala preservano l'integrabilità [26], nel senso che, se si applica il multiscala ad un modello integrabile (che possiede infinite simmetrie e costanti del moto, e una coppia di Lax), il modello universale ottenuto eredita le stesse proprietà di integrabilità (infinite simmetrie e costanti del moto, e una coppia di Lax). Quindi è sufficiente che, nella classe di EDDP che generano il modello universale attraverso il multiscala, esista almeno un modello integrabile, per dedurre l'integrabilità del modello universale [25]. Ad esempio, come abbiamo visto, la NLS è ottenuta, attraverso il multiscala, da una classe molto ampia di (sistemi di) EDDP come (2), che include l'equazione integrabile di KdV (10); quindi deduciamo che anche l'equazione NLS è integrabile. Tutto questo non implica, naturalmente, che ogni modello universale sia integrabile, poichè la vasta classe di equazioni da cui è ottenibile attraverso il multiscala potrebbe non contenere nessuna equazione integrabile (ad esempio, l'equazione NLS in 2 + 1 dimensioni $iu_t + u_{xx} + u_{yy} \pm 2|u|^2u = 0$, $u = u(x, y, t) \in \mathbb{C}$ è un modello universale non integrabile). Ma si può certamente affermare che un modello universale fisicamente rilevante deve essere speciale anche dal punto di vista matematico, poichè eredita tutte le proprietà matematiche speciali delle equazioni dalle quali può essere ricavato attraverso il multiscala.

Onde anomale in Natura e l'equazione NLS

Che cos'è un'onda anomala (OA)?. Riportiamo quanto è scritto, ad esempio, in due fonti diverse di Wikipedia.

1) [27]: "In oceanografia le OA sono un fenomeno marino di cui non si conoscono ancora né le cause né l'origine. Come definizione, un'onda è considerata anomala se supera 2,2 volte l'altezza significativa del treno d'onde a cui appartiene. Sono state osservate onde anomale alte da 25 a 30 metri e che sembrano formarsi in modo

imprevedibile. La differenza principale tra tali OA e un maremoto sta nel fatto che le OA si producono anche in pieno oceano, mentre i maremoti si amplificano solo avvicinandosi verso le coste.”

2) [28]: “Rogue waves ... are large, unexpected and suddenly appearing surface waves that can be extremely dangerous, even to large ships such as ocean liners ... In oceanography, rogue waves are more precisely defined as waves whose height is more than twice the significant wave height, which is itself defined as the mean of the largest third of waves in a wave record. Therefore, rogue waves are not necessarily the biggest waves found on the water; they are, rather, unusually large waves for a given sea state. Rogue waves seem not to have a single distinct cause, but occur where physical factors such as high winds and strong currents cause waves to merge to create a single exceptionally large wave. Rogue waves can occur in media other than water. They appear to be ubiquitous in nature and have also been reported in liquid helium, in nonlinear optics and in microwave cavities. Recent research has focused on optical rogue waves which facilitate the study of the phenomenon in the laboratory ... Once considered mythical and lacking hard evidence for their existence, rogue waves are now proven to exist and known to be a natural ocean phenomenon. Eyewitness accounts from mariners and damage inflicted on ships have long suggested they occurred. The first scientific evidence of the existence of rogue waves came with the recording of a rogue wave by the Gorm platform in the central North Sea in 1984 [29]. A stand-out wave was detected with a wave height of 11 meters in a relatively low sea state. However, the wave that caught the attention of the scientific community was the digital measurement of the Draupner wave, a rogue wave at the Draupner platform in the North Sea on January 1, 1995, with a maximum wave height of 25.6 meters (peak elevation of 18.5 meters). During that event, minor damage was also inflicted on the platform, far above sea level, confirming that the reading was valid [30].”

Ma cosa causa la comparsa di onde anomale in Natura, e qual'è il collegamento con

l'equazione NLS?

Si ritiene che la causa fisica principale siano gli effetti non lineari della instabilità della modulazione dell'ampiezza (Modulation Instability (MI)) [31, 32, 33, 34, 35, 36], e ora si vuole spiegare perchè **l'equazione integrabile NLS di tipo focusing giochi un ruolo essenziale nella descrizione della MI che causa l'apparizione delle OA in Natura.**

Come si è visto, la NLS è un modello universale nella descrizione della lenta modulazione dell'ampiezza di onde quasi monocromatiche debolmente non lineari. Inoltre la NLS (1) possiede la soluzione elementare costante

$$u_0(x, t) = \exp(2i\eta t), \quad (11)$$

ed è immediato mostrare che, se si perturba tale soluzione con un'onda monocromatica di piccola ampiezza:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{2i\eta t} + u_1(x, t), \\ u_1(x, t) &= \gamma_1(t)e^{ikx} + \gamma_{-1}(t)e^{-ikx}, \\ k &\in \mathbb{R}, \quad |\gamma_1|, |\gamma_{-1}| \ll 1, \end{aligned}$$

allora u_1 soddisfa all'equazione NLS linearizzata intorno alla soluzione u_0 :

$$iu_{1t} + u_{1xx} + 4\eta u_1 + 2\eta e^{4i\eta t} \bar{u}_1 = 0, \quad (12)$$

e si verifica facilmente che la dipendenza temporale della soluzione della (12) è descritta da una combinazione lineare di esponenziali del tipo $\exp[(\pm\Omega(k, \eta) + 2i\eta)t]$, dove

$$\Omega(k, \eta) = k\sqrt{4\eta - k^2}. \quad (13)$$

Ne segue che, nel caso defocusing $\eta = -1$, questa soluzione descrive piccole oscillazioni temporali del tipo $\exp(\pm i\tilde{\omega}(k)t)$, dove $\tilde{\omega}(k) = k\sqrt{4 + k^2}$; quindi la soluzione di fondo (11) è linearmente stabile. Nel caso focusing $\eta = 1$, la situazione è più interessante dal nostro punto di vista: per $|k| > 2$, abbiamo ancora piccole oscillazioni del tipo $\exp[\pm i\omega(k)t]$, where $\omega(k) = k\sqrt{k^2 - 4}$ e il background (11) è linearmente stabile; ma, per $|k| < 2$, abbiamo crescita e decrescita esponenziale del tipo $\exp(\pm\sigma(k)t)$, dove la velocità di crescita $\sigma(k)$ è definita da

$$\sigma(k) = k\sqrt{4 - k^2}, \quad |k| < 2. \quad (14)$$

Quindi la soluzione di background $\exp(2it)$ dell'equazione NLS di tipo focusing è linearmente instabile sotto perturbazioni monocromatiche di lunghezza d'onda sufficientemente grande ($|k| < 2$) [1, 37, 38, 40, 41, 42].

Si noti che, grazie alle proprietà di universalità della NLS di tipo focusing, la soluzione di background (11) describe, ad esempio, i) la prima correzione non lineare delle famose onde di Stokes [43] (non lineari e periodiche), rilevanti nella teoria delle onde d'acqua, ii) uno stato di intensità luminosa costante nell'ottica non lineare di una fibra ottica o di un cristallo fotorifrangente [4], e iii) uno stato a densità costante di bosoni attrattivi. Questi stati naturali di background sono quindi instabili rispetto ad opportune perturbazioni, e OA possono essere generate attraverso la dinamica descritta dalla NLS. Il nostro scopo ora è quello di mostrare, almeno per un numero finito di modi instabili, e grazie al ruolo giocato dall'integrabilità della NLS, il carattere deterministico delle apparizioni di OA: la loro apparizione può essere prevista in funzione dei dati iniziali e, viceversa, le proprietà dell'OA permettono di ricostruire informazioni dettagliate sulla perturbazione che l'ha generata.

La natura integrabile della NLS [24] permette di costruire molte soluzioni esatte della NLS corrispondenti a perturbazioni del background attraverso la degenerazione di soluzioni del tipo finite-gap [21, 44, 45, 46], quando la curva spettrale diventa razionale, o, più direttamente, usando tecniche classiche di tipo Darboux [47, 48] - Dressing [39, 49]. Tutti questi metodi fanno uso, in un modo o nell'altro, dello schema di integrabilità (11) dell'equazione, e rimandiamo alla corrispondente letteratura per i dettagli tecnici, che sono al di là degli scopi di questa presentazione.

Tra queste soluzioni esatte, citiamo il solitone di Peregrine [50], localizzato razionalmente nello spazio-tempo sul background (11), il cosiddetto solitone di Kuznetsov [51] - Kawata - Inoue [52] - Ma [53], esponenzialmente localizzato in x sul background e periodico nel tempo, ed il solitone trovato da Akhmediev, Eleonskii e Kulagin in [54], periodico in x e esponenzialmente localizzato nel tempo sul background (11), conosciuto come l' "Akhmediev breather". Queste soluzioni sono state generalizzate al caso di soluzioni "multi-solitoniche", che descrivono la

loro interazione non lineare (si veda, ad esempio, [44, 55, 56, 57, 58]). Si osservi che i solitoni di tipo Peregrine sono "omoclini", descivendo l'apparizione di OA apparentemente dal nulla, che scompaiono poi nel futuro, mentre i solitoni di tipo Akhmediev sono "quasi omoclini", ritornando al background originale a meno di un fattore moltiplicativo di fase. Sono state trovate anche generalizzazioni di tali soluzioni al caso di equazioni del tipo NLS a più componenti, descriventi l'interazione non lineare di più onde quasi monocromatiche (si veda, ad esempio, [59, 60, 61]).

Poichè, nel resto di questa presentazione, concentreremo la nostra attenzione sul caso di soluzioni derivanti da perturbazioni periodiche del background, la più semplice soluzione di questo tipo è l'Akhmediev breather

$$A_1(x, t; \theta, X, T, \rho) = \frac{\exp(2it + i\rho) \cosh[\sigma(\theta)(t - T) + 2i\theta] + \sin \theta \cos[k(\theta)(x - X)]}{\cosh[\sigma(\theta)(t - T)] - \sin \theta \cos[k(\theta)(x - X)]}, \quad (15)$$

$$k(\theta) = 2 \cos \theta, \\ \sigma(\theta) = k(\theta) \sqrt{4 - k^2(\theta)} = 2 \sin(2\theta),$$

soluzione esatta della NLS di tipo focusing per tutti i valori dei parametri reali θ, X, T, ρ . È facile verificare che questa soluzione elementare è esponenzialmente localizzata nel tempo sul background u_0 , cambiandolo attraverso il fattore moltiplicativo $e^{4i\theta}$

$$A_1(x, t; \theta, X, T, \rho) \rightarrow e^{2it+i(\rho \pm 2\theta)}, \quad \text{per } t \rightarrow \pm\infty, \quad (16)$$

e che il suo modulo è massimo nel punto (X, T) , con $|A_1(X, T; \theta, X, T, \rho)| = 1 + 2 \sin \theta$ (si veda la Fig. 1).

La ricorrenza esatta dell'onda anomala nel caso di un solo modo instabile

Una delle questioni di maggiore importanza in relazione alle sopra citate soluzioni esatte, è se queste compaiano in modo significativo in problemi di Cauchy fisicamente rilevanti, e, se sì, quali siano i meccanismi attraverso i quali si manifestano. Per rispondere a questi quesiti,

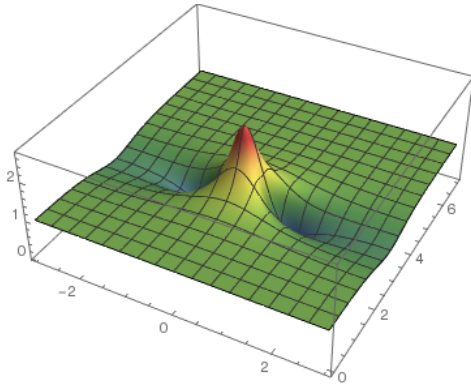


Figura 1: Il grafico 3D del modulo dell'Akhmediev breather $A_1(x,t;\theta,0,3,0)$, dove $\theta = \arccos(\pi/L)$, $L = 6$ è il periodo, e $x \in [-L/2, L/2]$, $t \in [0, 7]$.

è necessario risolvere quello che chiamiamo “il problema di Cauchy per le onde anomale”:

$$\begin{aligned} iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u &= 0, \\ u(x, 0) &= 1 + \epsilon(x), \quad \|\epsilon(x)\|_\infty = \epsilon \ll 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Se limitiamo le nostre considerazioni al caso periodico in x , con periodo L , la perturbazione iniziale può essere sviluppata in serie di Fourier:

$$\begin{aligned} \epsilon(x) &= \sum_{j \geq 1} \left(c_j e^{ik_j x} + c_{-j} e^{-ik_j x} \right), \\ k_j &= \frac{2\pi}{L} j, \quad |c_j| = O(\epsilon), \end{aligned} \quad (18)$$

ed è facile mostrare, usando le precedenti considerazioni di stabilità (che conducono alla condizione di instabilità $|k| < 2$), che solo i primi N modi di Fourier $\pm k_j$, $1 \leq j \leq N$, sono instabili, dove $N \in \mathbb{N}$ è definito attraverso le disuguaglianze $\pi L - 1 < N < \pi L$, poichè danno luogo a onde esponenzialmente crescenti e decrescenti di ampiezza $O(\epsilon e^{\pm \sigma_j t})$, dove le velocità di crescita σ_j sono definite da

$$\sigma_j = \sigma(k_j) = k_j \sqrt{4 - k_j^2} > 0, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (19)$$

mentre i rimanenti modi danno luogo a piccole oscillazioni di ampiezza $O(\epsilon e^{\pm i\omega_j t})$, where $\omega_j = k_j \sqrt{k_j^2 - 4}$, $j > N$, e quindi sono stabili.

Il problema di Cauchy periodico (17),(18) è stato risolto, a meno di correzioni di $O(\epsilon^2)$ e per perturbazioni iniziali generiche di $O(\epsilon)$ del background (11), attraverso il metodo del “finite gap” in [62] per un modo instabile, e, più di recente,

in [63] per un numero finito di modi instabili, ottenendo una rappresentazione uniforme della soluzione nello spazio-tempo. Sebbene le soluzioni ottenute attraverso gli strumenti algebro-geometrici del finite gap siano rapporti di funzioni θ di Riemann (definite come somme infinite di opportuni esponenziali), i cui parametri sono definiti attraverso espressioni molto implicite che coinvolgono integrali su opportune superfici di Riemann [17, 18, 19, 20, 21], **la natura molto speciale del problema di Cauchy (17) per le onde anomale ha due conseguenze molto importanti.** 1) Essa permette di esprimere tutti i parametri algebro-geometrici, agli ordini rilevanti, attraverso funzioni elementari dei dati iniziali; 2) in ogni intervallo temporale dell’evoluzione, solo un numero finito di esponenziali che compaiono nella definizione delle funzioni θ di Riemann giocano un ruolo non trascurabile, implicando che la soluzione del problema di Cauchy (17),(18) può sempre essere scritta, all’ordine principale, attraverso funzioni elementari, diverse in diversi intervalli temporali [62, 63].

Poichè la soluzione è espressa attraverso funzioni elementari, diverse in diversi intervalli temporali, che si raccordano nelle regioni asintotiche intermedie, tecniche di raccordo di sviluppi asintotici (Matched Asymptotic Expansions (MAEs)) si presentano come approccio alternativo al problema, e sono state usate con successo per trattare il caso di un modo instabile, e quello di due modi instabili, in condizioni particolari [64]. MAEs coinvolgono una matematica più semplice, ma la loro applicabilità si estende al caso di più modi instabili solo per dati iniziali molto speciali [63].

Per mantenere la presentazione al livello più semplice, d’ora in avanti limiteremo le nostre considerazioni al caso di un solo modo instabile ($N=1$), il modo $k_1 = 2\pi/L$, con $\pi < L < 2\pi$, che può essere trattato con successo usando MAEs con l’aggiunta della conoscenza dell’Akhmediev breather (15) [64].

Abbiamo in mente il seguente **scenario qualitativo di ricorrenza**. Il modo instabile esponenzialmente crescente e inizialmente di $O(\epsilon)$, diventa di $O(1)$ a tempi dell’ $O(\sigma_1^{-1} |\log \epsilon|)$, quando si entra nello stadio non lineare della MI e ci si aspetta la formazione di una struttura coerente

di $O(1)$, descritta da una soluzione solitonica di NLS sul background instabile (11), la cosiddetta OA. A causa ancora della MI, questa struttura coerente viene distrutta in un tempo finito, e si entra nel terzo stadio asintotico, descritto, come il primo, dal background più una perturbazione di $O(\epsilon)$. Questo secondo stadio linearizzato darà luogo, ancora a causa della MI, alla formazione di una seconda OA, e questa alternanza tra stadi lineari e non lineari di MI deve continuare per sempre, nel modello integrabile NLS, dando luogo ad una successione infinita di OA.

Dobbiamo quindi risolvere le seguenti problematiche di tipo deterministico. Per una condizione iniziale generica del tipo (17), (18), come prevedere:

- 1) il "tempo di prima apparizione" dell'OA;
- 2) il "tempo di ricorrenza", che misura l'intervallo temporale tra due apparizioni consecutive delle OA;
- 3) la forma analitica di questa sequenza deterministica di onde anomale.

Si consideri innanzitutto il caso più semplice in cui la perturbazione iniziale (18) eccita solo il modo instabile k_1 :

$$\begin{aligned} \epsilon(x) &= c_1 e^{ik_1 x} + c_{-1} e^{-ik_1 x}, \\ |c_1|, |c_{-1}| &= O(\epsilon), \quad 0 < \epsilon \ll 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Quindi, nell'intervallo $|t| \leq O(1)$, siamo nel regime linearizzato descritto dalla (12), la cui soluzione è

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{2it} \left(1 + \frac{|\alpha_1|}{\sin 2\phi_1} e^{\sigma_1 t + i\phi_1} \cos[k_1(x - X_1^+)] + \frac{|\beta_1|}{\sin 2\phi_1} e^{-\sigma_1 t - i\phi_1} \cos[k_1(x - X_1^-)] \right) \\ &+ O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (21)$$

dove

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \bar{c}_1 - e^{2i\phi_1} c_{-1}, \quad \beta_1 = \bar{c}_{-1} - e^{-2i\phi_1} c_1, \\ X_1^+ &= \frac{\arg(\alpha_1) - \phi_1 + \pi/2}{k_1}, \\ X_1^- &= \frac{-\arg(\beta_1) - \phi_1 + \pi/2}{k_1}, \\ k_1 &= 2 \cos \phi_1 \Leftrightarrow \phi_1 = \arccos(k_1/2), \\ \sigma_1 &= 2 \sin(2\phi_1), \end{aligned} \quad (22)$$

Il dato iniziale (20) si divide in onde esponenzialmente crescenti e decrescenti, rispettivamente le onde α e β , e ciascuna di queste trasporta metà dell'informazione contenuta nel dato iniziale. A $t = O(\sigma_1^{-1} |\log \epsilon|)$, l'onda α , esponenzialmente crescente, diventa $O(1)$, e deve essere descritta da una soluzione esatta della NLS, che si raccorda con la formula asintotica

$$u(x, t) \sim e^{2it} \left(1 + \frac{|\alpha_1|}{\sin 2\phi_1} e^{\sigma_1 t + i\phi_1} \cos[k_1(x - X_1^+)] \right), \quad (23)$$

ottenuta valutando (21) nella regione intermedia $1 \ll t \ll O(\sigma_1^{-1} |\log \epsilon|)$. Stiamo quindi cercando, nella regione non lineare $t = O(\sigma_1^{-1} |\log \epsilon|)$, una soluzione esatta ad un modo della NLS, periodica in x e transiente in t , che si raccordi con (23) nella regione di sovrapposizione $1 \ll t \ll O(\sigma_1^{-1} |\log \epsilon|)$. Il candidato naturale è l'Akhmediev breather (15), i cui 4 parametri reali devono essere fissati in modo univoco attraverso il raccordo. È lasciato come esercizio al lettore la verifica che il raccordo fissa univocamente i 4 parametri nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \rho &= 2\phi_1, \quad \theta = \phi_1 \Rightarrow k(\theta) = k_1 = 2 \cos \phi_1, \\ \sigma(\theta) &= \sigma_1 = 2 \sin(2\phi_1), \\ X &= X_1^+, \quad T = T_1 \equiv \frac{1}{\sigma_1} \log \left(\frac{\sigma_1^2}{2|\alpha_1|} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Quindi **la prima OA appare nell'intervallo $|t - T_1| \leq O(1)$, ed è descritta dall'Akhmediev breather:**

$$u(x, t) = A_1(x, t; \phi_1, X_1^+, T_1, 2\phi_1) + O(\epsilon), \quad (25)$$

i cui parametri sono espressi in funzione dei dati iniziali attraverso funzioni elementari. È importante notare che la prima OA contiene informazioni solo su metà dei dati iniziali (quella codificata nel parametro α_1 : nell'onda α_1), e che il modulo della prima OA prende il suo massimo a $t = T_1$, nel punto $x = X_1^+$, mod L ; e il valore di tale massimo è

$$|u(X_1^+, T_1)| = 1 + 2 \sin \phi_1 < 1 + \sqrt{3} \sim 2.732. \quad (26)$$

Questo limite superiore, conseguenza della formula $\sin \phi_1 = \sqrt{1 - (\pi/L)^2}$, $\pi < L < 2\pi$, è ottenuto quando $L \rightarrow 2\pi$. Inoltre notiamo che la

posizione $x = X_1^+$ del massimo dell'OA coincide con la posizione del massimo della sinusoidale che cresce nella regione descritta dalla teoria linearizzata; questo è dovuto all'assenza della interazione non lineare con altri modi instabili, se $N = 1$.

Per trovare la relazione tra due OA consecutive, si potrebbe procedere cercando di costruire lo stadio asintotico successivo, il secondo stadio di MI lineare, attraverso il raccordo con il primo stadio non lineare. Ma questo raccordo è piuttosto difficile per la ragione seguente. L'onda α_1 , inizialmente di $O(\epsilon)$, diventa l'OA di $O(1)$ (25) e quindi decade esponenzialmente, mentre l'onda β_1 , anch'essa inizialmente di $O(\epsilon)$, diventa di $O(\epsilon^2)$ durante il primo stadio non lineare di MI, e quindi cresce esponenzialmente, diventando il responsabile principale per la generazione della seconda OA delle sequenza (questo meccanismo è anche un'importante sorgente di instabilità). Da queste considerazioni, per ottenere la descrizione analitica della seconda OA, sarebbe necessario scavare all' $O(\epsilon^2)$ quando la prima OA appare, per estrarre utili informazioni sull'onda β_1 nascosta, e questo è tecnicamente molto difficile.

Fortunatamente questa difficoltà può essere superata con un semplice trucco, che consiste nell'andare indietro nel tempo dalla condizione iniziale (20). Infatti la formula (21) descrive la dinamica NLS anche per tempi negativi; ma, in questo caso, è l'onda β a essere dominante nella regione asintotica $1 \ll |t| \ll O(\sigma_1^{-1} |\log \epsilon|)$, $t < 0$:

$$u(x, t) \sim e^{2it} \left(1 + \frac{|\beta_1|}{\sin 2\phi_1} \cos[k_1(x - X_1^-)] e^{-\sigma_1 t - i\phi_1} \right). \quad (27)$$

Ne segue che, nella regione $|t| = O(\sigma_1^{-1} |\log \epsilon|)$, $t < 0$, la soluzione è di nuovo descritta dall'Akhmediev breather (15), i cui parametri sono ora fissati dal raccordo con (27). Ripetendo i calcoli di prima, si ottiene che, *andando a ritroso nel tempo, la prima OA appare quando $|t + T_1^-| \leq O(1)$ e, in questa regione, è descritta di nuovo dall'Akhmediev breather, ma con*

parametri diversi:

$$u(x, t) = A_1(x, t; \phi_1, X_1^-, -T_1^-, -2\phi_1) + O(\epsilon),$$

$$T_1^- \equiv \frac{1}{\sigma_1} \log \left(\frac{\sigma_1^2}{2|\beta_1|} \right). \quad (28)$$

Confrontando le due OA consecutive (28) e (25) e, in particolare, la loro espressione rispettivamente ai tempi $t = -T_1^-$ e $t = T_1$:

$$u(x, -T_1^-) = e^{(-2iT_1^- - 2i\phi_1)}$$

$$\times \frac{\cos(2\phi_1) + \sin \phi_1 \cos[\sigma_1(x - X_1^-)]}{1 - \sin \phi_1 \cos[k_1(x - X_1^-)]} + O(\epsilon),$$

$$u(x, T_1) = e^{(2iT_1 + 2i\phi_1)}$$

$$\times \frac{\cos(2\phi_1) + \sin \phi_1 \cos[\sigma_1(x - X_1^+)]}{1 - \sin \phi_1 \cos[k(x - X_1^+)]} + O(\epsilon),$$

si osserva che le due funzioni di x coincidono, all'ordine principale, a meno di un fattore di fase moltiplicativo e a meno di una traslazione spaziale:

$$u(x, T_1) = e^{2i\Delta T + 4i\phi_1} u(x - \Delta X, -T_1^-) + O(\epsilon)$$

dove

$$\Delta T = T_1 + T_1^- = \frac{2}{\sigma_1} \log \left(\frac{\sigma_1^2}{2\sqrt{|\alpha_1 \beta_1|}} \right), \quad (29)$$

$$\Delta X = X_1^+ - X_1^- = \frac{\arg(\alpha_1 \beta_1)}{k_1}.$$

Si conclude che *il problema di Cauchy (17),(20) dà luogo a una successione infinita di OA, e l'ennesima OA della successione è descritta, nell'intervallo $|t - T_1 - (n - 1)\Delta T| \leq O(1)$, dalla formula:*

$$u(x, t) = A_1(x, t; \phi_1, x_1^{(n)}, t_1^{(n)}, \rho^{(n)}) + O(\epsilon), \quad n \geq 1, \quad (30)$$

dove

$$x_1^{(n)} = X_1^+ + (n - 1)\Delta X,$$

$$t_1^{(n)} = T_1 + (n - 1)\Delta T, \quad (31)$$

$$\rho^{(n)} = 2\phi_1 + (n - 1)4\phi_1,$$

in funzione dei dati iniziali (si veda la Fig. 2).

Ricordando le proprietà asintotiche (16) dell'Akhmediev breather, si può facilmente costruire la seguente *rappresentazione uniforme nello spazio-tempo della soluzione del problema di Cauchy, attraverso funzioni elementari, che descrive le prime n*

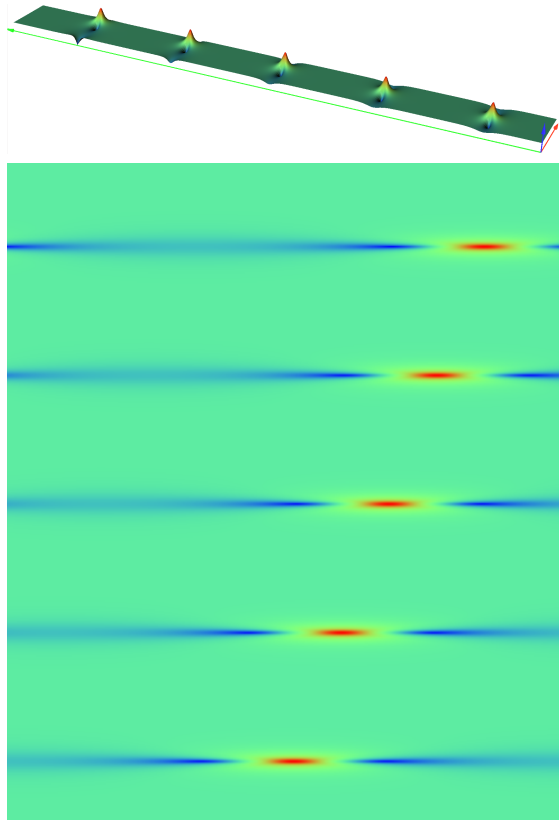


Figura 2: Il grafico 3D e quello delle superfici di livello di $|u(x, t)|$, ottenuti attraverso l'integrazione numerica della NLS col cosiddetto "Split Step Fourier Method" (SSFM) [65, 66, 67, 68], descrivono la ricorrenza di Akhmediev breathers. Qui $L = 6$ ($N = 1$), con $c_1 = \epsilon/2$, $c_{-1} = \epsilon(0.3 - 0.4i)/2$, $\epsilon = 10^{-4}$; l'asse corto è quello delle x , con $x \in [-L/2, L/2]$. L'output numerico è in accordo perfetto con le predizioni teoriche.

apparizioni delle OA, per $0 \leq t \leq t_1^{(n)} + O(1)$:

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^n A_1 \left(x, t; \phi_1, x_1^{(m)}, t_1^{(m)}, \rho^{(m)} \right) - \frac{1 - e^{4in\phi_1}}{1 - e^{4i\phi_1}} e^{2it}, \quad x \in [0, L], \quad (32)$$

dove i parametri $x_1^{(m)}$, $t_1^{(m)}$, $\rho^{(m)}$, $m \geq 0$, sono definiti in (31). Questa rappresentazione è accurata con un errore dell' $O(\epsilon^2)$ nella descrizione degli stadi lineari di MI, e dell' $O(\epsilon)$ nella descrizione degli stadi non lineari di MI.

È importante osservare che, se si sostituisce la condizione iniziale (20) con la perturbazione generica (18), sempre nel caso di un solo modo instabile k_1 , la ricorrenza delle OA descritta dalla (32) non subirebbe variazioni all' $O(1)$, e le

differenze apparirebbero all' $O(\epsilon)$ [64].

Riepilogando, si ha il seguente risultato.

La soluzione del problema di Cauchy periodico descrive, nel caso semplice di un solo modo instabile, una ricorrenza esatta di Akhmediev breathers, i cui parametri, diversi ad ogni apparizione, sono espressi in funzione dei dati iniziali attraverso funzioni elementari. T_1 è il tempo di prima apparizione dell'OA (il tempo nel quale l'OA raggiunge il massimo del suo modulo), X_1 è la posizione di tale massimo, $1 + 2 \sin \phi_1$ è il valore di tale massimo, ΔT è il tempo di ricorrenza (l'intervallo di tempo tra due apparizioni successive di OA), ΔX è la traslazione spaziale della posizione del massimo nella ricorrenza. Infine, dopo ogni apparizione, l'OA cambia il background attraverso il fattore di fase moltiplicativo $\exp(4i\phi_1)$.

Il problema inverso delle onde anomale

Abbiamo appena visto che "la parte instabile" $\epsilon_{unst}(x) \equiv c_1 e^{ik_1 x} + c_{-1} e^{-ik_1 x}$ della perturbazione iniziale (18) dà il contributo dominante (quello di $O(1)$) alla ricorrenza di OA. È anche possibile risolvere il problema inverso delle OA, nel quale si ricostruisce, dalla "misura sperimentale" dei parametri $O(1)$ della ricorrenza, la parte instabile $\epsilon_{unst}(x)$ della perturbazione iniziale di $O(\epsilon)$ [64].

Dalla misura del numero d'onda k_1 , si costruisce $\phi_1 = \arccos(k_1/2)$ e $\sigma_1 = k_1 \sqrt{4 - k_1^2}$. Dalla misura dei punti $(x_1^{(1)} = X_1^+, t_1^{(1)} = T_1)$ e $(x_1^{(2)} = X_1^+ + \Delta X, t_1^{(2)} = T_1 + \Delta T)$ nei quali il modulo della prima e della seconda OA hanno i loro massimi, si costruiscono, usando le (31),(29),(22), i parametri α_1, β_1 , attraverso le formule

$$\begin{aligned} |\alpha_1| &= \frac{\sigma_1^2}{2} e^{-\sigma_1 t_1^{(1)}}, \\ \arg \alpha_1 &= k_1 x_1^{(1)} + \phi_1 - \frac{\pi}{2}, \\ |\beta_1| &= \frac{\sigma_1^2}{2} e^{-\sigma_1 (t_1^{(2)} - 2t_1^{(1)})}, \\ \arg \beta_1 &= k_1 (x_1^{(2)} - 2x_1^{(1)}) - \phi_1 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Infine, dalla conoscenza di α_1, β_1 , si costruiscono i coefficienti di Fourier c_1, c_{-1} della

perturbazione iniziale:

$$c_1 = \frac{\bar{\alpha}_1 + e^{-2i\phi_1} \beta_1}{1 - e^{-4i\phi_1}}, \quad c_{-1} = \frac{e^{2i\phi_1} \alpha_1 + \bar{\beta}_1}{1 - e^{4i\phi_1}}. \quad (34)$$

La ricorrenza di onde anomale in fisica

La ricorrenza di OA nel periodico è stata già osservata (si veda, ad esempio, [69, 70, 71, 72, 73]), e esperimenti recenti su onde d'acqua [74], in fibre ottiche [75], e in un cristallo fotorifrangente [76] riproducono accuratamente fenomeni di ricorrenza. In particolare, in [76], un interferometro a tre onde simmetriche è stato usato per generare un'onda di background con una perturbazione monocromatica del tipo (20), che si propaga in un cristallo fotorifrangente (la variabile tempo della NLS ha, qui, il significato di distanza di propagazione all'interno del cristallo).

Poichè la NLS descrive le diverse fisiche degli esperimenti di cui sopra solo in prima approssimazione, ci si deve aspettare che l'esatta ricorrenza di onde anomale precedentemente illustrata diventi una ricorrenza di tipo "Fermi-Pasta-Ulam" [77], prima che la "termalizzazione" distrugga la coerenza del fenomeno. Nell'esperimento [76] sono state infatti osservate fino a tre ricorrenze, che sono state confrontate con le formule esatte della teoria NLS, ottenendo un ottimo accordo qualitativo e quantitativo. È stato anche mostrato che la ricorrenza scompare del tutto quando il cristallo lavora in regime diverso da quello integrabile.

Le formule esatte che descrivono la ricorrenza di OA nel modello NLS

i) dovrebbero essere confrontate con i dati sperimentali già disponibili, o ottenibili nel prossimo futuro, in tutti i contesti fisici nei quali si ritiene che la NLS dia una descrizione al prim'ordine della realtà, per testare quanto bene, appunto, la NLS descriva la fisica in esame anche in presenza di instabilità;

ii) dovrebbero anche essere usate per ricostruire, dai dati sperimentali della ricorrenza, i dati iniziali di $O(\epsilon)$ in modo teorico, confrontandoli con quelli effettivamente utilizzati negli esperimenti (si veda le formule precedenti, e i risultati [76]).

Concludiamo questa presentazione i) con la convinzione che il buon accordo tra le formule

teoriche e le osservazioni sperimentali riscontrato nel lavoro [76], sia ottenuto anche in esperimenti con fibre ottiche, e con onde d'acqua in una vasca, e ii) con l'auspicio che tale accordo si verifichi anche in condensati di bosoni attrattivi.



- [1] V. E. Zakharov: "Stability of period waves of finite amplitude on surface of a deep fluid", *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **9** (1968) 190-194.
- [2] D. R. Solli, C. Ropers, P. Koonath and B. Jalali: "Optical rogue waves", *Nature* **450** (2007) 1054.
- [3] U. Bortolozzo, A. Montina, F.T. Arecchi, J.P. Huignard, S. Residori: "Spatiotemporal pulses in a liquid crystal optical oscillator", *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 3-6.
- [4] D. Pierangeli, F. Di Mei, C. Conti, A. J. Agranat and E. DelRe: "Spatial Rogue Waves in Photorefractive Ferroelectrics", *Phys. Rev. Lett.* **115** (2015) 093901.
- [5] C. Sulem and P-L. Sulem: *The nonlinear Schrödinger equation (Self focusing and wave collapse)*. Springer, Berlin (1999).
- [6] Yu. V. Bludov, V. V. Konotop, N. Akhmediev: "Matter rogue waves", *Physical Review A* **80** (2009) 033610.
- [7] C. M. Bender and S. A. Orszag: *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. Springer, Berlin (1999).
- [8] A. Degasperis, S. V. Manakov and P. M. Santini: "Multiple-Scale Perturbation beyond the Nonlinear Schrödinger Equation. I", *Physica D* **100** (1997) 187-211.
- [9] F. Magri: "A simple model of the integrable Hamiltonian equation", *J. Math. Phys.* **19** (1978) 1156-1162.
- [10] B. Fuchssteiner and A. S. Fokas: "Symplectic structures, their Backlund transformations and hereditary symmetries", *Physica D: Nonlinear Phenomena* **4** (1981) 47-66.
- [11] P. M. Santini, A. S. Fokas: "Recursion Operators and Bi-Hamiltonian Structures in Multidimensions. I", *Comm. Math. Phys.* **115** (1988) 375.
- [12] P. Lax: "Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves", *Comm. Pure Applied Math.* **21** (1968) 467-490.
- [13] V. E. Zakharov, S. V. Manakov, S. P. Novikov and L. P. Pitaevsky: *Theory of solitons*. Plenum, New York (1984).
- [14] M. J. Ablowitz and H. Segur: *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics, (1981).

- [15] M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson: *Solitons, nonlinear evolution equations and Inverse Scattering*. London Math. Society Lecture Note Series, vol. 194, Cambridge University Press, Cambridge (1991).
- [16] F. Calogero and A. Degasperis: *Spectral Transform and Solitons, tools to solve and investigate nonlinear evolution equations. I*. North-Holland, Amsterdam (1982).
- [17] S. P. Novikov, The periodic problem for the Korteweg-de Vries equation, *Funct. Anal. Appl.*, **8:3** (1974), 236–246.
- [18] A. R. Its, and V. P. Kotljarov: “Explicit formulas for solutions of a nonlinear Schrödinger equation”, *Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR Ser. A* **1051** (1976) 965-968.
- [19] I. M. Krichever, Methods of algebraic Geometry in the theory on nonlinear equations, *Russian Math. Surv.* **32**, 185-213 (1977).
- [20] B. A. Dubrovin: “Theta-functions and nonlinear equations”, *Russ. Math. Surv.* **36** (1981) 11.
- [21] E.D. Belokolos, A.I. Bobenko, V.Z. Enolski, A.R. Its, V.B. Matveev: *Algebro-geometric Approach in the Theory of Integrable Equations*. Springer Series in Nonlinear Dynamics, Springer, Berlin (1994).
- [22] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura: “Method for Solving the Korteweg-deVries Equation”, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1095.
- [23] D. J. Korteweg, G. de Vries: “On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves”, *Philosophical Magazine* **39** (1895) 422-443.
- [24] V. E. Zakharov, A. B. Shabat: “Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media”, *Sov. Phys. JETP* **34** (1972) 62-69.
- [25] F. Calogero and W. Eckhaus: “Nonlinear evolution equations, rescalings, model PDEs and their integrability: I”, *Inverse Problems* **3** (1987) 229 – 62.
- [26] V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov: “Multi-scale expansions in the theory of systems integrable by the inverse scattering transform”, *Physica D* **18** (1986) 455-463.
- [27] Wikipedia, the free encyclopedia, [Onde Anomale](#)
- [28] Wikipedia, the free encyclopedia, [Rogue Wave](#)
- [29] P. Müller, C. Garret and Al Osborne: “Rogue Waves”, *The Fourteenth 'Aha Huliko' A Hawaiian Winter Workshop, Meeting Report*. Soest.hawaii.edu. *Oceanography* (2005) 66-70.
- [30] S. Haver: “Freak wave event at Draupner jacket”, *January 1 1995 (Report)*, Statoil, Tech. Rep. PTT-KU-MA (2003) .
- [31] K. L. Henderson and D. H. Peregrine and J. W. Dold: “Unsteady water wave modulations: fully nonlinear solutions and comparison with the nonlinear Schrödinger equation”, *Wave Motion* **29** (1999) 341.
- [32] K. B. Dysthe and K. Trulsen: “Note on Breather Type Solutions of the NLS as Models for Freak-Waves”, *Physica Scripta* **T82** (1999) 48-52.
- [33] A. Osborne, M. Onorato and M. Serio: “The nonlinear dynamics of rogue waves and holes in deep-water gravity wave trains”, *Phys. Lett. A* **275** (2000) 386.
- [34] C. Kharif and E. Pelinovsky: “Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon”, *Eur. J. Mech. B/Fluids J. Mech.* **22** (2004) 603-634.
- [35] C. Kharif and E. Pelinovsky: “Focusing of nonlinear wave groups in deep water”, *JETP Lett.* **73** (2001) 170 - 175.
- [36] M. Onorato, S. Residori, U. Bortolozzo, A. Montina, F.T. Arcelli: “Rogue waves and their generating mechanisms in different physical contexts”, *Physics Reports* **528** (2013) 47-89.
- [37] V. I. Vespalov and V. I. Talanov: “Filamentary structure of light beams in nonlinear liquids”, *JETP Letters*. **3** (1966) 307.
- [38] T. B. Benjamin, J. E. Feir: “The disintegration of wave trains on deep water. Part I. Theory”, *Journal of Fluid Mechanics* **27** (1967) 417-430.
- [39] V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov: “Relativistically invariant two-dimensional models of field theory which are integrable by means of the inverse scattering problem method”, *Sov. Phys. - JETP* **47** (1978) 1017-1027.
- [40] V. Zakharov, L. Ostrovsky: “Modulation instability: the beginning”, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **238** (2009) 540-548.
- [41] T. Taniuti, H. Washimi: “Self-Trapping and Instability of Hydromagnetic Waves along the Magnetic Field in a Cold Plasma”, *Phys. Rev. Lett.* **21** (1968) 209.
- [42] L. Salasnich, A. Parola, L. Reatto: “Modulational Instability and Complex Dynamics of Confined Matter-Wave Solitons”, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 080405.
- [43] G. Stokes: “On the Theory of Oscillatory Waves”, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society VIII* **1847** (197-229) Supplement 314-326.
- [44] A. R. Its, A. V. Rybin and M. A. Sall: “Exact integration of nonlinear Schrödinger equation”, *Theor. Math. Phys.* **74** (1988) 20-32.
- [45] I. M. Krichever: “Spectral theory of two-dimensional periodic operators and its applications”, *Russian Math. Surveys* **44** (1989) 145-225.
- [46] I. M. Krichever: “Perturbation Theory in Periodic Problems for Two-Dimensional Integrable Systems”, *Sov. Sci. Rev., Sect. C, Math. Phys. Rev.* **9** (1992) 1-103.
- [47] V. B. Matveev and M. A. Salle: *Darboux transformations and solitons*. Springer Series in Nonlinear Dynamics, Springer, Berlin (1991).
- [48] N. Ercolani, M. G. Forest and D. W. McLaughlin: “Geometry of the modulation instability Part III: homoclinic orbits for the periodic Sine-Gordon equation”, *Physica D* **43** (1980) 349-384.
- [49] V. E. Zakharov and A. B. Shabat: “A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering transform I”, *Funct. Anal. Appl.* **8** (1974) 226-235.

- [50] D. H. Peregrine: "Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions", *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **25** (1983) 16-43.
- [51] E. A. Kuznetsov: "Solitons in a parametrically unstable plasma", *Sov. Phys. Dokl.* **22** (1977) 507-508.
- [52] T. Kawata and H. Inoue: "Inverse scattering method for the nonlinear evolution equations under non-vanishing conditions", *J. Phys. Soc. Japan* **44** (1978) 1722-1729.
- [53] Y.-C. Ma: "The perturbed plane wave solutions of the cubic Schrödinger equation", *Stud. Appl. Math.* **60** (1979) 43 - 58.
- [54] N. N. Akhmediev, V. M. Eleonskii, and N. E. Kulagin: "Generation of periodic trains of picosecond pulses in an optical fiber: exact solutions", *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **89** (1985) 1542-1551.
- [55] P. Dubard, P. Gaillard, C. Klein, V. B. Matveev: "On multi-rogue wave solutions of the NLS equation and positon solutions of the KdV equation", *Eur. Phys. J. Special Topics* **185** (2010) 247.
- [56] R. Hirota: *Direct Methods for Finding Exact Solutions of Nonlinear Evolution Equations*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 515, Springer, Berlin (1976).
- [57] D. J. Kedziora, A. Ankiewicz, and N. Akhmediev: "Second-order nonlinear Schrödinger equation breather solutions in the degenerate and rogue wave limits", *Phys. Rev. E* **85** (066601) 2012.
- [58] V. E. Zakharov, A. A. Gelash: "On the nonlinear stage of Modulation Instability", *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 054101.
- [59] F. Baronio, A. Degasperis, M. Conforti, S. Wabnitz: "Solutions of the vector nonlinear Schrödinger equations: evidence for deterministic rogue waves", *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 44102.
- [60] A. Degasperis and S. Lombardo: *Integrability in action: solitons, instability and rogue waves*. Rogue and Shock Waves in non linear Dispersive Waves, Lecture Notes in Physics, M. Onorato, S. Resitori, F. Baronio (Eds.), 2016 (<http://www.springer.com>)
- [61] A. Degasperis, S. Lombardo and M. Sommacal: "Integrability and linear stability of nonlinear waves", (2017) arXiv:1707.09536.
- [62] P. G. Grinevich and P. M. Santini: "The finite gap method and the analytic description of the exact rogue wave recurrence in the periodic NLS Cauchy problem. 1", (2017) arXiv:1707.05659.
- [63] P. G. Grinevich and P. M. Santini The finite gap method and the solution of the rogue wave periodic Cauchy problem in the case of a finite number of unstable modes, (2018) (in preparation).
- [64] P. G. Grinevich and P. M. Santini: "The exact rogue wave recurrence in the NLS periodic setting via matched asymptotic expansions, for 1 and 2 unstable modes", *Phys. Lett. A* **382** (2018) 973-978.
- [65] G. P. Agrawal: *Nonlinear Fiber Optics (3rd ed.)*. Academic Press, San Diego (2001).
- [66] J. A. C. Weideman and B. M. Herbst: "Split-step methods for the solution of the nonlinear Schrödinger equation", *SIAM Journal on Numerical Analysis* **23** (1986) 485-507.
- [67] T R Taha and X Xu: "Parallel Split-Step Fourier Methods for the coupled nonlinear Schrödinger type equations", *The Journal of Supercomputing* **5** (2005) 5-23.
- [68] J. Javanainen and J. Ruostekoski: "Split-step Fourier methods for the Gross-Pitaevskii equation", (2004). ArXiv:cond-math/0411154.
- [69] H. C. Yuen and W. E. Ferguson: "Relationship between Benjamin-Feir instability and recurrence in the nonlinear Schrödinger equation", *Phys. Fluids.* **21** (1978) 1275.
- [70] B. M. Lake, H. C. Yuen, H. Rungaldier, and W. E. Ferguson: "Nonlinear deep-water waves: Theory and experiment. Part 2. Evolution of a continuous wave train", *J. Fluid Mech.* **83** (1977) 49.
- [71] H. Yuen, B. Lake: "Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves", *Advances in Applied Mechanics* **22** (1982) 229.
- [72] G. Van Simaey, P. Emplit, and M. Haelterman: "Experimental Demonstration of the Fermi-Pasta-Ulam Recurrence in a Modulationally Unstable Optical Wave", *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 033902.
- [73] E. A. Kuznetsov: "Fermi-Pasta-Ulam recurrence and modulation instability", *JETP Letters* **105** (2017) 125-129.
- [74] O. Kimmoun, H. C. Hsu, H. Branger, M. S. Li, Y. Y. Chen, C. Kharif, M. Onorato, E. J. R. Kelleher, B. Kibler, N. Akhmediev, A. Chabchoub: "Modulation Instability and Phase-Shifted Fermi-Pasta-Ulam Recurrence", *Scientific Reports* **6** (2016) 28516. doi:10.1038/srep28516
- [75] A. Mussot, C. Naveau, M. Conforti, A. Kudlinski, P. Szriftgiser, F. Copie, S. Trillo: "Fibre multiwave-mixing combs reveal the broken symmetry of Fermi-Pasta-Ulam recurrence", *Nature Photonics* (in press)
- [76] D. Pierangeli, M. Flammini, L. Zhang, G. Marcucci, A. J. Agranat, P. G. Grinevich, P. M. Santini, C. Conti, and E. DelRe: "Observation of exact Fermi-Pasta-Ulam recurrence", *Preprint* (2018)
- [77] G. Gallavotti (Ed.): *The Fermi-Pasta-Ulam Problem: A Status Report*. Lecture Notes in Physics, Vol. 728, Springer, Berlin (2008).



Petr Georgievich Grinevich : è Leading Scientific Researcher del Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy of Science e professore del Lomonosov Moscow State University. I suoi interessi scientifici riguardano i

sistemi integrabili nella fisica matematica, problemi inversi di diffusione, Metodi geometrici in fisica.

Paolo Maria Santini: è Professore Ordinario di Fisica Teorica presso l'Università di Roma La Sapienza. I suoi interessi scientifici riguardano aspetti algebrici, geometrici ed analitici della teoria dei sistemi non lineari integrabili della fisica matematica.

Simmetrie di Lie e Lie-Bäcklund per equazioni differenziali

Ma cos'è poi che ci dà la sensazione di eleganza in una soluzione, in una dimostrazione? È l'armonia delle diverse parti, la loro simmetria, il loro felice equilibrio: in una parola, è tutto quello che introduce un ordine, quello che dà unità, che ci permette di vedere chiaramente e comprendere in un sol colpo l'insieme e i dettagli.

————— **Henri Poincaré (1854 – 1912)**

Decio Levi

*Dipartimento di Matematica e Fisica, Università Roma Tre e INFN Sezione Roma Tre,
Via della Vasca Navale 84, 00146, Roma*

Nella presente nota vengono presentati i metodi che si utilizzano per risolvere equazioni differenziali usando l'esistenza di trasformazioni di simmetria, spesso non ovvie, che lasciano un'equazione differenziale invariante. In particolare per un'equazione differenziale ordinaria l'esistenza di simmetrie permette di ridurre l'ordine, possibilmente integrarla ed, in ogni modo, ottenere soluzioni particolari. Nel caso di equazioni alle derivate si riduce il numero delle variabili indipendenti e si ottengono soluzioni particolari. Se l'equazione alle derivate parziali è non-lineare ed appartiene alla classe delle equazioni così dette integrabili, allora possiamo trovare classi di simmetrie dipendenti dalle derivate di ordine più eleva-

to ed operatori differenziali che collegano le simmetrie tra di loro.

Introduzione

In un corso di introduzione alle equazioni differenziali [1] abbiamo imparato che equazioni differenziali separabili, cioè della forma

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x), \quad y \equiv y(x) \quad (1)$$

sono facilmente risolubili per separazione di variabile, cioè calcolando gli integrali

$$\int_y \frac{dy}{f(y)} = \int_x dxg(x) + c \quad (2)$$

dove c è una costante di integrazione. In effetti, però, la ragione di fondo per cui questa equazione si riduce a due integrali e quindi si inte-

gra, è che (1) è invariante rispetto ad un gruppo di simmetria di Lie [2], cioè esiste una trasformazione dipendente da un parametro continuo α che trasforma ogni curva soluzione della (1) $y = \psi(x)$ in un'altra curva soluzione dipendente dal parametro α ,

$$y = \tilde{\psi}(x, \alpha). \quad (3)$$

Due sottocasi particolarmente semplici sono

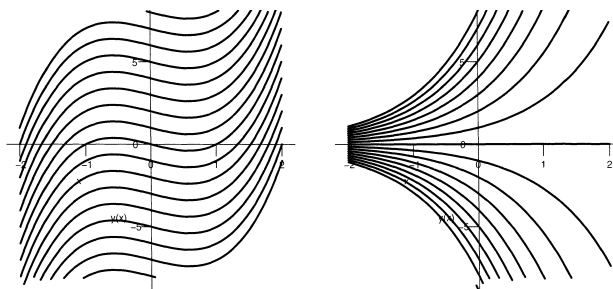


Figura 1: A sinistra (1a) una famiglia di curve invarianti rispetto a una traslazione nella direzione y . A destra (1b) una famiglia di curve invarianti rispetto a una traslazione nella direzione x .

quando $f(y) = 1$ o $g(x) = 1$. Nel primo caso la tangente alla curva soluzione (3), data dalla sua derivata, è indipendente da y ed è quindi data dalla Figura 1a, cioè la soluzione è invariante per traslazioni in y , $(x, y) \rightarrow (x, y + \alpha)$. Nel secondo caso la tangente alla curva soluzione (3) non dipende da x per cui la famiglia di curve soluzioni è data dalla Figura 1b.

Il caso in cui l'equazione differenziale è invariante rispetto a traslazioni della variabile indipendente o dipendente sono casi molto particolari anche se abbastanza comuni. Esistono però situazioni più complesse come per esempio quella data dall'equazione

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2y - x - y}{x^3 + xy^2 - x + y}. \quad (4)$$

Introducendo le coordinate polari

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (5)$$

possiamo riscrivere (4) come

$$\frac{dr}{d\theta} = r(1 - r^2) \quad (6)$$

cioè un'equazione separabile e quindi facilmente integrabile dato che la soluzione $r = \phi(\theta, \gamma)$,

dove γ è la costante di integrazione di (6), è invariante rispetto a una traslazione di θ . Le curve soluzione al variare di γ non sono così semplici come nel caso della Figura 1 e sono graficate nella Figura 2.

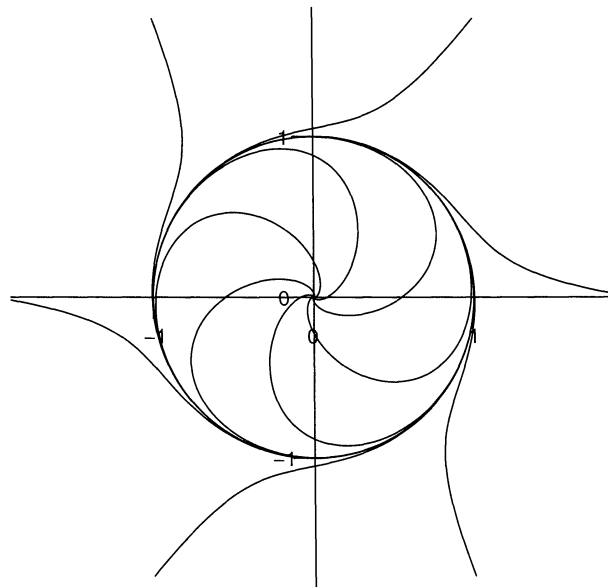


Figura 2: Una famiglia di curve invarianti rispetto a una traslazione nella direzione θ .

La teoria di Lie per le simmetrie delle equazioni differenziali dà una procedura per trovare quella trasformazione delle variabili che riducono l'equazione ad una equazione invariante rispetto a una traslazione. Quindi, se l'equazione è del primo ordine, siamo in grado di integrarla.

Simmetrie ed equazioni differenziali

In matematica, una simmetria è un'operazione che muove o trasforma un oggetto lasciandone inalterato l'aspetto. Le simmetrie di un oggetto formano un gruppo, detto **gruppo delle simmetrie**.

Le trasformazioni che lasciano invariata una figura geometrica vengono dette isometria e formano un gruppo, il gruppo di simmetria della figura geometrica. Le simmetrie si dividono in simmetrie *continue* e simmetrie *discrete* a seconda se il parametro della trasformazione è una variabile continua, per esempio l'angolo di rotazione della sfera, o un numero, multiplo di $\pi/3$ or di $\pi/4$ a seconda che consideri un triangolo o un quadrato.

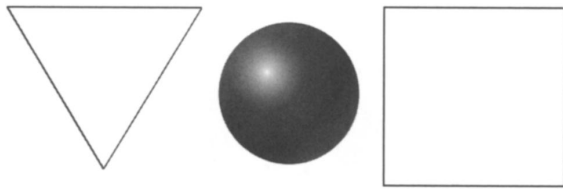


Figura 3: Oggetti geometrici, triangolo, sfera e quadrato con simmetrie discrete e continue.

Formalismo

Sophus Lie (1842 – 1899) ha introdotto la nozione di gruppo continuo di trasformazioni per unificare le varie tecniche in uso fino ad allora per integrare le equazioni differenziali ordinarie, quali i metodi introdotti da Riccati, Abel, Bernoulli, Eulero o Jacobi per integrare equazioni differenziali nonlineari del primo ordine o il metodo del fattore integrante. Nella sua elaborazione è stato motivato dai risultati di Evariste Galois (1811–1832) per risolvere le equazioni polinomiali algebriche in quella che ora viene comunemente chiamata la *teoria di Galois*. Galois trovò che la soluzione algebrica di un'equazione polinomiale è strettamente collegata alla struttura del gruppo delle permutazioni delle radici del polinomio, il così detto gruppo di Galois del polinomio. Galois mostrò che un'equazione può essere risolta algebricamente in termini di radicali se uno può trovare una serie finita di sottogruppi del gruppo di Galois, tali che il gruppo è risolubile. Come vedremo in seguito queste stesse idee sono state applicate da Lie nel caso del gruppo di simmetria delle equazioni differenziali con risultati analoghi [2–6].

Un gruppo di trasformazioni di Lie ad un parametro $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \epsilon)$, dove ϵ è un parametro continuo, è definito dai seguenti assiomi:

1. Proprietà di chiusura, i.e.: $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \phi(\epsilon, \delta))$, dove la funzione $\phi(\epsilon, \delta)$ indica come si combinano i parametri tra di loro.
2. Proprietà associativa, i.e.: $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \phi(\alpha, \phi(\beta, \gamma))) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \phi(\phi(\alpha, \beta), \gamma))$ per ogni α, β e γ .
3. Esistenza dell'elemento neutro, indicato con e , spesso preso uguale a zero, i.e.: $\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, e)$.

4. Esistenza dell'elemento inverso, i.e.: $\mathbf{x} = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \gamma) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \phi(\delta, \gamma))$ con $\phi(\delta, \gamma) = e$. Formalmente indicheremo $\gamma = \delta^{-1}$.
5. Differenziabilità della funzione \mathbf{F} nella sua dipendenza da \mathbf{x} ed analiticità nel parametro gruppale ϵ .
6. Analiticità della funzione $\phi(\epsilon, \delta)$ rispetto ai suoi parametri ϵ e δ .

Per concretezza vediamo come una traslazione di una grandezza continua ϵ , $x \rightarrow \tilde{x} = x + \epsilon$, tale quindi che $F(x, \epsilon) = x + \epsilon$, soddisfi le proprietà, da 1 a 6, di un gruppo di Lie.

1. Proprietà di chiusura: poiché $x \rightarrow \tilde{x} = x + \epsilon$ avremo che $\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + \delta$ con δ un'altra grandezza continua. Mettendo insieme le due formule abbiamo che $\tilde{\tilde{x}} = x + \delta + \epsilon$ dove $\phi(\epsilon, \delta) = \epsilon + \delta$ è una grandezza continua e quindi $\tilde{\tilde{x}}$ è un traslato di x tale come \tilde{x} , ossia la combinazione di due traslazioni è ancora una traslazione.
2. Proprietà associativa: poiché in questo caso $F(x, \epsilon) = x + \epsilon$ e $\phi(\epsilon, \delta) = \epsilon + \delta$ abbiamo $F(x, \phi(\alpha, \phi(\beta, \gamma))) = x + \alpha + (\beta + \gamma) = F(x, \phi(\phi(\alpha, \beta), \gamma)) = x + (\alpha + \beta) + \gamma$.
3. Esistenza dell'elemento neutro: se richiediamo che valga $x = F(x, e)$ consegue che $e = 0$.
4. Esistenza dell'elemento inverso: poiché $\tilde{\tilde{x}} = x + \delta + \epsilon$, se $\tilde{\tilde{x}} = x$ allora $\delta + \epsilon = 0$ e quindi $x = \tilde{x} - \epsilon$.
5. $F(x, \epsilon) = x + \epsilon$ è chiaramente differenziabile nella sua dipendenza da x ed analitica nel parametro gruppale ϵ .
6. $\phi(\epsilon, \delta) = \epsilon + \delta$ è una funzione analitica nei suoi parametri ϵ e δ .

Poiché per la quinta proprietà $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \epsilon)$ è analitica in ϵ , esiste un suo sviluppo in serie di Taylor, ossia in potenze di ϵ e possiamo definire una trasformazione infinitesima

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \epsilon \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \right] + O(\epsilon^2)$$

in cui, il coefficiente del primo ordine in ϵ , coefficiente infinitesimo della trasformazione, è

$$\xi(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \right].$$

Sophus Lie dimostrò il seguente teorema fondamentale per lo sviluppo della teoria delle simmetrie di un'equazione differenziale:

Teorema 1. Primo Teorema di Lie *Esiste una parametrizzazione $\tau(\epsilon)$ tale che il gruppo delle trasformazioni di Lie \mathbf{F} è equivalente alla soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo grado ai valori iniziali*

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\tau} = \xi(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (7)$$

con $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ quando $\tau = 0$.

$\tau(\epsilon)$ è una ben definita funzione di ϵ data da:

$$\tau(\epsilon) = \int_0^\epsilon \Gamma(\eta) d\eta,$$

$$\Gamma(\eta) = \frac{\partial \phi(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{(\alpha, \beta) = (\eta^{-1}, \eta)}.$$

Nel caso di una traslazione in due dimensioni

$$\tilde{x} = x + \epsilon, \quad \tilde{y} = y, \quad (8)$$

abbiamo:

$$\xi(x, y) = (1, 0), \quad (9)$$

$$\frac{d\tilde{x}}{d\epsilon} = 1, \quad \frac{d\tilde{y}}{d\epsilon} = 0, \quad (10)$$

con la condizione al contorno

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y \text{ quando } \epsilon = 0. \quad (11)$$

Invarianza sotto un gruppo

Esiste un'altra formulazione del primo teorema di Lie ottenuta introducendo il generatore infinitesimo della trasformazione

$$\hat{X} = \xi(\mathbf{x}) \partial_{\mathbf{x}} = \sum_{i=0}^n \xi_i(\mathbf{x}) \partial_{x_i} \quad (12)$$

Teorema 2. *Il gruppo di trasformazioni di Lie ad un parametro $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \epsilon)$ si può scrivere*

$$\tilde{\mathbf{x}} = e^{\epsilon \hat{X}} \mathbf{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \hat{X}^k \mathbf{x}. \quad (13)$$

L'espressione (13) è detta **serie di Lie**.

Nel caso di una rotazione nel piano

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_1 \cos(\epsilon) + x_2 \sin(\epsilon), \\ \tilde{x}_2 &= -x_1 \sin(\epsilon) + x_2 \cos(\epsilon), \end{aligned} \quad (14)$$

abbiamo

$$\xi(\mathbf{x}) = (x_2, -x_1).$$

La serie di Lie corrispondente è:

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) &= (e^{\epsilon \hat{X}} x_1, e^{\epsilon \hat{X}} x_2). \\ \hat{X} x_1 &= x_2, \quad \hat{X} x_2 = -x_1, \\ \hat{X}^2 x_1 &= -x_1, \quad \hat{X}^2 x_2 = -x_2, \text{ etc. .} \end{aligned}$$

Funzioni invarianti

Una funzione $f(\mathbf{x})$ analitica di \mathbf{x} , cioè sviluppabile in serie di Taylor (o di potenze), convergente in un dominio, è detta una *funzione invariante* rispetto ad un gruppo di trasformazioni di Lie ad un parametro, $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \epsilon)$ se e solo se in questo dominio

$$f(\tilde{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{x}). \quad (15)$$

Teorema 3. *La funzione analitica $f(\mathbf{x})$ è una funzione invariante rispetto ad un gruppo di trasformazioni di Lie ad un parametro $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \epsilon)$, di generatore infinitesimo \hat{X} (12), se e solo se*

$$\hat{X} f(\mathbf{x}) = 0 \quad (16)$$

Non diamo la dimostrazione, ma questa è facile da ottenere utilizzando la rappresentazione di $\tilde{\mathbf{x}}$ univoco data dalla serie di Lie (13). Se poi, invece dell'invarianza di una funzione, consideriamo l'invarianza di un'equazione $g(\mathbf{x}) = 0$, la condizione infinitesima d'invarianza (16) diviene

$$\hat{X} g(\mathbf{x}) = 0, \text{ quando } g(\mathbf{x}) = 0 \quad (17)$$

Questo risultato sarà quello che verrà esteso al caso di equazioni differenziali ed è alla base della teoria di Lie delle simmetrie per ogni tipo di equazione, cioè equazioni differenziali, funzionali, integrali, etc.

Trasformazione del gruppo in forma canonica

Per integrare un'equazione differenziale abbiamo riscritto l'equazione in coordinate tali che essa abbia una simmetria di traslazione. In questo modo l'equazione è poi integrabile per quadratura. Nell'Introduzione questo è stato fatto *ad occhio* ma nella teoria di Lie esiste una procedura grupale ad hoc, che consiste nel riscrivere l'equazione in termini di coordinate canoniche.

Le coordinate canoniche per un sistema che ammette simmetrie di Lie sono quelle coordinate per le quali il gruppo di Lie è dato da una traslazione. Come lo possiamo ottenere? Lo otteniamo tramite un cambio di variabile, che dipende dai generatori del gruppo di simmetria originario.

Definiamo quindi un cambio di variabile biunivoco e differenziabile $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x})$. Il gruppo di trasformazione di Lie ad un parametro nelle nuove variabili diventa

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}} &= e^{\epsilon \hat{Y}} \mathbf{y}, & (18) \\ \text{dove } \hat{Y} &= \sum_{i=1}^n \eta_i(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_i}, \\ \text{con } \eta_i(\mathbf{y}) &= \hat{X} y_i. \end{aligned}$$

Scegliamo le variabili \mathbf{y} in modo tale che il gruppo di simmetria sia solo la traslazione della n -esima delle variabili, y_n . Cioè

$$\tilde{y}_i = y_i \text{ per } i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \tilde{y}_n = y_n + \epsilon. \quad (19)$$

Il problema non ovvio è dimostrare che tali variabili esistono, cioè che le equazioni (19) hanno una soluzione. In corrispondenza con (19) abbiamo che le $\eta_i(\mathbf{y})$ definite in (18) sono tali che

$$\begin{aligned} \eta_i &= 0 & (20) \\ \text{per } i &= 1, 2, \dots, n-1 \text{ e } \eta_n = 1. \end{aligned}$$

Dallo studio della soluzione delle equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine (19), con $\eta_i(\mathbf{y})$ dati dalle (20), troviamo che le coordinate canoniche sono definite come le $n-1$ soluzioni funzionalmente indipendenti y_i , con $i = 1, 2, \dots, n-1$, delle equazioni alle derivate

parziali omogenee del primo ordine

$$\begin{aligned} \eta_i &= \hat{X} y_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{i.e.} & (21) \\ \xi_1(\mathbf{x}) \frac{\partial y_i}{\partial x_1} + \xi_2(\mathbf{x}) \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \\ &+ \dots + \xi_n(\mathbf{x}) \frac{\partial y_i}{\partial x_n} = 0, \end{aligned}$$

mentre y_n è dato da una soluzione particolare dell'equazione del primo ordine alle derivate parziali non-omogenea

$$\begin{aligned} \eta_n &= \hat{X} y_n(\mathbf{x}) = 1 \quad \text{i.e.} & (22) \\ \xi_1(\mathbf{x}) \frac{\partial y_n}{\partial x_1} + \xi_2(\mathbf{x}) \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \\ &+ \dots + \xi_n(\mathbf{x}) \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = 1. \end{aligned}$$

Vediamo un esempio non banale per chiarirci le idee.

Consideriamo una trasformazione di gruppo $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \epsilon)$ data dal gruppo delle dilatazioni

$$\tilde{x}_1 = e^\epsilon x_1, \quad \tilde{x}_2 = e^{2\epsilon} x_2$$

a cui corrisponde il generatore infinitesimo $\hat{X} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$. Per cercare le coordinate canoniche dobbiamo risolvere le equazioni differenziali (21, 22):

$$x_1 \frac{\partial y_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + 2x_2 \frac{\partial y_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0, \quad (23)$$

$$x_1 \frac{\partial y_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} + 2x_2 \frac{\partial y_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 1. \quad (24)$$

È facile vedere per sostituzione diretta che $y_1 = g(2x_2/x_1)$, con g funzione arbitraria del suo argomento, è soluzione di (23) mentre una soluzione particolare di (24) è data scegliendo $y_2 = y_2(x_2)$. Otteniamo quindi $y_2 = \frac{1}{2} \log(x_2)$.

Algebra di Lie: proprietà dei generatori infinitesimi di un gruppo di trasformazioni di Lie ad r parametri

Nella costruzione dei generatori di simmetrie puntuali di Lie spesso ci si trova di fronte al caso in cui si ha più di un parametro. Lo studio delle proprietà dei generatori infinitesimi di un gruppo di trasformazioni di Lie ad r parametri inizia con il seguente teorema di Lie:

Secondo Teorema Fondamentale di Lie: *Il commutatore di due qualunque generatori infinitesimi*

mi di un gruppo ad r -parametri di trasformazioni di Lie, $[\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta]$, definito come $\hat{X}_\alpha \hat{X}_\beta - \hat{X}_\beta \hat{X}_\alpha$, è un generatore infinitesimo appartenente al gruppo:

$$[\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma \hat{X}_\gamma, \quad (\alpha, \beta, \gamma) = 1, 2, \dots, r.$$

I coefficienti $C_{\alpha\beta}^\gamma$ sono costanti e sono detti **le costanti di struttura del gruppo**.

Dati tre generatori infinitesimi $\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta, \hat{X}_\gamma$, vale **l'identità di Jacobi**:

$$[\hat{X}_\alpha, [\hat{X}_\beta, \hat{X}_\gamma]] + [\hat{X}_\beta, [\hat{X}_\gamma, \hat{X}_\alpha]] + [\hat{X}_\gamma, [\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta]] = 0.$$

Possiamo quindi enunciare il terzo teorema fondamentale di Lie:

Terzo Teorema Fondamentale di Lie *Le costanti di struttura definite dalle relazioni di commutazione dei generatori soddisfano le relazioni:*

$$C_{\alpha\beta}^\gamma = -C_{\beta\alpha}^\gamma, \\ \sum_{\rho=1}^r [C_{\alpha\beta}^\rho C_{\rho\gamma}^\delta + C_{\beta\gamma}^\rho C_{\rho\alpha}^\delta + C_{\gamma\alpha}^\rho C_{\rho\beta}^\delta] = 0.$$

La prima relazione è dovuta alle proprietà di antisimmetria del commutatore mentre la seconda deriva dall'identità di Jacobi.

I generatori infinitesimi di un gruppo di trasformazioni di Lie ad r -parametri \hat{X}_α formano una nuova struttura che viene denominata **algebra di Lie**, definita dalle sue costanti di struttura. **Esempio 1:** Gruppo dei moti rigidi in due dimensioni dato da rotazioni e traslazioni.

$$\tilde{x} = x \cos(\epsilon_1) - y \sin(\epsilon_1) + \epsilon_2, \\ \tilde{y} = x \sin(\epsilon_1) + y \cos(\epsilon_1) + \epsilon_3,$$

i cui generatori infinitesimi sono

$$\hat{X}_1 = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}, \hat{X}_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \hat{X}_3 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Le costanti di struttura sono descritte dalla tabella:

$[\cdot, \cdot]$	\hat{X}_1	\hat{X}_2	\hat{X}_3
\hat{X}_1	0	$-\hat{X}_3$	\hat{X}_2
\hat{X}_2	\hat{X}_3	0	0
\hat{X}_3	$-\hat{X}_2$	0	0

Delle varie algebre di Lie conosciute noi saremo particolarmente interessati al caso delle **algebre risolubili**, essenziali per la riduzione delle

equazioni differenziali.

Data un'algebra \mathcal{L} , una sottoalgebra $\mathcal{I} \subset \mathcal{L}$ è detta **ideale** o **sottoalgebra normale** di \mathcal{L} se $[\hat{X}, \hat{Y}] \in \mathcal{I}$ per tutti gli $\hat{X} \in \mathcal{I}, \hat{Y} \in \mathcal{L}$. Un'algebra di Lie $\mathcal{L}^{(q)}$ è quindi un' **algebra di Lie risolubile** di dimensione q se esiste una catena di sottoalgebre tali che $\mathcal{L}^{(1)} \subset \mathcal{L}^{(2)} \subset \dots \subset \mathcal{L}^{(q-1)} \subset \mathcal{L}^{(q)}$, dove $\mathcal{L}^{(k)}$ è un'algebra di Lie di dimensione k e $\mathcal{L}^{(k-1)}$ è un ideale di $\mathcal{L}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, q$. I generatori infinitesimi di un'algebra di Lie risolubile $\mathcal{L}^{(q)}$, $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_q$, possono sempre essere ordinati in modo tale che soddisfino le seguenti relazioni di commutazione:

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = \sum_{k=1}^{j-1} C_{ij}^k \hat{X}_k, \\ 1 \leq i < j, \quad j = 2, 3, \dots, q,$$

cioè \hat{X}_1 appartiene a $\mathcal{L}^{(1)}$, (\hat{X}_1, \hat{X}_2) appartengono a $\mathcal{L}^{(2)}$, etc. .

Esempio 2:

$$j = 2: \quad [\hat{X}_1, \hat{X}_2] = C_{12}^1 \hat{X}_1, \\ j = 3: \quad [\hat{X}_1, \hat{X}_3] = C_{13}^1 \hat{X}_1 + C_{13}^2 \hat{X}_2, \\ [\hat{X}_2, \hat{X}_3] = C_{23}^1 \hat{X}_1 + C_{23}^2 \hat{X}_2.$$

Si dimostra facilmente che un'algebra di Lie di dimensione 2 è sempre risolubile. Anche una **algebra Abeliana** di dimensione r , data da r generatori infinitesimi commutanti (cioè in cui il commutatore di tutti gli elementi è uguale a zero) è risolubile. Un'algebra di Lie di dimensione 3 non è necessariamente risolubile. Per esempio

$$\hat{X}_1 = -\frac{\partial}{\partial x}, \hat{X}_2 = x \frac{\partial}{\partial x}, \hat{X}_3 = -x^2 \frac{\partial}{\partial x},$$

non è risolubile. L'algebra di Lie di dimensione 3 considerata nell' **Esempio 1**, data dai moti rigidi in due dimensioni, è risolubile: $\mathcal{L}^{(1)} \subset \mathcal{L}^{(2)} \subset \mathcal{L}^{(3)} = \mathcal{L}$, where $\mathcal{L} = (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3)$, $\mathcal{L}^{(2)} = (\hat{X}_2, \hat{X}_3)$ è un'algebra Abeliana. Possiamo quindi scegliere $\mathcal{L}^{(1)} = \hat{X}_2$ o $\mathcal{L}^{(1)} = \hat{X}_3$.

Applicazione alle equazioni differenziali

Le simmetrie di un'equazione differenziali sono quelle trasformazioni che lasciano invariato lo spazio delle soluzioni dell'equazione, cioè trasformano una soluzione in un'altra soluzione, o

lasciano invariata l'equazione in forma. In formule matematiche, un'equazione differenziale ordinaria (ODE) di ordine n

$$y_n = \mathcal{F}(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}), \quad (25)$$

$$y = y(x), \quad y_j = \frac{d^j y}{dx^j},$$

$$j = 1, \dots, n-1$$

è una relazione funzionale che collega la variabile x , la funzione $y(x)$ e le sue derivate fino all'ordine n . Se si definiscono le derivate di $y(x)$, y_j con $j = 1, \dots, n$ come nuove variabili allora posso considerare l'equazione (25) come la funzione $g(x, y, y_1, \dots, y_n) = 0$ e la condizione che l'equazione rimane invariata in forma è data dalla condizione di invarianza (17). Data una trasformazione puntuale di generatore infinitesimo

$$\hat{X} = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y \quad (26)$$

si dimostra che esiste ed è unica la sua estensione o prolungamento alle derivate di y rispetto a x data da

$$\text{pr}\hat{X} = \hat{X} + \eta^1(x, y, y_1)\partial_{y_1} + \dots + \eta^n(x, y, y_1, \dots, y_n)\partial_{y_n}, \quad (27)$$

dove

$$\eta^{(j)}(x, y, y_1, \dots, y_j) = D\eta^{(j-1)}(x, y, y_1, \dots, y_{j-1}) - y_j D\xi, \quad (28)$$

con $j = 1, 2, \dots, n$, $\eta^{(0)} = \eta(x, y)$ e l'operatore D , definito da

$$D = \partial_x + y_1\partial_y + y_2\partial_{y_1} + \dots + y_{n+1}\partial_{y_n} + \dots, \quad (29)$$

è tale che applicato ad una funzione $F(x, y, y_1, \dots, y_n)$ ne dà la sua derivata totale rispetto a x , cioè

$$DF = F_x + y_1F_y + y_2F_{y_1} + \dots + y_{n+1}F_{y_n}. \quad (30)$$

Val la pena osservare che:

- $\eta^{(j)}$ è lineare in y_j per $j \geq 2$.
- $\eta^{(j)}$ è polinomiale in y_1, y_2, \dots, y_j con coefficienti lineari e omogenei in $\xi(x, y), \eta(x, y)$

e le loro derivate fino all'ordine j .

Vediamo ora un esempio di costruzione dei coefficienti infinitesimi del prolungamento nel caso di un gruppo di rotazioni nello spazio x, y . Data la trasformazione

$$\tilde{x} = x \cos(\epsilon) + y \sin(\epsilon),$$

$$\tilde{y} = -x \sin(\epsilon) + y \cos(\epsilon),$$

i coefficienti infinitesimi con le loro derivate prime sono

$$(\xi, \eta) = (y, -x),$$

$$\xi_y = -\eta_x = 1, \quad \xi_x = \eta_y = 0.$$

Quindi, dalle formule (27, 28, 29) otteniamo

$$\eta^{(1)} = -[1 + y_1^2], \quad \eta^{(2)} = -3y_1y_2,$$

$$\eta^{(3)} = -[3y_2^2 + 4y_1y_3],$$

$$\eta^{(j)} = D\eta^{(j-1)} - y_jy_1 \quad \text{per } j \geq 4.$$

Riduzione di ordine di un'ODE tramite le simmetrie

Per mostrare cosa possiamo fare con le simmetrie nel caso di ODE consideriamo una serie di esempi in parte di origine applicativa che mostrano la teoria in fieri.

Esempio dell'equazione di Blasius

L'equazione fondamentale per la descrizione del moto di un fluido non perfetto è data dall'equazione di Navier-Stokes.

$$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}}_{\text{Variation}} + \underbrace{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}}_{\text{Convection}} - \underbrace{\nu \nabla^2 \mathbf{u}}_{\text{Diffusion}} = \underbrace{-\nabla w}_{\text{Internal source}} + \underbrace{\mathbf{g}}_{\text{External source}}.$$

Usando argomenti di simmetria di scala, Ludwig Prandtl, ingegnere aeronautico tedesco, (1875 – 1953) interessato ai problemi del moto degli aerei, ha mostrato come circa metà dei termini dell'equazione di Navier-Sokes sono trascurabili per il moto vicino a un'ala, eccetto che in una regione piccola vicino ai bordi. Prandtl quindi, in questa approssimazione, può scrivere un'equazione ridotta, conosciuta come l'equazione dello strato limite.

Paul Richard Heinrich Blasius (studente di Prandtl) nel 1908 propone una soluzione di similitudine per l'equazione dello strato limite quando il moto dell'aria sull'ala è costante, il che corrisponde al caso in cui lo strato limite sopra l'ala piatta è orientato parallelo al flusso dell'aria [7].

In questo caso le equazioni e le condizioni al contorno sono invarianti rispetto alla trasformazione

$$x \rightarrow c^2 x, y \rightarrow cy, u \rightarrow u, v \rightarrow \frac{v}{c}, \quad (31)$$

con c una costante positiva ed u e v rispettivamente le velocità nella direzione x e y sopra l'ala. L'equazione che Blasius ottiene imponendo questa invarianza all'equazione dello strato limite di Prandtl è

$$g(z, f) = f_{zzz} + \frac{1}{2} f f_{zz} = 0, \quad (32)$$

dove $z = \frac{x}{y^2}$ è la variabile di simmetria relativa alla trasformazione (31) ed f è la velocità. Il criterio di esistenza di simmetrie è

$$\hat{X}g \Big|_{g=0} = [\xi(z, f)\partial_z + \eta(z, f)\partial_f]g \Big|_{g=0} = 0, \quad (33)$$

diviene:

$$\eta^{(3)} + \frac{1}{2} f_{zz} \eta + \frac{1}{2} f \eta^{(2)} = 0 \quad (34)$$

quando (32) è soddisfatta. Le formule per $\eta^{(2)}$ e $\eta^{(3)}$ sono:

$$\begin{aligned} \eta^{(2)} = & \eta_{zz} + (2\eta_{zf} - \xi_{zz})f_z \\ & + (\eta_{ff} - 2\xi_{zf})(f_z)^2 \\ & - \xi_{ff}(f_z)^3 + (\eta_f - 2\xi_z)f_{zz} - 3\xi_f f_z f_{zz}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta^{(3)} = & \eta_{zzz} + (3\eta_{zzf} - \xi_{zzz})f_z \\ & + 3(\eta_{zff} - 2\xi_{zzf})(f_z)^2 \\ & + (\eta_{fff} - 3\xi_{zff})(f_z)^3 \\ & - \xi_{fff}(f_z)^4 + 3(\eta_{zf} - \xi_{zz})f_{zz} \\ & + 3(\eta_{ff} - 3\xi_{zf})f_z f_{zz} - 6\xi_{ff}(f_z)^2 f_{zz} \\ & - 3\xi_f(f_{zz})^2 + (\eta_f - 3\xi_z)f_{zzz} - 4\xi_f f_z f_{zzz}. \end{aligned}$$

In termini di queste formula la condizione di invarianza (34) diviene:

$$\begin{aligned} & [\eta_{zzz} + \frac{1}{2} f \eta_{zz}] \\ & + [3\eta_{zzf} - \xi_{zzz} + u\eta_{zf} - \frac{1}{2} f \xi_{zz}] f_z \\ & + [3\eta_{zff} - 3\xi_{zzf} + \frac{1}{2} f \eta_{ff} - f \xi_{zf}] (f_z)^2 \quad (35) \\ & - [\eta_{fff} - 3\xi_{zff} - \frac{1}{2} f \xi_{ff}] (f_z)^3 - \xi_{fff} (f_z)^4 \\ & + [3\eta_{zf} - 3\xi_{zz} + \frac{1}{2} f \xi_z + \frac{1}{2} \eta] f_{zz} \\ & + [3\eta_{ff} - 9\xi_{zf} + \frac{1}{2} f \xi_f] f_z f_{zz} \\ & - 6\xi_{ff}(f_z)^2 f_{zz} - 3\xi_f(f_{zz})^2 = 0 \end{aligned}$$

Poiché $\xi(z, f)$ e $\eta(z, f)$ non dipendono da f_{zj} per $j \geq 1$, allora i coefficienti di $(f_z)^0, f_z, (f_z)^2, (f_z)^3, (f_z)^4, f_{zz}, f_z f_{zz}, (f_z)^2 f_{zz}$ e $(f_{zz})^2$ in (35) devono essere uguali a zero e danno un sistema sovradeterminato di 9 equazioni lineari alle derivate parziali da risolvere per $\xi(z, f)$ e $\eta(z, f)$. Risolvendo questo sistema sovradeterminato di equazioni otteniamo che l'equazione di Blasius ammette un gruppo trasformazioni di Lie a due parametri, una traslazione ($\tilde{z} = z + \beta, \tilde{f} = f$) e una dilatazione ($\tilde{z} = \frac{z}{\alpha}, \tilde{f} = \alpha f$). I generatori infinitesimi

$$\hat{X}_1 = \partial_z, \quad \hat{X}_2 = z\partial_z - f\partial_f,$$

soddisfano alla seguente algebra riducibile

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \hat{X}_1. \quad (36)$$

Consideriamo ora la riduzione dell'equazione di Blasius usando, per esempio, l'invarianza rispetto alla traslazione, il primo generatore dell'algebra di Lie risolubile data da \hat{X}_1 e \hat{X}_2 .

Il prolungamento di \hat{X}_1 è uguale a se stesso, dato che le derivate del coefficiente infinitesimo sono tutte zero. Quindi possiamo scrivere gli invarianti di \hat{X}_1 come funzioni della forma $y_1 = v_0(z, f), v_1(z, f, f_z), v_2(z, f, f_z, f_{zz}), v_3(z, f, f_z, f_{zz}, f_{zzz})$. Risolvendo le equazioni

$$\hat{X}_1^{(k)} v_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

i v_k sono ottenuti come costanti di integrazione delle equazioni caratteristiche

$$\frac{dz}{\xi(z, f)} = \frac{df}{\eta(z, f)} = \frac{df_z}{\eta^{(1)}(z, f, f_z)} = \dots =$$

$$= \frac{df_{z^k}}{\eta^{(k)}(z, f, f_z, \dots, f_{z^k})}$$

Quindi i primi due invarianti indipendenti sono determinati risolvendo le equazioni (con abuso di notazione)

$$\frac{dx}{1} = -\frac{df}{0} = \frac{df_z}{0}, \quad \text{i.e.} \quad y_1 = f, v_1 = f_z.$$

Poiché y_1 e v_1 sono invarianti del primo prolungamento di \hat{X}_1 , $\frac{dv_1}{dy_1} = \frac{\frac{dv_1}{dz}}{\frac{dy_1}{dz}} = \frac{f_{zz}}{f_z}$ sarà invariante del secondo prolungamento di \hat{X}_1 e per conseguenza di tutti i prolungamenti superiori. Un insieme di invarianti così costruito viene detto *invariante differenziale*.

Esprimendo f_z, f_{zz}, f_{zzz} in termini degli invarianti differenziali abbiamo, $f_z = v_1$; $f_{zz} = v_1 \frac{dv_1}{dy_1}$; $f_{zzz} = v_1 \left[\left(\frac{dv_1}{dy_1} \right)^2 + v_1 \frac{d^2 v_1}{dy_1^2} \right]$ e quindi l'equazione di Blasius si riduce alla seguente ODE

$$v_1 \left[\left(\frac{dv_1}{dy_1} \right)^2 + v_1 \frac{d^2 v_1}{dy_1^2} \right] = \frac{1}{2} y_1 \frac{dv_1}{dy_1}. \quad (37)$$

Data una soluzione di (37), cioè una funzione

$$v_1 = V(y_1; c_1, c_2) = V(f; c_1, c_2),$$

con c_1 e c_2 costanti d'integrazione la soluzione dell'equazione di Blasius è data dall'equazione $f_z = V(f; c_1, c_2)$. Essa eredita la simmetria di traslazione, per cui può essere integrata e otteniamo la soluzione implicita

$$z = c_3 + \int^f \frac{dg}{V(g; c_1, c_2)}.$$

Possiamo poi usare il generatore infinitesimo \hat{X}_2 e quindi costruire i nuovi invarianti $\hat{X}_2^{(1)} y_2(y_1, v_1) = 0$ e $\text{pr} \hat{X}_2 v_2(y_1, v_1, \frac{dv_1}{dy_1}) = 0$. Otteniamo quindi:

$$y_2 = \frac{v_1}{(y_1)^2} \quad \text{e} \quad v_2 = \frac{1}{y_1} \frac{dv_1}{dy_1}.$$

In termini delle nuove variabili di simmetria l'equazione di Blasius diviene l'ODE del primo ordine:

$$\frac{dv_2}{dy_2} = \frac{v_2}{2y_2} \left[\frac{1 + 2(v_2 + y_2)}{2y_2 - v_2} \right]. \quad (38)$$

L'equazione (38) non ha più simmetrie per cui non siamo più in grado di ridurla ad un'equazione algebrica e quindi integrarla completamente. Data una famiglia di soluzioni ad un parametro della equazione (38) siamo però in grado di costruire la soluzione generale passando alle rispettive variabili canoniche e integrando. La soluzione, però, come nel caso della (37) sarà scritta in forma implicita.

Consideriamo, come nuovo esempio, la seguente equazione, costruita in modo tale da avere un gruppo di simmetria di dimensione elevata,

$$\left[1 + \dot{u}^2 \right] \ddot{u} - 3\dot{u}\ddot{u}^2 = 0. \quad (39)$$

Questa ha un'algebra delle simmetrie di ordine 6 i cui generatori sono:

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 &= \partial_z, \\ \hat{X}_2 &= \partial_u, \\ \hat{X}_3 &= z\partial_z + u\partial_u, \\ \hat{X}_4 &= u\partial_z - z\partial_u, \\ \hat{X}_5 &= \frac{1}{2}(z^2 - u^2)\partial_z + zu\partial_u, \\ \hat{X}_6 &= \frac{1}{2}(z^2 - u^2)\partial_z - zu\partial_u. \end{aligned} \quad (40)$$

Una sua sottoalgebra risolubile è data da \hat{X}_1, \hat{X}_2 e \hat{X}_3 che soddisfano le seguenti regole di commutazione:

$$\left[\hat{X}_1, \hat{X}_2 \right] = 0, \quad \left[\hat{X}_1, \hat{X}_3 \right] = \hat{X}_1, \quad \left[\hat{X}_2, \hat{X}_3 \right] = \hat{X}_2.$$

Riducendo rispetto a questa algebra risolubile l'equazione (39), utilizzando la stessa notazione come nel caso della equazione di Blasius, l'equazione (39) diviene l'equazione algebrica

$$v_3(y_3) = \frac{3y_3}{1 + y_3^2} + \frac{1}{y_3} \quad (41)$$

da cui ricaviamo, per integrazione delle equazioni nelle rispettive coordinate canoniche,

$$u(z) = \pm \sqrt{a - (z - b)^2} + c,$$

con a, b e c costanti di integrazione.

Simmetrie di equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE's)

Una PDE è un'equazione differenziale in cui le variabili indipendenti non appartengono più ad una retta ma ad un piano o ad uno spazio e sono coinvolte derivate in ogni possibile direzione. Nel seguito ci limitiamo a considerare il caso in cui abbiamo una sola variabile dipendente e due coordinate indipendenti, che variano in un piano, ad esempio $u(x, y)$ dove con u indichiamo la variabile dipendente e con x e y le due variabili indipendenti.

Una PDE di ordine k è quindi una relazione funzionale che coinvolge le variabili indipendenti, la variabile dipendente e le sue derivate in entrambe le direzioni indipendenti fino all'ordine k , per complessive $\frac{(k+2)(k+1)}{2} + 2$ variabili

$$\mathcal{F}(x, y, u, u_x, u_y, \dots, u_{kx}, u_{(k-1)xy}, u_{ky}) = 0. \quad (42)$$

La condizione che (42) abbia una simmetria di generatore puntuale

$$\hat{X} = \xi(x, y, u)\partial_x + \eta(x, y, u)\partial_y + \phi(x, y, u)\partial_u \quad (43)$$

è che la relazione funzionale tra le $\frac{(k+2)(k+1)}{2} + 2$ variabili sia invariante, cioè

$$\text{pr}\hat{X}\mathcal{F}\Big|_{\mathcal{F}=0} = 0. \quad (44)$$

Quindi, che si stia trattando di ODE's o di PDE's, la condizione di invarianza è sempre la stessa, la condizione (17). Però la presenza di simmetrie ha delle conseguenze diverse. Nel caso di una ODE, come abbiamo visto, la presenza di un'algebra riducibile di dimensione ℓ ci permette di ridurre ℓ -volte l'equazione originaria e, se ℓ è uguale o maggiore all'ordine dell'equazione possiamo ridurre l'ODE a un'equazione algebrica ed integrarla. Nel caso di una PDE la presenza di una simmetria mi permette di ridurre il numero delle variabili indipendenti. Infatti consideriamo per esempio l'equazione (42) con simmetria (43). A partire da questa simmetria, (43), posso costruire al massimo due invarianti, di cui uno v giocherà il ruolo di variabile dipendente e l'altro z di variabile indipendente. Dato che (42) ammette (43) come sua simmetria, allora sicuramente la (42) si riduce ad un'equazione differenziale per v rispetto a z , ossia una ODE di ordine k . La

soluzione della ODE dipende da k costanti di integrazioni e quindi l'esistenza della simmetria genera, una volta che la ODE sia integrabile, una classe di soluzioni della PDE (42) dipendente da k costanti. Questa non è minimamente correlata con la soluzione generale della PDE (42), che dipenderà da k funzioni arbitrarie di una variabile, determinate dalle condizioni iniziali o al contorno.

Consideriamo ora un esempio:

Esempio 3: Equazione invariante rispetto al Gruppo delle traslazioni in una variabile indipendente.

Consideriamo la classe di equazioni alle derivate parziali $u_{xx} = f(u_{xy}, u_{yy}, u_x, u_y, u, x)$ che non ha la dipendenza esplicita dalla variabile indipendente y . È immediato mostrare che questa PDE ammette il gruppo di simmetria di Lie ad un parametro ($\tilde{x} = x, \tilde{y} = y + \epsilon, \tilde{u} = u$) di generatore infinitesimo $\hat{X} = \frac{\partial}{\partial y}$. Una soluzione $u = \Theta(x, y)$ definirà una soluzione invariante del gruppo se e solo se

$$\hat{X}(u - \Theta(x, y))\Big|_{u=\Theta(x, y)} = -\frac{\partial\Theta}{\partial y} = 0.$$

Sotto l'azione del gruppo una soluzione non invariante $u = \Theta(x, y)$ della PDE è trasformata in una famiglia ad un parametro di soluzioni

$$u = \Theta(x, y; \epsilon) = \Theta(x, y + \epsilon).$$

Quindi, come abbiamo già notato, l'esistenza di un gruppo di simmetria di Lie ad un parametro estende una soluzione a una famiglia di soluzioni dipendente da un parametro. Nel caso di una ODE di ordine N , quando la soluzione generale dipende da N costanti arbitrarie, questo è sufficiente a ridurre l'equazione a una ODE di ordine $N - 1$. Nel caso di una PDE ??????, quando la soluzione generale dipende da una funzione arbitraria, il gruppo di simmetrie di Lie ad un parametro non è sufficiente ad integrare l'equazione, ma ci dà solo una classe di soluzioni esplicite.

Soluzioni Invarianti

Sia data un'equazione alle derivate parziali $\mathcal{F}(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0$ di ordine k , dove col simbolo $u_{(k)}$ intendiamo l'insieme delle derivate di

ordine k nelle varie variabili indipendenti $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ coinvolte nell'equazione. Essa ammette un gruppo di trasformazioni di Lie ad un parametro di generatore infinitesimo

$$\hat{X} = \sum_{i=1}^n \xi_i(\mathbf{x}, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(\mathbf{x}, u) \frac{\partial}{\partial u},$$

dove almeno uno dei coefficienti ξ_i è diverso da zero. Vale il seguente teorema:

Teorema 4. $u = \Theta(\mathbf{x})$ è una soluzione invariante se e solo se il suo grafico è una superficie invariante di \hat{X} , i.e. $\hat{X}(u - \Theta(\mathbf{x})) = 0$ (metodo della forma invariante).

Quindi per trovare una soluzione invariante risolviamo l'equazione caratteristica $\hat{X}(u - \Theta(\mathbf{x})) = 0$, i.e.

$$\frac{dx_1}{\xi_1(\mathbf{x}, u)} = \frac{dx_2}{\xi_2(\mathbf{x}, u)} = \dots = \frac{dx_n}{\xi_n(\mathbf{x}, u)} = \frac{du}{\eta_1(\mathbf{x}, u)}.$$

Se $y_1(\mathbf{x}, u), y_2(\mathbf{x}, u), \dots, y_{n-1}(\mathbf{x}, u), v(\mathbf{x}, u)$ sono n costanti d'integrazione funzionalmente indipendenti, ottenute dall'integrazione delle equazioni caratteristiche tali che $\frac{\partial v}{\partial u} \neq 0$, allora la superficie invariante è data implicitamente dalla forma invariante:

$$v(\mathbf{x}, u) = \Theta(y_1(\mathbf{x}, u), y_2(\mathbf{x}, u), \dots, y_{n-1}(\mathbf{x}, u)),$$

dove la funzione Θ è una funzione arbitraria dei suoi argomenti. y_1, y_2, \dots, y_{n-1} sono usualmente dette *variabili di simmetria*.

L'equazione differenziale ridotta è ottenuta sostituendo la forma invariante nella PDE. L'equazione differenziale ottenuta sarà una PDE per la funzione Θ nelle variabili y_1, y_2, \dots, y_{n-1} , i.e. una PDE in $n - 1$ variabili. Quindi l'esistenza di una simmetria puntuale di Lie nel caso di PDEs di ordine n riduce le equazioni a PDEs di ordine $n - 1$.

Esempio 4: Simmetrie dell'equazione del calore.

Un'equazione importante in fisica è quella che descrive la propagazione del calore in un mezzo:

$$u_{x_1 x_1} = u_{x_2}. \quad (45)$$

Dal *Criterio di Invarianza Infinitesimale* (??) otteniamo l'equazione determinante

$$\eta_{x_1 x_1}^{(2)} - \eta_{x_2}^{(1)}|_{u_{x_1 x_1} = u_{x_2}} = 0,$$

che è un'equazione per le funzioni $\eta(x_1, x_2, u)$ e $\xi_i(x_1, x_2, u)$ ma che dipende polinomialmente anche dalle derivate di u rispetto a x_1 e x_2 . Dai coefficienti delle derivate più alte ricaviamo immediatamente che $\xi_i(x, u) = \xi_i(x)$ e $\eta(x, u) = \eta_0(x) + u\eta_1(x)$. La restante equazione è

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \eta_0}{\partial x_2} \right] + \left[\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} \right] u \\ & + \left[2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right] u_{x_1} \\ & + \left[\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right] u_{x_2} \\ & - 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} u_{x_1 x_2} = 0 \end{aligned}$$

Annullando i coefficienti delle derivate di u rispetto a x_1 e x_2 otteniamo:

$$\begin{aligned} \xi_1(x) &= \alpha_1 + \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_1 x_2 + \alpha_5 x_2, \quad (46) \\ \xi_2(x) &= \alpha_2 + 2\alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_2^2, \\ \eta_1(x) &= -\alpha_4 \left(\frac{1}{4} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2 \right) - \frac{1}{2} \alpha_5 x_1 + \alpha_6. \end{aligned}$$

Inoltre la funzione $\eta_0(x)$ è una soluzione dell'equazione del calore (45). Notiamo che, poiché l'equazione del calore è un'equazione lineare, questa simmetria è una funzione dipendente dalle variabili indipendenti, cioè è una simmetria infinito dimensionale che rappresenta la legge di sovrapposizione lineare delle soluzioni.

I coefficienti delle 6 costanti di integrazione α_j in (46) mi danno sei differenti generatori infinitesimi che formano un'algebra di Lie di dimensione 6, le cui relazioni di commutazione sono:

[.,.]	\hat{X}_1	\hat{X}_2	\hat{X}_3	\hat{X}_4	\hat{X}_5	\hat{X}_6
\hat{X}_1	0	0	\hat{X}_1	\hat{X}_5	$-\frac{1}{2}\hat{X}_6$	0
\hat{X}_2	0	0	$2\hat{X}_2$	$\hat{X}_3 - \frac{1}{2}\hat{X}_6$	\hat{X}_1	0
\hat{X}_3	$-\hat{X}_1$	$-2\hat{X}_2$	0	$2\hat{X}_4$	\hat{X}_5	0
\hat{X}_4	$-\hat{X}_5$	$-\hat{X}_3 + \frac{1}{2}\hat{X}_6$	$-2\hat{X}_4$	0	0	0
\hat{X}_5	$\frac{1}{2}\hat{X}_6$	$-\hat{X}_1$	$-\hat{X}_5$	0	0	0
\hat{X}_6	0	0	0	0	0	0

Come esempio ricostruiamo ora, usando il primo Teorema di Lie, il gruppo di trasformazioni e le soluzioni invarianti associate al generatore infinitesimo \hat{X}_4 . Per far ciò dobbiamo risolvere il seguente sistema di ODEs:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_1}{d\epsilon} &= \tilde{x}_1 \tilde{x}_2; & \frac{d\tilde{x}_2}{d\epsilon} &= (\tilde{x}_2)^2; \quad (47) \\ \frac{d\tilde{u}}{d\epsilon} &= -\left[\frac{1}{4} (\tilde{x}_1)^2 + \frac{1}{2} \tilde{x}_2 \right] \tilde{u} \end{aligned}$$

con le seguenti condizioni iniziali $\tilde{u} = u$, $\tilde{x}_1 = x_1$ e $\tilde{x}_2 = x_2$ per $\epsilon = 0$. Integrando (47) otteniamo la seguente trasformazione di Lie ad un parametro:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= F_1(\mathbf{x}, u; \epsilon) = \frac{x_1}{1 - \epsilon x_2}; & (48) \\ \tilde{x}_2 &= F_2(\mathbf{x}, u; \epsilon) = \frac{x_2}{1 - \epsilon x_2}; \\ \tilde{u} &= G(\mathbf{x}, u; \epsilon) \\ &= \sqrt{1 - \epsilon x_2} \exp \left[-\frac{\epsilon x_1^2}{4(1 - \epsilon x_2)} \right] u. \end{aligned}$$

Per ottenere la soluzione invariante rispetto al gruppo di Lie ad un parametro (48), di generatore infinitesimo \hat{X}_4 , usiamo il metodo della forma invariante definito dal Teorema 4. La condizione di invarianza è:

$$x_1 x_2 u_{x_1} + x_2^2 u_{x_2} = -\left(\frac{1}{4}(x_1)^2 + \frac{1}{2}x_2\right)u$$

e le corrispondenti equazioni caratteristiche sono:

$$\frac{dx_1}{x_1 x_2} = \frac{dx_2}{x_2^2} = \frac{du}{-\left(\frac{1}{4}(x_1)^2 + \frac{1}{2}x_2\right)u}$$

La loro soluzione ci dà i due invarianti di \hat{X}_4 ,

$$y = \frac{x_1}{x_2}, \quad v = \sqrt{x_2} e^{\frac{(x_1)^2}{4x_2}} u \quad (49)$$

e quindi la superficie invariante è data da $v = \phi(y)$, dove ϕ è una funzione arbitraria del suo argomento. Da questa ricaviamo

$$u = \frac{1}{\sqrt{x_2}} e^{-\frac{(x_1)^2}{4x_2}} \phi(y).$$

Introducendo la formula per u nella PDE otteniamo una ODE nelle variabili di simmetria, i.e.

$$\phi''(y) = 0. \quad (50)$$

Risolvendo (50) otteniamo una soluzione particolare della equazione del calore, invariante rispetto ad \hat{X}_4 , i.e.

$$u = \Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x_2}} e^{-\frac{(x_1)^2}{4x_2}} \left[C_1 + C_2 \frac{x_1}{x_2} \right],$$

con C_1 e C_2 costanti arbitrarie d'integrazione.

Forma evolutiva dei generatori infinitesimi e trasformazioni non puntuali.

Dato un generatore infinitesimo di una simmetria puntuale di Lie

$$\hat{X} = \sum_{i=1}^n \xi_i(\mathbf{x}, u) \partial_{x_i} + \eta(\mathbf{x}, u) \partial_u, \quad (51)$$

l'operatore infinitesimo

$$\hat{Z} = \left(\eta(\mathbf{x}, u) - \sum_{i=1}^n \xi_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} \right) \partial_u \quad (52)$$

è detto la sua forma evolutiva. Si dimostra facilmente che il gruppo di trasformazioni di Lie ad un parametro associato a (52) è uguale a quello ottenuto a partire da (51). Quindi i due generatori, anche se differenti in forma (dato che il coefficiente infinitesimo di (52) dipende linearmente dalle derivate prime di u) sono equivalenti dal punto di vista della trasformazione che generano.

La forma evolutiva del generatore infinitesimo di una trasformazione puntuale di Lie è il punto naturale per **estendere le trasformazioni**. Tale estensione è stata proposta ed attuata da Emma Noether [8,9].

Generalizziamo il coefficiente infinitesimo di una simmetria puntuale di Lie nella forma evolutiva **introducendo nel coefficiente infinitesimo le derivate di u fino all'ordine ℓ** :

$$\hat{X} = \eta(\mathbf{x}, u, u_1, \dots, u_\ell) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (53)$$

Poiché in (53) il coefficiente di ∂_{x_i} è zero, le variabili indipendenti sono invarianti e nella trasformazione di simmetria si avrà solo una variazione della variabile dipendente dove, se u è una soluzione dell'equazione differenziale, tale sarà anche la trasformata \tilde{u} .

A partire dal primo teorema di Lie il gruppo di trasformazioni ad un parametro associato alla trasformazione infinitesima (53) dovrebbe essere ottenuto integrando l'equazione differenziale d'evoluzione alle derivate parziali

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \epsilon} = \eta(\mathbf{x}, \tilde{u}, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_\ell).$$

Questa è una **PDE di ordine ℓ , possibilmente anche nonlineare**, che, anche se del primo ordi-

ne in ϵ , difficilmente sarà risolvibile a partire da un generico dato iniziale.

Alternativamente potremmo trovare la trasformazione di gruppo utilizzando il secondo Teorema di Lie, cioè costruendo la serie di Lie (13). Esponenziando il generatore infinitesimo si ottiene il gruppo di trasformazioni di Lie ad un parametro

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}, \quad \tilde{u} = u + \epsilon\eta + O(\epsilon^2).$$

Per ottenere il coefficiente di ϵ^2 , dobbiamo prolungare \hat{X} per poter agire sulle derivate u_1, u_2, \dots, u_ℓ della funzione u , che appaiono in η . Considerando termini più elevati dello sviluppo in ϵ dobbiamo prolungare ancora oltre. Così per preservare la condizione di contatto e scrivere la completa trasformazione dobbiamo prolungare fino all'ordine infinito, cioè considerare l'operatore

$$\hat{X}^{(\infty)} = \sum_{j=0}^{\infty} D^j \eta \frac{\partial}{\partial u_j}. \quad (54)$$

Applicando (54) su $u_0 = u$, otteniamo

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}, \quad \tilde{u} = u + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\epsilon^j}{j!} (\hat{X}^{(\infty)})^{j-1} \eta.$$

Se abbiamo $\eta = \eta(\mathbf{x}, u, u_1)$ con $\frac{d^2\eta}{du_1^2} \neq 0$, allora diciamo che la trasformazione di Lie ad un parametro è una **trasformazione di contatto**. Le trasformazioni di contatto formano un gruppo esattamente come le trasformazioni di Lie puntuali. Trasformazioni di contatto esistono solo per equazioni scalari, per le quali il numero delle variabili dipendenti è $m = 1$ e quindi non per sistemi. Nel caso di sistemi, le trasformazioni di contatto si riducono a trasformazioni puntuali.

A. V. Bäcklund ha dimostrato [10, 11] che gruppi di trasformazioni che contengono derivate di ordine superiore al primo sono infinito dimensionali. Le equazioni che ammettono simmetrie con derivate superiori al primo sono molto particolari e in generale vengono dette *esattamente integrabili* [12], dato che sono linearizzabili tramite trasformazioni nonlineari o hanno un'infinità di quantità conservate non banali.

Passiamo ora, quindi, a studiare queste trasformazioni.

Simmetrie generalizzate o di Lie–Bäcklund e sistemi integrabili

Come abbiamo visto, una simmetria generalizzata è definita da un generatore infinitesimo in forma evolutiva dipendente da derivate della variabile dipendente di ordine maggiore al primo.

Possiamo chiederci quando un'equazione differenziale

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0 \quad (55)$$

ammetta una simmetria generalizzata. Naturalmente la condizione di invarianza è la stessa, precisamente

$$\text{pr} \hat{X} \mathcal{F}(\mathbf{x}, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) \Big|_{\{\mathcal{F}(\mathbf{x}, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0\}} = 0, \quad (56)$$

dove con un piccolo cambiamento notazionale, abbiamo indicato con la parentesi graffa attorno alla funzione \mathcal{F} l'equazione con tutte le sue derivate fino all'ordine $k + \ell$, presenti nel prolungamento di (53). Una volta scelte le variabili indipendenti in (53), l'equazione determinante (56) diventa un sistema sovradeterminato di equazioni nelle variabili indipendenti la cui soluzione fornisce la simmetria generalizzata.

Esempio 5: Simmetrie fino al terzo ordine per l'equazione di Burgers.

L'equazione di Burgers [13], il cui nome si deve al fisico olandese J. M. Burgers (1895-1981), è un'equazione differenziale alle derivate parziali fondamentale per la meccanica dei fluidi, e utile anche in numerose aree della matematica applicata, quali la modellazione della gasdinamica e del flusso del traffico. È data da

$$\begin{aligned} u_{2x} - uu_x - u_t &= 0 \\ u &= u(x, t), \quad u_{2x} = u_{xx}. \end{aligned} \quad (57)$$

Cerchiamo una simmetria generalizzata di generatore infinitesimo

$$\hat{X} = \eta(x, t, u, u_x, u_{2x}, u_{3x}) \partial_u. \quad (58)$$

L'equazione determinante diviene

$$\begin{aligned} \text{pr} \hat{X} (u_{2x} - uu_x - u_t) &= \\ D_x^2 \eta - u D_x \eta - u_x \eta - D_t \eta &= 0, \end{aligned} \quad (59)$$

sotto le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} u_{2x} - uu_x - u_t &= 0, \\ u_{3x} - uu_{2x} - u_x^2 - u_{xt} &= 0, \\ u_{4x} - uu_{3x} - 3u_x u_{2x} - u_{2xt} &= 0 \\ u_{5x} - uu_{4x} - 4u_x u_{3x} - 3u_{2x}^2 - u_{3xt} &= 0. \end{aligned}$$

Dopo aver eliminato i termini con le derivate di u rispetto a t , xt , $2xt$ e $3xt$ dall'equazione determinante (59), otteniamo per $\eta(x, t, u, u_x, u_{2x}, u_{3x})$ un'equazione differenziale polinomiale in u_{4x} e derivate inferiori di u . Annullando i coefficienti dei termini indipendenti, si ottiene un sistema sovradeterminato di equazioni per η che lo determinano

$$\begin{aligned} \eta &= \alpha(t)u_{3x} \\ &+ \left[-\frac{3}{2}\alpha u + \frac{1}{2}\dot{\alpha}x + \beta(t) \right] u_{2x} \\ &+ \left[\frac{3}{4}\alpha u^2 - (\beta + \frac{1}{2}\dot{\alpha}x)u + \right. \\ &\left. \frac{1}{8}\ddot{\alpha}x^2 + \frac{1}{2}\dot{\beta}x + \gamma(t) \right] u_x \\ &- \frac{3}{2}\alpha u_x^2 - \frac{1}{4}\dot{\alpha}u^2 + (\frac{1}{4}\ddot{\alpha}x + \dot{\beta})u + \frac{3}{4}\ddot{\alpha} \\ &- \frac{1}{8}\ddot{\alpha}x^2 - \frac{1}{2}\dot{\beta}x - \dot{\gamma}, \end{aligned} \quad (60)$$

dove con un punto indichiamo la derivata rispetto a t , mentre le funzioni $\alpha(t)$, $\beta(t)$ e $\gamma(t)$ sono date da

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= p_3 t^3 + p_2 t^2 + p_1 t + p_0, \\ \beta(t) &= q_2 t^2 + q_1 t + q_0, \\ \gamma(t) &= 3p_3 t^2 + r_1 t + r_0, \end{aligned} \quad (61)$$

con $p_1, p_2, p_3, q_0, q_1, q_2, r_0$ ed r_1 costanti.

I generatori infinitesimi corrispondenti a r_0, r_1, q_0, q_1 e q_2 diversi da zero corrispondono, dopo la sostituzione di $u_{2x} = u_t + uu_x$, alle 5 simmetrie puntuali della equazione di Burgers scritte in forma evolutiva. Delle altre tre simmetrie, simmetrie generalizzate, corrispondenti a p_0, p_1 e p_2 , scriviamo per semplicità solo la prima,

$$\hat{X}_7 = [4u_{3x} - 6uu_{2x} - 6u_x^2 + 3u^2 u_x] \partial_u. \quad (62)$$

Anche in corrispondenza delle simmetrie generalizzate possiamo trovare le soluzioni invarianti $u = \theta(x, t)$, tali che siano annullate dal generatore infinitesimo della simmetria generalizzata. Dato che il generatore della simmetria generaliz-

zata è scritto in forma evolutiva, la condizione di invarianza della soluzione è data semplicemente da $\eta = 0$, che, in generale, è un'equazione nonlineare. Nel caso di \hat{X}_7 l'equazione è

$$4u_{3x} - 6uu_{2x} - 6u_x^2 + 3u^2 u_x = 0. \quad (63)$$

L'equazione (63) può essere integrata una volta e quindi, moltiplicando l'equazione ottenuta per u_x può essere integrata una seconda volta. L'equazione differenziale del secondo ordine nonlineare con due costanti d'integrazione che si è ottenuto è un'equazione differenziale ellittica, la cui soluzione si può esprimere in termini della funzione $\mathcal{P}(x)$ di Weierstrass [14].

Operatori di ricorrenza

Non tutte le equazioni ammettono simmetrie generalizzate e la ricerca di simmetrie generalizzate a partire dalla condizione di invarianza è complicata dal fatto che non sappiamo a priori da quali derivate di u dipenda η . Però sappiamo che in generale se un'equazione ammette una simmetria generalizzata usualmente ne ammette una sequenza, i cui successivi elementi dipendono da derivate sempre più alte di u . Questa successione è caratterizzata da un operatore di ricorrenza, che trasforma una simmetria nella successiva. La condizione di esistenza di un operatore di ricorrenza delle simmetrie può essere verificata per ogni equazione che ammetta una successione di simmetrie generalizzate.

Operatori di ricorrenza per equazioni lineari

Iniziamo ad analizzare il problema della costruzione di operatori di ricorrenza per equazioni differenziali lineari nella variabile dipendente u , cioè equazioni esprimibili come

$$\mathcal{L}u = 0 \quad (64)$$

con \mathcal{L} un operatore differenziale lineare. Se (64) ammette una simmetria generalizzata non banale (53) di ordine ℓ (cioè diversa dalle simmetrie delle equazioni lineari: dilatazione in u e formula di sovrapposizione lineare), allora

$$\mathcal{L}\eta = 0 \text{ quando } \mathcal{L}u = 0, \quad (65)$$

per la definizione di simmetria evolutiva. Se esiste un operatore differenziale \hat{R} indipendente da u tale che $\eta = \hat{R}u$ allora anche $\eta = \hat{R}^s u$ è una

soluzione dell'equazione (64) e una sua simmetria. \hat{R} viene detto *operatore di ricorrenza* corrispondente ad una simmetria generalizzata non banale.

Esempio 6 Consideriamo l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo per un oscillatore armonico:

$$\mathcal{L}u = \left[-\frac{1}{2}D_{2x} + \frac{1}{2}x^2 - iD_t \right] u = 0. \quad (66)$$

Le sue simmetrie puntuali sono

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 &= e^{it}[xu + u_x]\partial_u, \\ \hat{X}_2 &= e^{-it}[xu - u_x]\partial_u, \\ \hat{X}_3 &= u\partial_u. \end{aligned}$$

A partire da queste, possiamo introdurre gli operatori di ricorrenza

$$\begin{aligned} \hat{R}_1 &= e^{it}[x + D_x], \\ \hat{R}_2 &= e^{-it}[x - D_x], \\ \hat{R}_3 &= 1. \end{aligned} \quad (67)$$

Ogni combinazione di \hat{R}_1 ed \hat{R}_2 applicata ad u genera una simmetria. Per esempio il prodotto di \hat{R}_1 ed \hat{R}_2 produce il generatore di simmetria generalizzata

$$\hat{R}_1\hat{R}_2u\partial_u = [u + x^2u - u_{2x}]\partial_u,$$

un generatore di simmetria non puntuale, dato che contiene il termine u_{2x} .

Operatori di ricorrenza per equazioni nonlineari

Passiamo ora a considerare il caso di equazioni nonlineari.

Teorema 5. *Data un'equazione differenziale alle derivate parziali nonlineare*

$$\mathcal{F}(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0, \quad (68)$$

che ammette una simmetria generalizzata non banale

$$\hat{X}_1 = \eta_1\partial_u, \quad (69)$$

essa ammette in generale infinite simmetrie generalizzate non banali

$$\hat{X}_i = \eta_i\partial_u, \quad i = 2, 3, \dots \quad (70)$$

dove $\eta_{i+1} = \hat{R}(u)\eta_i$ in termini di un operatore

differenziale di ricorrenza $\hat{R}(u)$.

A partire dalla condizione di invarianza per l'esistenza di una simmetria per l'equazione (68), tale operatore di ricorrenza è realizzato come un operatore di ricorrenza per l'equazione linearizzata di (68), cioè

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u]v &= \left[\frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial u} + \frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial u_{x_i}} D_{x_i} + \dots \right. \\ &\left. + \frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial u_{x_1 x_2 \dots x_k}} D_{x_1} D_{x_2} \dots D_{x_k} \right] v. \end{aligned} \quad (71)$$

Per ogni dato u soluzione di (68), (71) è una PDE per v . Ovviamente il coefficiente infinitesimo η di una simmetria generalizzata o puntuale di Lie di (68) è una altra soluzione. Se esiste un operatore differenziale $\hat{R}[u]$ dipendente da u e dalle sue derivate tale che $\hat{X} = [\hat{R}[u]v]\partial_v$ sia il generatore infinitesimo di una simmetria di (71), allora questo è un operatore di ricorrenza per le simmetrie di (68). $\hat{X}_s = [(\hat{R}[u])^s \eta]\partial_u$, $s = 1, 2, \dots$ è una sequenza numerabile di simmetrie generalizzate. L'operatore $\hat{R}[u]$ è definito da:

$$\mathcal{L}[u]\hat{R}[u]v = 0, \quad (72)$$

quando (71) e (68) sono soddisfatte.

Per esemplificare la costruzione di un operatore di ricorrenza, consideriamo l'equazione di Burgers scritta in termini della variabile

$$w_x = u, \quad (73)$$

cioè quella che viene detta l'equazione di Burgers potenziale:

$$w_{2x} - \frac{1}{2}w_x^2 - w_t = 0 \quad (74)$$

La sua equazione linearizzata è

$$\mathcal{L}[w]v = v_{2x} - w_x v_x - v_t = 0. \quad (75)$$

Assumiamo che l'operatore di ricorrenza sia della forma

$$\hat{R}[w] = a[x, t, w] + b[x, t, w]D_x. \quad (76)$$

Introducendo (75), (76) in (72) otteniamo un sistema sovradeterminato di equazioni per le

funzioni a e b la cui soluzione è:

$$\begin{aligned} a[x, t, w] &= -\frac{1}{2}\alpha(t)w_x + \frac{1}{2}\dot{\alpha}x + \beta(t), \quad (77) \\ b[x, t, w] &= \alpha(t), \end{aligned}$$

con $\alpha(t) = c_0 + c_1t$ e $\beta(t) = c_2$ con c_0, c_1 e c_2 costanti di integrazione.

Avendo 3 costanti di integrazione possiamo scrivere 3 operatori di ricorrenza indipendenti:

$$\begin{aligned} \hat{R}_1[w] &= \frac{1}{2}w_x - D_x, \quad (78) \\ \hat{R}_2[w] &= \frac{1}{2}(tw_x - x) - tD_x, \\ \hat{R}_3[w] &= 1. \end{aligned}$$

Dato che l'equazione integrale di Burgers (74) è invariante per traslazione, w_x è un coefficiente infinitesimo di una simmetria puntuale di Lie. Usando gli operatori di ricorrenza $\hat{R}_1[w]$ ed $\hat{R}_2[w]$ e loro combinazioni e prodotti possiamo ottenere un'infinità numerabile di simmetrie. Tra queste

$$\hat{R}_1[w]w_x = -w_{2x} + \frac{1}{2}w_x^2 = -w_t,$$

simmetria di traslazione in t ,

$$\begin{aligned} \hat{R}_3[w]w_x &= -tw_{2x} + \frac{1}{2}(tw_x - x)w_x \\ &= -(tw_t + \frac{1}{2}xw_x) \end{aligned}$$

simmetria di dilatazione in x e t e, per esempio, anche

$$\begin{aligned} \left[\hat{R}_1[w]\right]^3 w_x &= -w_{2x,t} + w_x w_{x,t} \\ &\quad - \frac{1}{4}[w_x^2 - 2w_{2x}]w_t, \end{aligned}$$

una simmetria generalizzata non banale.

Nel caso che una PDE ammetta operatori di ricorrenza e quindi un'infinità di simmetrie, diciamo che l'equazione è *integrabile*.

Invece dell'equazione di Burgers integrale (74) per la variabile w possiamo considerare l'equazione di Burgers (57) per la variabile u . Le due variabili sono legate dall'equazione (73) che coinvolge un operatore di derivazione D_x . Possiamo quindi trasformare gli operatori di ricorrenza dell'equazione di Burgers potenziale in operatori di ricorrenza per l'equazione di Burgers. Otte-

niamo in tal modo operatori che dipendono da D_x^{-1} , dove abbiamo usato la relazione formale $D_x^{-1}D_x = 1$. Per esempio in corrispondenza di $\hat{R}_2[w]$ otteniamo

$$\hat{\mathcal{R}}_2[u] = -D_x + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u_x D_x^{-1}.$$

Gli operatori di ricorrenza integro-differenziali appaiono nel caso di molte PDEs nonlineari integrabili [12].



- [1] J. Stewart: *Calculus: Concepts and Contexts*. Brooks/Cole, Pacific Grove CA (2001).
- [2] G. W. Bluman and S. Kumei: *Symmetries and Differential Equations*. Springer & Verlag, New York (1996).
- [3] B. J. Cantwell: *Introduction to symmetry analysis*. Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- [4] P. E. Hydon: *Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide*. Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [5] P. J. Olver: *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer & Verlag, New York (1993).
- [6] H. Stephani: *Differential Equations, their Solution using Symmetries*. Cambridge University Press, Cambridge (1989).
- [7] C. Pozrikidis: *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. Oxford University Press, Oxford (1998).
- [8] Y. Kosmann-chwarzbach: *The Noether Theorems. Invariance and conservation laws in the twentieth century*. Springer & Verlag, New York (2011).
- [9] D. E. Neuenschwander: *Emmy Noether wonderful theorem*. The John Hopkins University Press, Baltimore (2011).
- [10] R. L. Anderson and N. H. Ibragimov: *Lie-Bäcklund Transformations in Applications*. SIAM, Philadelphia (1987).
- [11] N. H. Ibragimov: *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*. D. Reidel Academic Publishing (Dordrecht).1984
- [12] B. G. Konopelchenko: *Nonlinear Integrable Equations. Recursion Operators, Group-Theoretical and Hamiltonian Structures of Soliton Equations*. Springer & Verlag, New York (1987).
- [13] G. B. Whitham: *Linear and nonlinear waves*. Wiley-Interscience, New York (1974).
- [14] E. T. Whittaker, G. N. Watson: *A course of modern analysis*. Cambridge University Press, Cambridge (1952).



Decio Levi: Professore in pensione dall'Università Roma Tre, Ricercatore associato alla Sezione INFN di Roma Tre e Membro associato del CRM Université de Montréal, PQ, Canada
e-mail: levi@roma3.infn.it

Sull'integrabilità della termodinamica dell'equilibrio

When any phenomenon can be described as an example of some general principle which is applicable to other phenomena, that phenomenon is said to be explained

J.C. Maxwell

Antonio Moro

*Department of Mathematics, Physics and Electrical Engineering
Northumbria University Newcastle, UK*

In memoria di Giulio Soliani

Volendolo ricercare, per quanto in modo aneddótico, il primo legame tra integrabilità e termodinamica si è stretto in modo accidentale e forse subconscio all'incontro tra due personalità il cui ricordo la storia ha consegnato a due aree della fisica e della matematica distinte tra loro, la termodinamica da un lato e la teoria delle onde nonlineari dall'altro.

La prima di queste personalità, più nota, padre fondatore della teoria delle transizioni di fase e consacrato nel 1910 dal premio Nobel, Johannes Diederik van der Waals (1837-1923); la seconda, suo discepolo, fisico e matematico, Diederik Korteweg (1848-1941), pioniere della teoria della catastrofi ante litteram [1], scopritore nel 1895, insieme al suo studente di dottorato Gustav de Vries, della celebre equazione KdV. Si tratta del

più noto esempio di equazione solitonica, che descrive la propagazione di onde superficiali in un canale rettilineo d'acqua bassa. Tuttavia questa equazione fu riconosciuta nella sua importanza soltanto 24 anni dopo la scomparsa di Kortweg grazie ad un lavoro seminale e pionieristico di Norman Zabuski e Martin Kruskal [2]. In quest'ultimo, gli autori studiando con l'ausilio dei primi calcolatori elettronici - sarebbero da considerarsi se non pionieri comunque avanguardisti anche in questo - le proprietà di certe soluzioni che descrivono la propagazione di onde solitarie si accorsero che alcune di queste, di forma e dimensioni specifiche, interagiscono mutualmente mantenendo la loro identità, cioè forma e dimensioni, a seguito dell'interazione, così come due biglie quando si scontrano sul piano del tavolo. Proprietà che si percepisce immediatamente come eccezionale se si fa l'esercizio di seguire con l'occhio due onde distanti sulla superficie del mare e provare a identificarle dopo essersi scontrate. Tipicamente, l'interazione tra due on-

de qualunque ha un andamento (*pattern*) a vista pressochè caotico, generando numerose onde e perturbazioni di frequenze e ampiezze diverse (*radiazione*). Le onde solitarie scoperte da Zabuski e Kruskal, che si comportano come se fossero particelle elementari, rigide ed indivisibili (almeno se non accelerate troppo) alla stregua dei *protoni, elettroni, neutroni*, furono denominate appunto *solitoni*. L'importanza e il successo dell'equazione KdV fu essenzialmente sancita dalla storia successiva, dimostrando da un lato di non rappresentare un caso isolato e neppure una mera curiosità matematica, in quanto esempio paradigmatico di una grande famiglia di equazioni nonlineari - molto spesso denominate, assecondando un gusto tipicamente anglosassone, con misteriosi acronimi, NLS, KP, DS, AKNS, i quali nascondono nella maggior parte dei casi i nomi dei loro scopritori o inventori o di coloro che per primi le han risolte [3]. L'esistenza di soluzioni solitoniche rappresenta la proprietà principale di queste equazioni. I solitoni sono oggetti talmente fondamentali da poter essere agevolmente calate dall'iperuranio matematico nella realtà quotidiana o quasi, nella loro imperfetta ma convincente realizzazione come impulsi luminosi in fibra ottica [4, 5], speciali perturbazioni in superfluidi e superconduttori e nei cosiddetti condensati di Bose-Einstein [6]. Sono inoltre correnti gli sforzi degli studiosi di riconoscere il meccanismo di formazione di solitoni nell'occorrenza di alcuni fenomeni rari ed estremi come gli tsunami o le cosiddette *rogue waves*, espressione suscettibile di diverse interpretazioni potendosi tradurre come onde *isolate*, nel senso di eventi rari, o onde *canaglia* con riferimento alla loro pericolosità e pertanto temute da transatlantici e piattaforme petrolifere in oceano [7, 8].

La storia dei solitoni, delle loro equazioni e della loro importanza nella fisica e nella matematica della seconda metà del XX secolo si articola tra la scoperta di nuove equazioni, nuove soluzioni, impensabili applicazioni, dalla fisica nucleare alla struttura del DNA, e inaspettate delusioni, in una frenetica logica di competizione e collaborazione tra blocco occidentale e orientale, politicamente contrapposti e scientificamente sovrapposti. In questo contesto si può riconoscere all'accademia italiana un importante ruolo allo stesso tempo centrale e trasversale. In questo

clima, scosso dalla diaspora degli scienziati sovietici e all'inevitabile alternanza di alti, legati alla scoperta di nuove applicazioni dei solitoni a più diversi ambiti della fisica, e bassi dovuti alla formalizzazione, talvolta eccessiva ed ermetica di alcuni capiscuola, un ruolo chiave è stato svolto dalla scuola italiana di fisica matematica e fisica teorica, in particolare dalla scuola storica dell'Università del Salento - già Università di Lecce. Grazie al fondamentale contributo dei suoi pionieri, Giulio Soliani, Flora Pempinelli e Marco Boiti, la scuola da loro fondata è stata in grado di produrre risultati scientifici importanti e di alto valore tecnico e concettuale, come per esempio lo sviluppo di metodi analitici [9, 10, 11], quali le estensioni del metodo della trasformata di scattering inverso, e algebrici [12], contribuendo inoltre alla creazione dell'identità di una nuova comunità scientifica internazionale, che trovava negli immancabili appuntamenti dei convegni di Gallipoli dedicati alla fisica nonlineare, non solo l'occasione per promuovere la propria ricerca e aggiornarsi sui progressi altrui, ma anche per celebrare la nascita di un nuovo paradigma, quello della teoria dei sistemi integrabili, in una fase cruciale del suo sviluppo.

Tuttavia, questa storia appassionante, cui d'altra parte il riferimento è doveroso, richiederebbe molte pagine per essere esaurita e ci porterebbe lontano dal nostro proposito iniziale di chiarire il legame tra termodinamica dell'equilibrio e concetto di integrabilità e soprattutto come quest'ultimo possa essere proposto come universale chiave interpretativa di un'ampia varietà di fenomeni.

Cos'è l'integrabilità?

Questa domanda, titolo tra l'altro di una popolare - nel settore - raccolta di articoli di rassegna sulla teoria e i metodi esatti per lo studio di equazioni differenziali nonlineari [13], è tanto naturale quanto insidiosa. Di fatto non esiste ancora, alla data in cui scriviamo, una definizione unica e universalmente accettata di integrabilità. Inoltre, la discussione sul significato stesso e profondo di integrabilità può sortire il duplice effetto di trascinare la discussione su un piano pseudo-filosofico, quindi vago,

e allo stesso tempo alienare completamente l'interlocutore, per quanto possa avere o no familiarità nel campo dei fenomeni nonlineari. In questa sede, senza pretesa di originalità, e senza tradire particolare furbizia o peggio malafede, ci limiteremo a dare la definizione di integrabilità che secondo noi meglio si adatta, a posteriori, al tema qui trattato. In particolare, costruendo sulle solide fondamenta della dinamica classica, possiamo introdurre il concetto di integrabilità per un sistema dinamico classico, pensando per esempio ad un sistema di N particelle puntiformi di massa m che interagiscono mutualmente per esempio per effetto della forza di gravità. In questo caso, ovvero nel contesto di sistemi discreti di particelle, si parla di integrabilità quando il detto sistema, considerati gli eventuali vincoli cui è soggetto, ammette un numero di quantità conservate (nel tempo) almeno uguale al numero dei suoi gradi di libertà. I gradi di libertà sono definiti dal numero minimo di variabili necessarie a identificare senza ambiguità la configurazione del sistema. Per esempio, il set delle posizioni nello spazio di ogni singola particella del sistema rappresenta una configurazione. Una biglia su un tavolo soggetta unicamente alla gravità ha due gradi di libertà, essendo due le variabili coordinate sufficienti a identificarne la posizione essendo la terza variabile "vincolata dal piano del tavolo. Questo concetto classico di integrabilità, noto come integrabilità *à la* Liouville-Arnold, implica che per conoscere l'evoluzione nel tempo di un sistema dinamico, che in generale è descritto da un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine, dettato dalla seconda legge della dinamica di Newton, è sufficiente, se si conoscono le costanti del moto, dette anche *integrali* del moto, risolvere un sistema equivalente di equazioni del primo ordine. Inoltre, una scelta particolare delle costanti del moto corrisponde ad una scelta particolare delle condizioni di partenza del sistema. L'esistenza e la conoscenza delle costanti del moto consente pertanto di ridurre l'ordine di complessità di un problema, che nell'esempio citato consiste nel dover risolvere equazioni differenziali del primo ordine anziché del secondo. Naturalmente ciò non vuol necessariamente dire che il problema finale sia semplice,

se si immagina per esempio che per sistemi con molti gradi di libertà, centinaia, migliaia o più, si tratterebbe di risolvere simultaneamente altrettante equazioni. Un tale problema in certi casi può essere al di fuori della portata anche dei calcolatori più potenti oggi disponibili. La seconda legge della dinamica consente di prevedere in modo assolutamente deterministico l'evoluzione del sistema, ammesso che le forze in gioco siano tali da garantire l'esistenza e unicità delle soluzioni di queste equazioni. Un altro aspetto rilevante da considerare è rappresentato dalla stabilità del comportamento del sistema rispetto a piccoli cambiamenti delle condizioni iniziali. In altre parole, ci si può ragionevolmente aspettare che confrontando due particelle in moto, soggette esattamente alle stesse forze, ma le cui posizioni e velocità iniziali differiscano tra loro di una quantità infinitesima, i corrispondenti punti di arrivo, ovvero gli stati finali, trascorso il medesimo intervallo di tempo, non differiscano di molto. Diversamente, in presenza di certe forze, cosiddette nonlineari, può accadere intanto che la soluzione fisicamente accettabile possa addirittura non esistere. In questi casi diventa necessario interrogarsi sulla procedura che ha portato ad ottenere l'equazione come modello matematico del sistema fisico di interesse. Nei casi in cui la soluzione esista, potrebbe non essere l'unica e addirittura dipendere *drammaticamente* dai dati iniziali. Potrebbe infatti accadere che una leggera variazione delle condizioni iniziali porti a stati finali completamente differenti e lontani tra loro. Si pensi per esempio ad un bicchiere d'acqua fredda, ben isolato, esattamente a zero gradi centigradi. Una piccola variazione dello stato iniziale, ovvero dell'insieme delle velocità delle molecole d'acqua, tale per cui il risultato fosse una temperatura di un infinitesimo al di sotto piuttosto che al di sopra dello zero, si tradurrebbe nella più spiacevole e rischiosa esperienza di mandar giù un blocco di ghiaccio nella forma di bicchiere piuttosto che l'acqua contenuta nel bicchiere.

Stabilito che l'esistenza di un numero adeguato di leggi di conservazione sia una proprietà speciale, che non tutti i sistemi fisici posseggono, questo ci consente di identificare una classe di

sistemi e fenomeni associati conferendogli dignità sufficiente da dargli un nome, denominandoli appunto *integrabili*. Vogliamo inoltre evidenziare il fatto che l'integrabilità è un concetto che non si pronuncia sulla natura delle interazioni, ma piuttosto sulla loro modellizzazione matematica. Per esempio, l'oscillatore armonico, uno dei sistemi integrabili più semplici, ammette molteplici realizzazioni che vanno dal pendolo, in regime di piccole oscillazioni dove l'interazione in gioco è la gravità, al moto degli ioni di un cristallo, in opportune condizioni ambientali, dove l'interazione in gioco è quella elettromagnetica. Pertanto, l'integrabilità caratterizza una classe di sistemi speciale e allo stesso tempo universale, in quanto non dipende in principio dalla natura delle interazioni in gioco e dalle dimensioni fisiche del sistema.

Sulla base della definizione data sopra, pronunciarsi sull'integrabilità di un sistema del tipo descritto, costituito da un certo numero di particelle di massa data è un problema ben posto e almeno in linea di principio semplice da risolvere. Si tratta infatti di controllare che la definizione di integrabilità sia verificata, o al limite, nei casi in cui una dimostrazione diretta risultasse troppo complicata affidarsi a teoremi che consentono di pronunciarsi sulle leggi di conservazione di un sistema attraverso l'analisi di proprietà possibilmente più "appariscenti". Per esempio, secondo il celebre teorema di Noether - che porta il nome dell'eminente matematica tedesca Emmy Noether, vissuta tra la fine del XIX e la prima parte del XX secolo - ogni quantità conservata nell'evoluzione di un sistema è indissolubilmente legata ad una sua proprietà di simmetria o come direbbe un fisico matematico, alle proprietà di invarianza della Lagrangiana rispetto a certe trasformazioni delle coordinate. In questo caso, il problema di contare le leggi di conservazione si traduce nel problema di contarne le simmetrie. Per esempio, il fatto che l'attrazione gravitazionale tra due corpi celesti dipenda unicamente dalla loro distanza e non dalla relativa posizione angolare comporta una invarianza o simmetria per rotazioni dell'uno rispetto all'altro. Tale simmetria implica che il momento angolare, che misura la quantità di moto associata alla rotazione si conserva. L'importanza e la potenza di questo teorema sono particolarmente evidenti nell'esempio citato con-

siderando che riconoscere in un sistema fisico la simmetria di una sfera, di un cilindro o altre figure regolari è molto più intuitivo e immediato piuttosto che misurarne o calcolarne il momento angolare.

Cosa ne sarebbe del concetto di integrabilità sopra introdotto se il sistema in questione fosse una corda vibrante? Quanti gradi di libertà ha una corda? Prima di rispondere a questa domanda, si pensi, per semplificare, alla corda come a un oggetto unidimensionale di fissata lunghezza ma di sezione infinitesima, costituita quindi da un numero fissato di particelle puntiformi collegate tra di loro da una molla di massa trascurabile. Ciascuna di queste particelle costituisce un oscillatore, che si muove, assumiamo per semplicità, lungo la direzione verticale. La corda complessivamente può essere pensata allora come un sistema di oscillatori accoppiati. Ciascun oscillatore possiede un grado di libertà, in quanto basta un'unica variabile per individuarne la posizione una volta fissato un riferimento sulla verticale. Quindi la corda complessivamente possiede N gradi di libertà, dove N è il numero di oscillatori in questione. Il punto cruciale è che questo numero N risulta essere estremamente grande, di ordine pari a quello del numero di Avogadro, cioè 10^{23} . Fortunatamente, in questi casi, l'analisi matematica ci viene in aiuto consentendoci di fornire un'accurata descrizione delle deformazioni della corda vibrante se pensata come un sistema continuo costituito da infiniti oscillatori. Questo risultato, che si fonda sui principi fondamentali dell'analisi matematica, consente di introdurre una notevole semplificazione, in quanto trasforma il problema di calcolare la posizione nel tempo di infiniti oscillatori, risolvendo infinite equazioni differenziali tra loro concatenate, nel problema di risolvere una singola equazione differenziale in due variabili indipendenti, il tempo e la coordinata spaziale utilizzata per identificare univocamente un punto sulla corda. Questo argomento ci porta a stabilire quindi che la corda è di fatto un sistema dinamico con infiniti gradi di libertà.

Procedendo allora secondo la logica à la Liouville-Arnold, dovremmo definire un sistema infinito dimensionale come la corda vibrante integrabile se ammette un numero infinito di leggi di conservazione, o equivalentemente, di simme-

trie. A prima vista, una definizione del genere potrebbe apparire così restrittiva da indurre a pensare che non possano esistere affatto equazioni differenziali con tale proprietà, o se esistessero, sarebbero così artificiali da non trovare applicazioni ragionevoli in fisica. È possibile tuttavia dimostrare che le equazioni differenziali nonlineari solitoniche come pure altre equazioni che descrivono la propagazione di onde in mezzi continui, come per esempio fluidi, plasmi, conduttori, ammettono infinite leggi di conservazione e sono pertanto integrabili nel senso sopra specificato. Dal punto di vista pratico, la possibilità di calcolare soluzioni esplicite ed esatte, talvolta con proprietà notevoli, come l'esistenza di onde solitarie particolarmente stabili o periodiche possono essere manifestazioni della proprietà stessa di integrabilità. Tuttavia i sistemi con queste proprietà non possono necessariamente dirsi tali.

Nel contesto dei sistemi fisici modellizzati da sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali, la cui soluzione dipende in generale da più di una variabile, si deve constatare l'esistenza di famiglie distinte di equazioni per le quali dimostrare l'integrabilità richiede l'impiego di metodi e approcci molto diversi, tali da essere comunemente associate ad aree e comunità di studiosi distinte nell'ambito della fisica matematica e della fisica teorica. In particolare, le equazioni lineari sono molto speciali, in quanto in virtù della linearità consentono di fornire, almeno in linea di principio, una descrizione completa dello spazio delle soluzioni. Le equazioni lineari infatti soddisfano al cosiddetto principio di sovrapposizione, per cui la conoscenza di un sottinsieme minimo di soluzioni indipendenti consente di costruire ogni altra soluzione mediante una opportuna combinazione lineare di queste. Seguendo la terminologia introdotta da Calogero [14], i sistemi C -integrabili, ovvero integrabili nel senso classico, sono quelli modellizzati da equazioni nonlineari ma riducibili a equazioni lineari mediante una opportuna trasformazione delle variabili dipendenti e indipendenti. I sistemi S -integrabili sono rappresentati dalle equazioni solitoniche, che tradizionalmente si risolvono utilizzando un elegante metodo matematico, che può pensarsi moralmente

come un analogo nonlineare della trasformata di Fourier. Di questo metodo, denominato metodo IST (trasformata spettrale o di scattering inversa), esistono diverse formulazioni altrettanto eleganti e sofisticate come per esempio il metodo del Dbar-dressing [15], per citarne una.

Le equazioni della termodinamica.

Un sistema termodinamico è in generale un sistema fisico costituito da un numero molto grande di componenti rispetto alla scala fisica di riferimento. Per esempio, il sopra menzionato bicchiere d'acqua è un sistema termodinamico in quanto nel volume del bicchiere sono contenute un numero grandissimo di molecole, come si è detto dell'ordine di 10^{23} , per cui il volume occupato da ciascuna molecola, misurato per esempio in centimetri cubi, si può calcolare nell'ordine di 10^{-21} centimetri cubi, mentre un bicchiere medio occupa un volume dell'ordine di 100 centimetri cubi. Ben 23 ordini di grandezza di differenza! Il sistema termodinamico in questo caso è rappresentato dall'insieme delle molecole d'acqua e come tale può essere descritto dal punto di vista macroscopico (cioè su una scala che è un multiplo molto grande delle dimensioni dei singoli componenti) da quantità fisiche di due tipi dette rispettivamente *intensive* ed *estensive*. Le quantità estensive sono quelle che dipendono dalle dimensioni del sistema, come per esempio il volume o l'entropia, quest'ultima fornisce una misura del grado di disordine del sistema. Le quantità intensive si riferiscono invece a proprietà intrinseche del sistema, come per esempio la temperatura e la pressione. Tutte queste quantità, dette variabili termodinamiche o funzioni di stato a seconda del ruolo che esse giocano nelle equazioni della termodinamica, possono interpretarsi come valori medi su scala macroscopica di opportune quantità microscopiche. Alcune sono più intuitive, come nel caso del volume, altre lo sono meno come nel caso della temperatura, che può essere interpretata, secondo la teoria cinetica dei gas [16], come il grado medio di agitazione delle molecole.

Il fatto che debbano esistere delle equazioni

della termodinamica può essere colto con empirica intuizione se si fa l'esperimento mentale di provare a scaldare su una fiamma una pentola d'acqua colma fino all'orlo fino a ebollizione. Molto probabilmente non ci si riuscirà, in quanto l'acqua scaldandosi si espanderà, traboccando dalla pentola e spegnendo la fiamma sottostante. Mettendo da parte considerazioni sull'esito potenzialmente catastrofico di un esperimento decisamente da non provare nella propria cucina, risulta evidente che debbano esistere delle equazioni che leghino tra loro le variabili termodinamiche, in questo caso volume e temperatura, considerato che non avendo posto un coperchio sulla pentola la pressione rimane costante.

Un sistema termodinamico è in *equilibrio* se tutte le variabili che lo definiscono non dipendono dalla posizione e dal tempo. L'acqua nella pentola sul fornello sarà per esempio in equilibrio a fornello spento e fuori dall'equilibrio a fornello acceso. Infatti la sua temperatura cambierà nel tempo e ci aspettiamo che non sia uniforme lungo la pentola stessa. Ci aspettiamo infatti che sia più calda in prossimità del fornello e più fredda lontano da esso. Per un sistema in equilibrio, le equazioni che legano tra loro le variabili termodinamiche sono dette *equazioni di stato*. Nel seguito, nel discutere l'integrabilità in termodinamica, ci concentreremo sull'esempio classico del gas in un contenitore di volume dato nel quale si può espandere o comprimere rispettivamente scaldandolo o raffreddandolo oppure agendo con un pistone in direzioni diverse.

Un altro aspetto da menzionare e che mette a dura prova la teoria che porta alla deduzione delle equazioni di stato di un sistema riguarda la loro capacità di predire una speciale classe di fenomeni termodinamici denominati *transizioni di fase*. Ma più precisamente, cosa sono le transizioni di fase e qual è la loro origine? Per capirlo pensiamo al gas nel contenitore a temperatura costante, sufficientemente bassa. Il significato di "sufficientemente bassa" sarà chiaro a breve. Ragionevolmente, ci si aspetta che comprimendo il gas (ovvero riducendo il suo volume) la pressione all'interno del contenitore aumenti e che ad ogni variazione di volume corrisponda una opportuna variazione della pressione. Questo è vero in generale, ma non sempre. L'esperimento dimostra invece che comprimendo il gas oltre un

certo limite, la pressione cessa di aumentare e rimane costante fino al raggiungimento di uno specifico valore del volume, dopodiché la pressione ritorna a crescere con la diminuzione del volume ma con un gradiente molto più alto. La situazione descritta è riassunta in Figura 1. Sappiamo che il motivo per cui la pressione cessa di crescere nonostante si continui a trasferire energia al sistema mediante l'azione meccanica di compressione risiede nel fatto che ad un certo punto il sistema "decide di utilizzare la stessa energia per cambiare il suo *stato* da gassoso a liquido. Infatti, al termine del processo il gas risulta essersi trasformato completamente in liquido, e come si sa comprimere un liquido è molto più difficile che comprimere un gas. Inoltre, come accennato sopra, occorre che la temperatura sia sufficientemente bassa affinché si possa osservare questo salto, *shock*, nell'andamento del volume come funzione della pressione. In particolare, si osserva che esiste una particolare temperatura *critica* al di sotto della quale la detta discontinuità emerge come segnatura della transizione del sistema dalla fase gassosa alla fase liquida. Nella sua tesi di dottorato, nel 1873, van der Waals derivò la prima *equazione di stato*, che oggi porta il suo nome, per descrivere il comportamento di un gas reale quando sviluppa una transizione di fase. La celebre equazione di van der Waals è di solito presentata nella seguente forma

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right) (V - nb) = nRT. \quad (1)$$

dove n è il numero di moli, R la costante universale dei gas, mentre a e b due costanti associate rispettivamente all'interazione di lungo raggio tra le molecole e al *volume escluso*, ovvero il volume totale di un numero di Avogadro di molecole ipotizzate di forma sferica e impenetrabili.

Con riferimento alla Figura 1, il comportamento predetto da van der Waals, descrive, almeno qualitativamente, in modo accurato il comportamento del gas al di sopra della temperatura critica e al di fuori della transizione di fase. All'interno dell'intervallo AB invece l'isoterma predetta presenta un'oscillazione anziché il salto osservato sperimentalmente. Solo due anni dopo James Clerk Maxwell propose un metodo per risolvere la discrepanza, mostrando come l'equazione di van der Waals potesse essere utilizzata per rico-

struire il comportamento fisico, posizionando il salto in modo da tagliare sulla curva isoterma due lobi di area uguale. Si tratta della celebre *regola delle aree uguali di Maxwell*. L'argomento di Maxwell ha di fatto una radice profonda in quanto la regola delle aree uguali corrisponde alla condizione che, alla transizione di fase, stato gassoso e stato liquido corrispondono a due minimi dell' *energia libera* di valore uguale. L'energia libera è la quantità termodinamica il cui valore minimo si realizza quando il sistema si trova in uno stato di minima energia interna e massimo di entropia (o disordine).

Il caso dell'equazione di stato di van der Waals (1) è paradigmatico e intrigante in quanto mostra che la soluzione dell'equazione, rappresentata dalle curve isoterme in Figura 2, pur mancando nel fornire una descrizione diretta e accurata del sistema alla transizione di fase, *contiene* comunque l'informazione su come determinare la soluzione corretta se coadiuvata da un principio o regola aggiuntiva così come quella suggerita da Maxwell. La regola di Maxwell inoltre entra in gioco soltanto quando il sistema si trova in specifiche condizioni ovvero al di sotto della cosiddetta temperatura critica. Esiste una equazione più generale che possa tenere conto automaticamente del principio di Maxwell soltanto quando serve e altrimenti ignorarlo? Per rispondere a questa domanda, occorre fare un passo a monte dell'equazione di stato, invocando l'universale principio di conservazione dell'energia specificato per un sistema termodinamico.

Relazioni di Maxwell e integrabilità

Consideriamo per esempio il solito gas a pressione P e temperatura T e che occupa un volume V , il cui stato di disordine è misurato dalla funzione entropia S . In termodinamica, esistono numerose formulazioni equivalenti del principio di conservazione dell'energia, più o meno intuitive. Nel seguito ci concentreremo su quella che dal nostro punto di vista meglio si presta ad eviden-

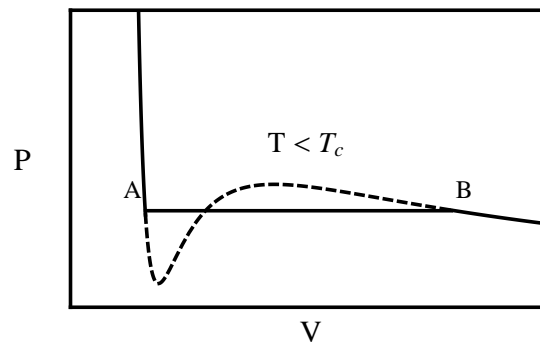


Figura 1: Isoterma tipica per un gas reale al di sotto della temperatura critica. La linea tratteggiata nella regione AB corrisponde al comportamento previsto dall'equazione di van der Waals. La linea continua nella stessa regione mostra invece il salto osservato sperimentalmente.

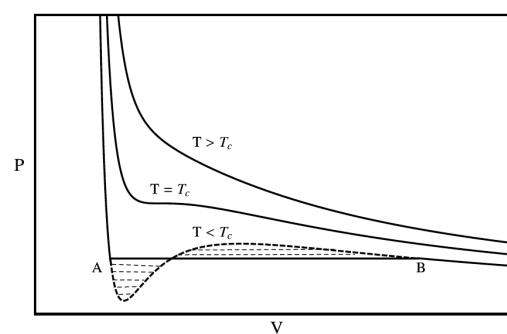


Figura 2: Comportamento tipico delle isoterme per un gas reale per valori della temperatura al di sopra, al di sotto e alla temperatura critica. Il salto al di sotto della temperatura critica, individua sull'isoterma di van der Waals due lobi di area uguale.

ziare la proprietà di integrabilità e che allo stesso tempo consente di ritrovare in termodinamica la fenomenologia tipica della fisica delle onde nonlineari.

Avendo la libertà di scegliere che tipo di esperimento fare, assegniamo a temperatura e pressione il ruolo di variabili indipendenti in termini delle quali misurare volume ed entropia. In questo caso risulta più conveniente enunciare il principio di conservazione dell'energia, ovvero il primo principio della termodinamica, in termini della cosiddetta funzione *energia libera di Gibbs* Φ (rendendo omaggio alla notazione di Landau), così definita in termini di funzioni di stato più note

$$\Phi = U - TS + PV,$$

dove U rappresenta l'energia interna del sistema,

che tiene conto delle mutue interazioni tra le molecole. Il primo principio della termodinamica afferma che ogni piccola variazione di energia libera, denotata col simbolo $d\Phi$, si può calcolare in termini delle corrispondenti variazioni di pressione e temperatura, denotate rispettivamente con dP e dT , mediante la formula

$$d\Phi(P, T) = -S(P, T)dT + V(P, T)dP. \quad (2)$$

Non è casuale che l'entropia $S(P, T)$ e il volume $V(P, T)$ entrambe variabili estensive siano accoppiate rispettivamente alla temperatura e pressione delle quali sono dette funzioni di stato coniugate. La pressione infatti, in quanto misura di una forza per unità di superficie, è responsabile delle sollecitazioni meccaniche a loro volta causa di una variazione di volume, per cui il loro prodotto corrisponde al lavoro meccanico esercitato sul sistema. La temperatura è invece il risultato macroscopico delle fluttuazioni cinetiche a livello molecolare. Tali fluttuazioni sono collegate alla "propensione" del sistema a raggiungere livelli di disordine più elevato, così come il vapore acqueo tende ad occupare tutto il volume a disposizione, aumentando quindi il livello di disordine a temperatura è sufficientemente alta. Il grado di disordine invece diminuisce a temperatura più bassa quando condensa, occupando quindi soltanto una porzione del volume a disposizione. Un altro aspetto fondamentale dell'equazione (2) consiste nel fatto che la quantità $d\Phi$ non rappresenta soltanto fisicamente una piccola variazione di energia libera, ma è anche un *differenziale esatto*, nozione matematica che ha diverse e importanti conseguenze fisiche. Per esempio, assumendo che qualunque percorso che porti il sistema da uno stato A ad uno stato B sia fatto di stati intermedi ammissibili, o in termini più matematici, se il dominio considerato delle variabili termodinamiche è *semplicemente connesso*, la variazione di energia libera lungo un qualunque percorso *circolare*, tale per cui stati iniziale e finale coincidano, è nulla. Si può vedere che tale condizione è verificata se entropia e volume soddisfano alla cosiddetta relazione di Maxwell

$$\frac{\partial V}{\partial T} + \frac{\partial S}{\partial P} = 0. \quad (3)$$

Supponiamo ora che il sistema in questione sia tale per cui la funzione entropia si possa esprime-

re, pur non specificandone esattamente il modo, in termini del volume e della temperatura come segue

$$S = \tilde{S}(V) + F(T). \quad (4)$$

Si dice cioè che l'entropia è separabile come funzione del volume $V(P, T)$ e della temperatura T . Come vedremo questa ipotesi restringe la classe di sistemi in considerazione includendo tuttavia una famiglia ancora ampia e interessante di sistemi termodinamici. Confrontando con qualunque testo standard di termodinamica classica si può verificare che l'ipotesi (4) include alcuni esempi canonici come il gas ideale, ovvero un gas costituito ovvero da particelle puntiformi non interagenti, per cui

$$S_{\text{id}} = n \log \left(\frac{eV}{n} \right) - ng(T),$$

dove n denota il numero di moli del gas. Un altro esempio ancora più importante è dato dal modello per un gas reale di van der Waals per cui la funzione entropia è della forma

$$S_{\text{vdw}} = n \log \left(\frac{e}{n}(V - nb) \right) - nh(T), \quad (5)$$

dove $g(T)$ and $h(T)$ sono opportune funzioni della temperatura (si veda per esempio Landau-Lifschitz [16]) ed e una costante. Esplicitando quindi la derivata dell'entropia otteniamo la seguente equazione differenziale alle derivate parziali per il volume come funzione di pressione e temperatura

$$\frac{\partial V}{\partial P} + \alpha(V) \frac{\partial V}{\partial T} = 0 \quad (6)$$

dove si è posto $\alpha(V) := \tilde{S}'(V)^{-1}$. Osserviamo incidentalmente che specificando l'equazione (6) per una mole sia di un gas ideale sia di un gas di van der Waals, si ottiene

$$\frac{\partial V}{\partial P} + V \frac{\partial V}{\partial T} = 0. \quad (7)$$

Quest'ultima equazione che chiamiamo di Riemann-Hopf, così come la sua generalizzazione (6), rappresenta il prototipo oltre che il modello più semplice per descrivere la propagazione di onde nonlineari cosiddette iperboliche in quanto si propagano in una certa direzione con velocità finita. La nonlinearità, data dal termi-

ne $V \frac{\partial V}{\partial T}$ nell'equazione, ha come conseguenza il fatto che un'onda il cui profilo all'istante iniziale corrisponda alla forma mostrata in Figura 3 evolve in modo che i punti sulla curva a quota

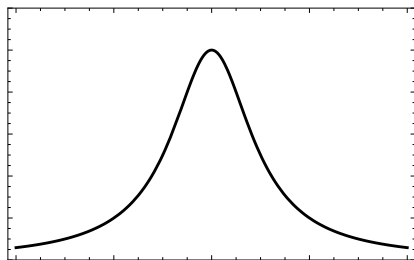


Figura 3: Il profilo iniziale evolve secondo l'equazione di Riemann-Hopf in modo tale che punti a quota più alta viaggiano a velocità maggiore rispetto a punti a quota più bassa.

più alta viaggino a velocità maggiore rispetto ai punti a quota più bassa. Pertanto, nell'evoluzione, il profilo della soluzione risulterà progressivamente più ripido (*nonlinear steepening*) fino a raggiungere un cosiddetto punto di rottura come mostrato in Figura 4 in alto. Oltre il punto di rottura, il profilo si ripiega su se stesso come mostrato in Figura 4 a destra. In particolare, si dice che oltre il punto di rottura la soluzione è descritta da una funzione polivalente, in quanto a certi punti dell'asse orizzontale corrisponde più di un valore sulla grafico della curva. Sebbene una soluzione data da una funzione polivalente possa essere in linea di principio accettabile, si pensi infatti ad un'onda sulla superficie del mare che si ripiega su se stessa prima di precipitare, occorre interrogarsi se una soluzione così fatta in realtà esista o sia stabile. Un'onda del mare, per esempio, prima o poi si rompe. In realtà in molti sistemi la soluzione polivalente non emerge affatto, in quanto questo regime per essere raggiunto richiede il passaggio attraverso condizioni estreme realizzate appunto nelle vicinanze del punto di rottura. In tali condizioni, spesso capita che fattori, magari trascurabili nelle fasi iniziali dell'evoluzione, come per esempio la viscosità del fluido, di cui il modello dato dall'equazione di Riemann-Hopf non tiene conto, diventano rilevanti quando i gradienti sono molto alti per cui entrano in gioco fenomeni nuovi che finiscono per prevenire l'anomalia rappresentata da una soluzione polivalente. Tale é, come

vedremo, il caso del modello di van der Waals. Se si fa l'esercizio di ribaltare il grafico, come mostrato in Figura 5, si vede che il volume, secondo l'equazione di stato proposta da van der Waals, corrisponde, al di sotto della soglia critica, ad una funzione polivalente della pressione. Questo comportamento, come osservato sopra, risulta in realtà soppresso, essendo soppiantato da una funzione discontinua, dove la discontinuità viene posizionata secondo la regola delle aree uguali. Prima di discutere come sia possibile

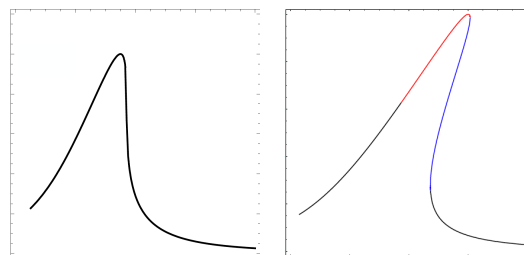


Figura 4: Nonlinear steepening di un'onda secondo l'equazione di Riemann-Hopf

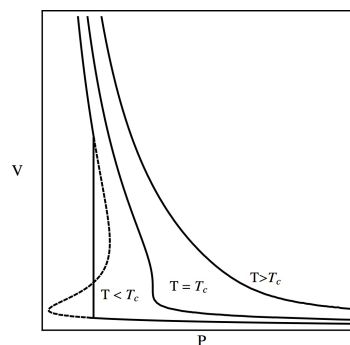


Figura 5: Nonlinear steepening secondo l'equazione di van der Waals

ottenere la soluzione proposta da Maxwell come soluzione di una apposita equazione di stato più generale che contenga implicitamente la regola delle aree uguali, soffermiamoci un attimo a riflettere sull'equazione (6). Essa mostra come la relazione di Maxwell (3), che impone una relazione tra volume ed entropia, insieme a una ipotesi generale sulla forma funzionale di quest'ultima fornisce una equazione differenziale che se risolta dà il volume $V = V(P, T)$ come funzione di pressione e temperatura. In termodinamica una relazione di questo tipo tra le variabili in gioco, in questo caso P, T e V , è detta *equazione di stato*. Una proprietà notevole di questa equazione,

scritta nella forma (6), è che può essere risolta utilizzando un metodo canonico detto metodo delle caratteristiche. La soluzione in questione è data, per una scelta qualunque della funzione $\alpha(V)$, in modo implicito dalla formula

$$T - \alpha(V)P = f(V) \quad (8)$$

dove $f(V)$ denota una funzione arbitraria del volume. Per una forma fissata della funzione $\alpha(V)$, l'equazione (8) rappresenta infatti una famiglia infinita di equazioni di stato. Si può inoltre verificare senza difficoltà che questa famiglia contiene come caso particolare l'equazione di van der Waals scegliendo

$$\alpha(V) = \frac{V - nb}{nR} \quad f(V) = \frac{na}{V} - \frac{n^2b}{RV^2}. \quad (9)$$

Un ulteriore caso particolare è dato dall'equazione di stato del gas ideale dato dal caso $a = 0$ e $b = 0$. In generale, quindi la scelta della funzione $f(V)$ fissa un modello particolare nella famiglia di equazioni di stato contenute nella soluzione generale della relazione di Maxwell. Tale funzione può essere fissata per esempio misurando una particolare isoterma o isobara, ovvero una particolare curva che rappresenti il volume come funzione rispettivamente della pressione o della temperatura. Similmente, se oltre alla funzione $f(V)$ anche la funzione $\alpha(V)$ non fosse nota, potrebbero essere determinate entrambe misurando due isoterme isobare o una combinazione delle due anziché una curva soltanto.

Quanto detto sopra, mette in evidenza che tutti i sistemi termodinamici in equilibrio la cui relazione di Maxwell si riduce all'equazione di Riemann-Hopf sono risolvibili portando a una famiglia di equazioni di stato viste appunto come soluzioni di una equazione differenziale nonlineare. In aggiunta, per completare il quadro, si può verificare che l'equazione di Riemann-Hopf è molto più che risolvibile, è infatti completamente integrabile. Per verificarlo, è sufficiente, come sopra discusso, provare che l'equazione ammette infinite simmetrie. Una simmetria per un'equazione differenziale alle derivate parziali come (6) può essere pensata come l'invarianza delle proprietà del sistema rispetto ad una variabile associata. Per esempio, la simmetria cilindrica può essere espressa come l'invarianza delle quantità

fisiche del sistema rispetto a variazioni dell'angolo, chiamiamolo θ , che misura la posizione del sistema rispetto all'asse del cilindro. Quindi, se ci si prende cura di utilizzare questa posizione angolare come una delle coordinate di riferimento, l'espressione matematica della soluzione, chiamiamola u , non dipenderà da θ , cioè

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0.$$

Un modo per esprimere questa invarianza consiste nel dire che una trasformazione di θ manda una soluzione in se stessa. È possibile generalizzare ulteriormente questo concetto e per farlo pensiamo per esempio all'oscillatore armonico, rappresentato da una massa puntiforme soggetta ad una forza elastica verso un punto di riferimento - il centro - proporzionale alla distanza, chiamiamola u , da esso. Ricordando, per un momento, l'equazione per l'oscillatore armonico di pulsazione ω

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0$$

dove come consuetudine la notazione \ddot{u} denota la derivata seconda rispetto al tempo, senza fare calcoli, ci si rende immediatamente conto che moltiplicando la soluzione per una costante A , la quantità ottenuta, Au è ancora una soluzione. Questa semplice operazione ha l'effetto di cambiare la scala delle oscillazioni, agendo per esempio sulle condizioni iniziali, e produce una dilatazione o contrazione dell'ampiezza massima di oscillazione, senza però cambiare le proprietà del sistema. La massa puntiforme oscillerà esattamente nello stesso modo, ma su una scala diversa! Questa proprietà è tanto elementare quanto non banale, basti pensare infatti all'equazione del pendolo fisico

$$\ddot{u} + \omega^2 \sin u = 0$$

di cui l'oscillatore armonico è una approssimazione per piccole oscillazioni e per cui il ragionamento di cui sopra cade completamente a causa della non linearità, ovvero del fatto che $\sin(Au) \neq Au$ se non solo approssimativamente per valori di u sufficientemente piccoli. Il parametro A è la variabile associata ad una famiglia di trasformazioni di scala e tali trasformazioni hanno la proprietà di mandare una soluzione u in un'altra soluzione Au . Si può pertanto considerare la fami-

glia di soluzioni della forma $u(t, A)$ dove la scala A gioca il ruolo di una variabile indipendente. Ritornando ora all'equazione di Riemann-Hopf, possiamo studiarne le simmetrie pensando alla famiglia di soluzioni della forma $V(P, T, \tau)$ dove τ è una variabile indipendente che ha, come nell'esempio di sopra, la proprietà di mandare una soluzione, per esempio corrispondente ad un valore $\tau = \tau_0$, in un'altra soluzione per un altro valore $\tau = \tau_1 \neq \tau_0$. Fatta questa premessa, cerchiamo di capire a quale tipo di equazioni la soluzione $V(P, T, \tau)$ possa soddisfare come funzione di questa ulteriore variabile. Una ipotesi molto naturale, almeno dal punto di vista matematico, è che, in termini della nuova variabile, la funzione $V(P, T, \tau)$ soddisfi ad una equazione dello stesso tipo, ovvero

$$\frac{\partial V}{\partial P} + \alpha(V) \frac{\partial V}{\partial T} = 0 \quad (10)$$

si deve avere anche

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \beta(V) \frac{\partial V}{\partial T} = 0 \quad (11)$$

per un'opportuna funzione $\beta(V)$. Tale ipotesi sembrerebbe essere completamente arbitraria, ma speriamo di poter convincere a breve il lettore che non sia così. Prima di tutto, affinché l'equazione (11) sussista occorre che essa sia compatibile con l'equazione (10), ovvero, nell'ipotesi in cui V sia una funzione regolare

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \frac{\partial V}{\partial \tau}. \quad (12)$$

Si richiede cioè che il risultato della derivata mista non debba dipendere dall'ordine di derivazione. Il fatto notevole, in qualche modo miracoloso, che si scopre facendo queste verifiche, è che la *condizione di compatibilità* (12) risulta essere soddisfatta per qualunque coppia di funzioni $\alpha(V)$ e $\beta(V)$. Pertanto, l'equazione (11) genera una simmetria per l'equazione (10) consentendo di costruire esplicitamente un' *orbita* nello spazio delle soluzioni, parametrizzata dalla variabile τ . Il ragionamento appena concluso, mostra che è possibile costruire infinite orbite di questo tipo, tante per quante sono le funzioni $\beta(V)$. Quindi l'equazione (10) ammette infinite simmetrie con infinite leggi di conservazione associate ed è quindi completamente integrabile. Una conse-

guenza pressochè immediata di questa analisi è che un sistema termodinamico di questa classe, cioè *integrabile*, ammette infinite funzioni di stato, chiamiamole Λ , associate a ciascuna di queste simmetrie etichettate dalla variabile τ . Questa informazione può essere infatti codificata a monte nella legge di bilancio fondamentale scritta nella forma

$$d\Phi = -SdT + VdP + \Lambda d\tau \quad (13)$$

dove Λ è appunto la generica funzione di stato e τ la variabile coniugata associata. Questo suggerisce la seguente definizione:

Un sistema termodinamico in equilibrio è integrabile se e soltanto se ammette infinite funzioni di stato.

Infine, è importante osservare che la teoria esposta riguardo l'equazione (6) riproduce l'equazione di van der Waals come caso particolare, e come per il modello di van der Waals non spiega il salto della funzione di stato se non ricorrendo ad un criterio aggiuntivo quale la regola di Maxwell. È naturale a questo punto chiedersi se sia possibile considerare un modello che riproduca l'equazione di van der Waals e all'occorrenza, ovvero nella regione critica dove avviene la transizione di fase, implementi la regola di Maxwell. Una risposta in questa direzione può essere data modificando lievemente l'ipotesi di partenza sulla forma della funzione entropia $S = S(V, T)$.

Supponiamo per esempio che l'entropia possa dipendere da altre quantità fisiche - cosa del resto piuttosto legittima - oltre che semplicemente dal volume e dalla temperatura. Questa ipotesi però non può essere arbitraria e in particolare non possiamo allontanarci troppo dalla forma $S(V, T)$ che sappiamo essere corretta almeno al di sopra della temperatura critica. Consideriamo allora la funzione entropia della forma

$$S_\nu(P, T) = S(V, T, \nu V_P, \nu V_T) \quad (14)$$

dove ν è un parametro (*di scala*) piccolo mentre V_P e V_T denotano rispettivamente le derivate parziali del volume rispetto a pressione e temperatura, ed S_ν è una funzione regolare di ν . Una tale dipendenza è realizzata per sistemi dove le funzioni di stato dipendano per esempio dalle compressibilità rispettivamente a temperatura e pressione costante. Il fatto che il parametro *fenomenologico* ν sia piccolo è importante in quanto fa sì che di fatto la correzione introdotta produca

un effetto apprezzabile soltanto per derivate V_P e V_T abbastanza grandi, cosa che accade proprio in prossimità della transizione di fase gas/liquido.

Senza entrare nei dettagli, si può mostrare che trascurando termini correttivi proporzionali a ν^2 , il volume deve essere soluzione di una equazione nonlineare della forma

$$V_P + \alpha V_T + \nu \alpha_1 V_T^2 + \nu \alpha_2 V_{TT} = 0, \quad (15)$$

dove $\alpha = \alpha(V)$, $\alpha_1 = \alpha_1(V)$ e $\alpha_2 = \alpha_2(V)$ sono opportune funzioni. Osserviamo inoltre che questa equazione si riduce esattamente all'equazione di Riemann-Hopf (6) scegliendo $\nu = 0$. Una ulteriore analisi di questa equazione, considerata in prossimità del punto critico della transizione di fase consente di semplificare ulteriormente l'equazione (15) in modo tale da poter scrivere la soluzione nella forma

$$V = V_c + \nu^{1/4} u(x, t) \quad (16)$$

dove

$$x = \frac{P - P_c}{\nu^{1/2}} \quad t = \frac{T - T_c - \alpha_c(P - P_c)}{\nu^{3/4}}$$

e V_c , T_c , P_c e α_c sono i valori delle variabili termodinamiche esattamente al punto critico. La funzione del tipo $u(x, t)$ è soluzione della celebre equazione di Burgers

$$u_t + c_0 u u_x + c_1 u_{xx} = 0$$

e dove c_0 e c_1 sono opportune costanti, e per convenienza poniamo $c_0 = c_1 = 1$. L'equazione di Burgers ha la proprietà notevole di essere completamente risolubile mediante un cambio di variabili. Inoltre essa ammette infinite simmetrie e quindi è integrabile alla stessa stregua dell'equazione di Riemann-Hopf. L'analisi della soluzione così costruita mediante l'equazione di Burgers mostra che al di sotto della temperatura critica, nel limite in cui il parametro di scala ν tende a zero, si produce un salto - *shock* - che automaticamente obbedisce alla regola di Maxwell, mentre al di sopra della temperatura critica la soluzione riproduce l'equazione di van der Waals.

Schematicamente

$$\begin{aligned} T > T_c : \lim_{\nu \rightarrow 0} V_\nu(P, T) &\longrightarrow \text{van der Waals} \\ T < T_c : \lim_{\nu \rightarrow 0} V_\nu(P, T) &\longrightarrow \text{Salto (shock)} \\ &\longrightarrow \text{Regola di Maxwell.} \end{aligned}$$

Si può inoltre mostrare, che esattamente alla temperatura critica, $T = T_c$, la forma della funzione di stato è *universale*, ovvero comune all'intera classe di modelli integrabili per cui la funzione entropia è della forma (14) e può essere espressa in modo semplice come segue

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial \log \Gamma}{\partial x}(x, t). \quad (17)$$

Nell'equazione di sopra $\Gamma(x, t)$ prende il nome di integrale o funzione di Pearcey, la cui rappresentazione integrale riportiamo per convenienza del lettore matematicamente più navigato

$$\Gamma(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{8}(z^4 - 2tz^2 + 4xz)} dz.$$

Vale la pena ricordare che la relazione (17) tra $u(x, t)$ e $\Gamma(x, t)$ prende il nome di trasformazione di Cole-Hopf e la funzione di Pearcey è una soluzione particolare dell'equazione del calore

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}.$$

Per coloro che avessero una qualche familiarità con le definizioni della meccanica statistica, vale la pena notare che la funzione $\Gamma(x, t)$ può essere interpretata come la funzione di partizione del gas reale visto come sistema meccanico statistico. Questo fatto è in realtà una proprietà generale e si ritrova nello studio del limite termodinamico di vari modelli di campo medio[18, 19, 20]

Una teoria idrodinamica delle transizioni di fase

Abbiamo visto come lo studio delle relazioni di Maxwell sotto opportune ipotesi per la forma dell'entropia, porta all'analisi di equazioni differenziali nonlineari di evoluzione, tipiche dell'idrodinamica. La funzione volume $V(P, T)$ può essere pensata pertanto per esempio la quota di

elevazione di un fluido che si propaga sulla sua superficie, la pressione è identificata col tempo e la temperatura con la coordinata spaziale. Questa prospettiva consente quindi di interpretare il classico diagramma di fase mostrato in Figura 6 in alto in termini idrodinamici. Le curve *critiche* indicate separano le diverse fasi del fluido e corrispondono al luogo dei punti dove la funzione di stato ha un salto, ovvero uno shock. I fronti d'onda si propagano quindi nello spazio delle variabili termodinamiche e sviluppano un punto critico, ovvero una catastrofe del gradiente, sulla frontiera dell'insieme descritto dalle traiettorie dello shock. La Figura 6 a destra

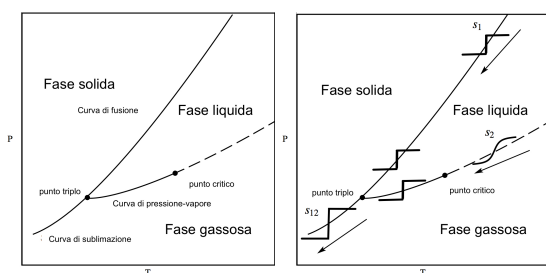


Figura 6: Diagramma di fase tipico di un fluido. Le curve continue separano regioni del piano (T, P) corrispondenti a fasi diverse. Al punto critico la funzione volume sviluppa una catastrofe del gradiente dove le sue derivate parziali divergono a infinito. Come mostrato nella figura a destra, le curve rappresentano le traiettorie degli shock del volume nello spazio delle variabili termodinamiche.

rappresenta i fronti d'onda a cavallo delle curve critiche mostrando come i due shock associati alle transizioni solido/liquido e gas/liquido si propagano con velocità diverse fino a collidere nel cosiddetto punto tricritico. Come predetto dalla teoria degli shock classici, la collisione fra due shock è anelastica. Pertanto, i due shock si fondono nella collisione producendo un unico salto descrivendo la curva di sublimazione che separa fase gassosa e fase solida.

La teoria degli shock classici, prodotta dall'analisi delle soluzioni dell'equazione di tipo Burgers nel cosiddetto limite non viscoso, $\nu \rightarrow 0$, spiega tra l'altro perchè il diagramma di fase sopra descritto si presenta nella forma di "Y" anzichè nella forma di "X"[17].

Il fatto che la termodinamica dei sistemi macroscopici possa essere descritta in termini della

teoria di equazioni nonlineari integrabili che tipicamente emergono nel contesto dell'idrodinamica rappresenta dal nostro punto di vista una proprietà importante e unificante che consente di trattare allo stesso modo una famiglia ampia di modelli, coglierne le proprietà universali e spiegarne l'origine. Sarebbe naturale a questo punto chiedersi se sia possibile derivare queste equazioni da un punto di vista più fondamentale partendo da una trattazione statistico meccanica di un modello molecolare, determinando i valori macroscopici delle osservabili fisiche in modo sistematico nel limite in cui il numero di molecole è molto grande. Tale studio è possibile ed è stato completato nel caso di modelli magnetici di campo medio e per modelli di tipo van der Waals sempre in regime di campo medio (si veda per esempio [17, 18, 19, 20]). Modelli più generali che includono sistemi compositi, vetri di spin, fluidi, superfluidi, modelli di grafi random rappresentano un campo aperto di ricerca e di grande interesse in particolare in vista delle potenziali applicazioni in diversi settori dalla Fisica all'Intelligenza Artificiale, dalla Biologia alle Scienze Economiche e Sociali. In questa sede ci siamo limitati a considerare un esempio classico di sistema termodinamico concentrandoci su una proprietà generale che abbiamo chiamato integrabilità e che si applica anche ad altri sistemi e che, parafrasando Maxwell, ci consente in virtù di essa di affermare che certi fenomeni ad esso associati, come le transizioni di fase, sono stati spiegati.



- [1] J. Levelt Sangers and A. H. M. Levelt: "Diederik Korteweg, pioneer of criticality", *Physics Today* **December** (2002) 47.
- [2] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal: "Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States", *Phys. Rev. Lett.* **15** (1965) 240.
- [3] S.P. Novikov, S. V. Manakov, L.P. Pitaevskii, and V. E. Zakharov: *Theory of Solitons (The Inverse Scattering Method)*. Consultants Bureau, New York (1984).
- [4] P.L. Kelley: "Self-focusing of optical beams", *Phys. Rev. Lett.* **15** (1965) 1005-1008.
- [5] V. I. Talanov: "Self-focusing of wave beams in nonlinear media", *Sov. Phys. JEPT Lett.* **2** (1965) 138-141.
- [6] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. V. Pitaevskii, and S. Stringari: "Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases", *Rev. Mod. Phys.* **71** (1999) 463.

- [7] A. R. Osborne: "Nonlinear Ocean Waves and the Inverse Scattering Transform", *International Geophysics Series* **97** (2010) .
- [8] G. A. El, G.A. Khamis and A. Tovbis: "Dam break problem for the focusing nonlinear Schrödinger equation and the generation of rogue waves", *Nonlinearity* **29** (2016) 2798-2836.
- [9] M. Boiti, J. Leon, L. Martina, F. Pempinelli Solitons in two dimensions, in *Integrable Systems and Applications*, M Balabane, P Lochak, C Sulem Eds., *Lecture Notes in Physics* **342**, p. 31, Springer, Berlin (1989).
- [10] M. Boiti, J. Leon, F. Pempinelli: "Multidimensional solitons and their spectral transforms", *J. Math. Phys.* **31** (1990) 2612.
- [11] M. Boiti, F. Pempinelli, A. Pogrebkov, B. Prinari: "Towards an inverse scattering theory for non-decaying potentials of the heat equation", *Inv. Probl.* **17** (2001) 937.
- [12] M. Leo R. A. Leo G. Soliani, P. Tempesta: "On the Relation between Lie Symmetries and Prolongation Structures of Nonlinear Field Equations: Non-Local Symmetries", *Progress of Theoretical Physics* **105** (2001) 77-97.
- [13] V. Zakharov (Ed.): *What is integrability*. Springer Series in Nonlinear Dynamics, Berlin (1991).
- [14] F. Calogero, Why are certain nonlinear PDEs both widely applicable and integrable, in V. Zakharov (Ed.), *What is integrability*, Springer Series in Nonlinear Dynamics, Berlin, (1991).
- [15] B.G. Konopelchenko: *Introduction to Multidimensional Integrable Equations: The Inverse Spectral Transform in 2+1 Dimensions*. Plenum Monographs in Nonlinear Physics, New York (1992).
- [16] L. D. Landau, E. M. Lifshitz: *Statistical Physics: Volume 5 (Course of Theoretical Physics)*. Third Edition, Elsevier, Amsterdam (1980).
- [17] A. Moro: "Shock dynamics of phase diagrams", *Annals of Physics* **343** (2014) 49-60.
- [18] A. Barra and A. Moro: "Exact solution of the van der Waals model in the critical region", *Annals of Physics* **2015** (359:290-299)
- [19] A. Barra, A. Di Lorenzo, F. Guerra and A. Moro: "On quantum and relativistic mechanical analogues in mean field spin models", *Proc. R. Soc. A* **470** (2014) 20140589(13pp).
- [20] F. Giglio, G. Landolfi and A. Moro: "Integrable extended van der Waals model", *Physica D* **333** (2016) 293-300.

stessa università, lavora, prima di approdare a Newcastle, come ricercatore Post-Doc presso il Dipartimento di Matematica della University of Loughborough (UK), il settore di Fisica Matematica della SISSA - Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati di Trieste e presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni dell'Università di Milano-Bicocca. I suoi interessi di ricerca includono problemi di classificazione nella teoria delle equazioni alle derivate parziali nonlineari, singolarità e catastrofi nelle soluzioni di equazioni di tipo idrodinamico e applicazioni in ottica nonlineare, fisica statistica e teoria delle reti neurali.

Antonio Moro: è Senior Lecturer in Matematica alla Northumbria University Newcastle. Laureato in Fisica all'Università di Lecce nel 2000 e dottorato nel 2004 in Fisica Teorica presso la

Superintegrabilità

Daniilo Riglioni

Liceo Scientifico Statale Aristotele, via dei Sommozzatori 50, 00143, Roma

Le simmetrie sono un ingrediente fondamentale per arrivare alla formulazione di leggi fisiche ed è possibile metterle in corrispondenza con quantità che si conservano e per tale ragione emergono nei sistemi più stabili e lontani dal caos. Tutti i sistemi che possono essere risolti per via analitica si dicono integrabili, tuttavia tra questi sistemi è possibile classificarne alcuni che hanno un numero di simmetrie massimale. Benché rari questi sistemi giocano un ruolo fondamentale dalla meccanica celeste alla fisica atomica.

Introduzione

Lo studio della fisica è per certi versi lo studio del concetto di simmetria applicato ai fenomeni naturali, come affermato ad esempio dal premio Nobel P.W. Anderson [1] il quale, grazie a considerazioni sulla simmetria e la sua rottura, ha contribuito in modo decisivo a molte delle maggiori scoperte scientifiche contemporanee, come il bosone di Higgs o la superconduttività. Potremmo dire, senza esagerare troppo, che la simmetria è l'essenza di ogni disciplina scientifica e la ragione va ricercata direttamente nelle capacità predittive e di sintesi proprie della scienza tout court. Il lavoro dello scienziato naturale risiede proprio nell'osservare le regolarità che si presentano in natura e nel descrivere tali regolarità sotto forma di leggi scientifiche. Si pensi ad esempio alle regolarità nel moto dei corpi celesti, che per prime hanno colpito l'interesse degli uomini, alla rego-

larità con cui si presenta un certo carattere in una data specie e in diverse generazioni della stessa, o alla regolarità nelle proprietà chimiche degli elementi, che ha portato alla formulazione della tavola periodica. Il passo successivo è quindi quello di formalizzare queste regolarità usando il linguaggio della matematica. Tra gli esempi citati, il movimento di alcuni oggetti celesti risulta invariato per determinate traslazioni temporali: la posizione della Terra rispetto al Sole risulta pressoché invariata per una traslazione temporale di circa 365,25 giorni. Mentre, ad esempio, l'uomo presenta bilateria ossia è possibile dividere il suo corpo lungo un piano sagittale in due metà pressoché identiche. Se invertiamo destra e sinistra, ad esempio specchiandoci, otteniamo un'immagine pressoché invariata di noi stessi. Possiamo finalmente arrivare al concetto di simmetria come una sorta di ossimoro, ossia quella trasformazione matematica che lascia invariato un oggetto, dove per oggetto possiamo intendere sia una figura geometrica, sia un'equazione matematica. Ecco spiegata la capacità di sintesi della scienza (la parte destra può essere descritta per mezzo di quella sinistra, soltanto una parte descrive il tutto), ma anche la sua capacità predittiva (le posizioni future possono essere descritte come traslazione temporale delle posizioni passate). Citando E. Mach [2], ciò rende la scienza "un affare": Essa si propone con il minimo sforzo di appropriarsi della massima quantità possibile dell'infinita, eterna verità. Forti di questo punto di vista, cominciamo a capitalizzare al meglio la conoscenza che abbiamo sul particolare per giungere a quella universale. Le equazioni del moto di Newton, che possono essere sperimen-

tate e verificate sulla Terra, risultano invarianti per le trasformazioni di Galileo, in linea con la nostra percezione di uno spazio omogeneo e isotropo e di un tempo omogeneo non connesso allo spazio. Diviene quindi possibile ipotizzare che la fisica che vale sulla terra sia valida anche per i corpi celesti, portando Newton a spiegare le tre leggi empiriche di Keplero come naturale conseguenza delle sue leggi "universali", valide cioè sia in cielo sia in Terra. Giunti a questo punto potremmo esser tentati dalla presunzione di sbarazzarci nuovamente della ricerca di altre simmetrie, affermando che le equazioni di Newton sono sufficienti a descrivere tutti i fenomeni naturali che si pongono davanti ai nostri occhi e in tutto l'universo, a patto di conoscere le forze agenti tra tutte le particelle che compongono il sistema. Questo era in generale il punto di vista dei deterministi come Laplace di cui vale la pena leggere un estratto [3]: Noi dobbiamo riguardare il presente stato dell'universo come l'effetto del suo stato precedente e come la causa di quello che seguirà. Ammesso per un istante che una mente possa tener conto di tutte le forze che animano la natura, assieme alla rispettiva situazione degli esseri che la compongono, se tale mente fosse sufficientemente vasta da poter sottoporre questi dati ad analisi, essa abbraccerebbe nella stessa formula i moti dei corpi più grandi dell'universo assieme a quelli degli atomi più leggeri. Per essa niente sarebbe incerto ed il futuro, così come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi. A parte la difficoltà di conoscere con arbitraria precisione il presente (non più tardi di un secolo dopo il principio di Heisenberg renderà fisicamente impossibile questa eventualità), resta la difficoltà di risolvere matematicamente il problema. A tal proposito, nel XIX secolo Liouville trovò un algoritmo per risolvere un sistema governato dalle equazioni di Newton (più in generale un sistema Hamiltoniano) dipendente da N coordinate (gradi di libertà), a patto di conoscere almeno N quantità conservate in involuzione (vedremo più tardi il suo significato): in questo caso il sistema è detto integrabile [5]. Per lungo tempo il caso generale, ossia in assenza di N quantità conservate, rimase un problema aperto. Tra i problemi non risolubili con la tecnica di Liouville troviamo il problema dei tre corpi, che assorbì gli sforzi della comunità scientifica per quasi tutto il XIX

secolo. Il problema dei tre corpi consiste nel risolvere le equazioni di Newton e di conseguenza le traiettorie di tre corpi che interagiscono tra loro, come ad esempio il sistema Sole-Terra-Luna. Nel 1889 il Re di Svezia fu addirittura indotto a bandire un ingente premio in denaro per chi vi si fosse applicato con successo. Tale premio fu riscosso da Poincaré, che provò come in generale non fosse possibile arrivare a una soluzione stabile. Lo scienziato francese mostrò in sostanza che esistono sistemi per i quali, scegliendo condizioni iniziali appena differenti, si possono ottenere traiettorie che possono divergere anche molto velocemente determinando appunto un'instabilità. Tutto ciò impedisce di dire qualcosa di definitivo



Figura 1: *Henry Poincaré (1854 (Nancy) - 1912 (Paris))*

sulla posizione dei corpi con il passare del tempo, in altre parole abbiamo di fronte a noi quello che più tardi verrà definito moto caotico [4]. Questo mostra come non possiamo fare a meno delle simmetrie, non solo per risolvere agevolmente un problema di meccanica, ma anche solo per poter fare delle predizioni certe sull'evoluzione di un sistema. Infatti la ricetta fornita da Liouville ha bisogno di un numero di quantità conservate che cresce con i gradi di libertà del sistema, e ogni quantità conservata è legata all'esistenza di una certa simmetria, come affermato da Emmy Noether nel celebre teorema che porta il suo nome. Non a caso i principi di conservazione della quantità di moto, dell'energia e del momento

angolare possono essere elegantemente ottenuti rispettivamente a partire dalle proprietà di omogeneità dello spazio, del tempo e dall'isotropia dello spazio. Da questo punto di vista è come se



Figura 2: Emmy Noether (1882 (Erlangen) - 1935 (Bryn Mawr))

la presenza di simmetria faccia la differenza, in prima approssimazione, tra ciò che può essere studiato e ciò che è destinato a rimanere rumore bianco. È naturale allora che sia maturato nel tempo un interesse scientifico nei confronti della simmetria in se stessa, si pensi alla nascita della teoria dei gruppi, e che in seguito sia nato un interesse a ricercare la classificazione più ampia di modelli matematici caratterizzati da un numero congruo di simmetrie, una buona review sullo stato dell'arte si può trovare in [6]. Diamo allora uno sguardo da vicino agli esempi più importanti, iniziando con un'introduzione essenziale del formalismo Hamiltoniano, necessario alla trattazione dell'argomento.

Formalismo Hamiltoniano

Le equazioni di Newton per un sistema conservativo

$$m_i \ddot{q}_i = -\partial_i V(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N) \quad (1)$$

possono essere riformulate per mezzo delle variabili canoniche q_i, p_i con $i = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad (2)$$

La funzione Hamiltoniana H si definisce invece come somma delle energie cinetica e potenziale

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_i^N \frac{p_i^2}{2m_i} + V(\mathbf{q})$$

Inoltre, introduciamo l'operazione binaria chiamata parentesi di Poisson

$$\{f, g\} = \sum_i^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (3)$$

dove $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ e $g(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ sono ancora funzioni delle $2N$ variabili $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)$ e $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)$. In particolare, per le variabili canoniche, si osserva che

$$\begin{cases} \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \\ \{q_i, p_k\} = \delta_{i,k}, \\ \text{con } \delta_{i,k} = 0 \quad i \neq k; \quad \delta_{i,i} = 1 \quad \forall i. \end{cases} \quad (4)$$

È facile verificare che la derivata fatta rispetto al tempo di una funzione $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, dove (\mathbf{p}, \mathbf{q}) evolvono secondo le equazioni di Newton, può essere definita per mezzo della parentesi di Poisson

$$\dot{f} = \{f, H\}. \quad (5)$$

Diremo quindi che una funzione $I(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ è una quantità conservata per l'Hamiltoniana H se - Poisson commuta con $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$

$$\{I, H\} = 0. \quad (6)$$

Un insieme di N quantità conservate I_1, \dots, I_N si dicono in involuzione se

$$\{I_i, I_j\} = 0, \quad \forall i, j. \quad (7)$$

Se il sistema ha N gradi di libertà diremo che il sistema è integrabile secondo Liouville.

L'integrabilità nel problema dei due corpi

Due corpi di massa m_1 e m_2 costituiscono un sistema con 6 gradi di libertà poiché la loro posizione può essere individuata per mezzo delle sei coordinate $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ a cui dobbiamo aggiungere le loro rispettive variabili coniugate

$$\mathbf{p}_1 = (px_1, py_1, pz_1) \text{ e } \mathbf{p}_2 = (px_2, py_2, pz_2).$$

In generale, la funzione di Hamilton avrà quindi la seguente forma

$$H = \frac{1}{2m_1} |\mathbf{p}_1|^2 + \frac{1}{2m_2} |\mathbf{p}_2|^2 + V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) . \quad (8)$$

Il principio di conservazione della quantità di moto ci restituisce immediatamente 3 quantità conservate il cui ruolo emerge chiaramente non appena riscriviamo la funzione di Hamilton usando come nuove variabili quelle che individuano il centro di massa e la posizione reciproca tra i due corpi

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \end{cases} \quad (9)$$

Le nuove variabili impulso che conservano le parentesi di Poisson risultano essere

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p} = \frac{m_2 \mathbf{p}_1 - m_1 \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{p}_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{P} + \mathbf{p} \\ \mathbf{p}_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{P} - \mathbf{p} \end{cases} \quad (10)$$

Nelle nuove variabili la Hamiltoniana si legge come

$$H = \frac{1}{2M} |\mathbf{P}|^2 + \frac{1}{2m} |\mathbf{p}|^2 + V(|\mathbf{r}|), \quad (11)$$

dove $M = m_1 + m_2$ è la massa totale e $m = (m_1 m_2) / (m_1 + m_2)$ è quella definita come massa ridotta. Nel caso in cui $m_1 \ll m_2$ è facile verificare che

$$\lim_{m_2 \rightarrow \infty} m = m_1.$$

Ad esempio nel caso del sistema Terra-Sole la massa ridotta tende al valore della massa della Terra, concordemente con la visione che la Terra ruota intorno al Sole apparentemente immobile (in realtà vediamo quindi che sarebbe più corretto dire che entrambi ruotano intorno al centro di massa, che per ovvie ragioni tende a coincidere con il corpo più massivo). Notiamo subito che la funzione H nelle nuove variabili non dipende dalle variabili \mathbf{R} e questo ci porta a verificare facilmente che

$$\{H, \mathbf{P}\} = 0, \quad (12)$$

come era lecito aspettarsi fin da principio. Perciò scrivere la funzione H in variabili canoniche in cui i momenti coniugati p si conservano significa adottare un sistema di coordinate che sfrutta una certa simmetria. Nel caso specifico osserviamo che il sistema non è sensibile ad uno spostamento del centro di massa in altri punti dell'universo. Inoltre il sistema nelle nuove variabili diviene matematicamente equivalente a due sistemi separati non interagenti: infatti l'evoluzione del valore delle variabili (\mathbf{r}, \mathbf{p}) non dipende da (\mathbf{R}, \mathbf{P}) avendo

$$H = H_1 + H_2, \quad (13)$$

$$H_1 = \frac{1}{2M} |\mathbf{P}|^2, \quad H_2 = \frac{1}{2m} |\mathbf{p}|^2 + V(|\mathbf{r}|).$$

Allo stesso modo, essendo il potenziale V dipendente solo dal modulo di \mathbf{r} , è conveniente introdurre un nuovo sistema di variabili. Una delle variabili sarà appunto il raggio $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Precisamente avremo il cambiamento di variabili

$$x = r \sin \theta \cos \phi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi,$$

$$z = r \cos \theta,$$

$$p_x = \sin \theta \cos \phi p_r + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi p_\theta - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} p_\phi,$$

$$p_y = \sin \theta \sin \phi p_r + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi p_\theta + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} p_\phi,$$

$$p_z = \cos \theta p_r - \frac{1}{r} \sin \theta p_\theta,$$

Questa nuova trasformazione (canonica) ci permette di ottenere la Hamiltoniana H_2 nella seguente forma

$$H_2 = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r) \quad (14)$$

o, equivalentemente, nella forma

$$H_2 = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{H_\theta}{r^2} \right) + V(r) \quad (15)$$

$$H_\theta = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta},$$

dove si sono introdotti

$$p_\phi = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z \equiv \mathbf{L}_z; \quad H_\theta = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}|^2 \equiv |\mathbf{L}|^2, \quad (16)$$

ossia la terza componente del momento angolare $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ e il modulo quadro dello stesso. Dall'indipendenza da ϕ della funzione di Hamilton possiamo dedurre immediatamente la conservazione della quantità p_ϕ . Lo stesso si può dire anche della quantità H_2 che, come una nuova Hamiltoniana definita su uno spazio ridotto θ, ϕ , risulta conservata $\{H_\theta, H\} = 0$. Inoltre, a causa dell'invarianza di H_θ , l'Hamiltoniana H_2 risulta matematicamente equivalente ad un sistema con un solo grado di libertà, rendendo così evidente il ruolo giocato dalle simmetrie nel ridurre i sistemi integrabili a più gradi di libertà in sistemi più semplici.

Dall'integrabilità alla superintegrabilità e le sue applicazioni

La funzione di Hamilton H_2 ha 3 gradi di libertà ed è definita in uno spazio (detto delle fasi) a 6 dimensioni, dato dalle tre coordinate \mathbf{r} e dai tre impulsi \mathbf{p} . Usando coordinate polari per lo spazio delle configurazioni, nello spazio delle fasi si hanno le coordinate $(r; \theta; \phi; p_r; p_\theta; p_\phi)$. Questo significa che lo stato del sistema è univocamente determinato al tempo t_0 da un punto nello spazio delle fasi, che evolverà verso un nuovo punto dello spazio delle fasi al tempo $t_0 + dt$, dove dt è un intervallo di tempo infinitesimo. Tuttavia non tutti i punti dello spazio delle fasi sono accessibili dal sistema, vista la presenza delle quantità conservate che giocano di fatto il ruolo di vincolo. Come detto precedentemente il sistema H_2 possiede 3 quantità conservate in involuzione: (H_2, H_θ, p_ϕ) a cui possiamo aggiungere una quarta quantità conservata funzionalmente indipendente da quelle già elencate ad esempio la componente x del vettore momento angolare $L_x = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_x$. Quando il numero delle quantità conservate è superiore al numero dei gradi di libertà il sistema si dice **superintegrabile**. Queste quattro quantità dipendendo da \mathbf{r}, \mathbf{p} e definiscono di fatto un sistema di 4 equazioni in 6

incognite:

$$\begin{cases} H_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = C_1 \\ H_\theta(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = C_2 \\ p_\phi(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = C_3 \\ L_x(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = C_4 \end{cases} \quad (17)$$

Ciò significa che lo spazio delle fasi accessibile, una volta considerati i vincoli derivanti dalle quantità conservate, si riduce ad uno spazio bidimensionale. Infatti non è difficile mostrare che per potenziali centrali il moto è planare. Se consideriamo le traiettorie dei pianeti del sistema solare notiamo però che, oltre ad essere planari, sono anche chiuse ossia lo spazio delle fasi accessibile al sistema risulta essere monodimensionale. Questa è una chiara indicazione dell'esistenza di un'ulteriore quantità conservata. La quantità in questione si chiama vettore di Laplace-Runge-Lenz (LRL). Considerando come potenziale $V(r) = -k/r$, si mostra che la quantità vettoriale

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (18)$$

è conservata, cioè si ha

$$\{H_2, \mathbf{A}\} = 0. \quad (19)$$

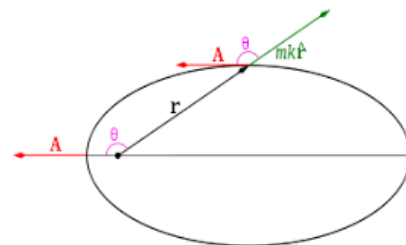


Figura 3: Il vettore di LRL

Il lettore potrebbe pensare a questo punto di avere a che fare con una sovrabbondanza di quantità conservate: tre componenti dal vettore di LRL le tre componenti del momento angolare \mathbf{L} e l'energia. Ma ciò, in base a quanto detto poc'anzi, definirebbe un sistema di equazioni sovradeterminato. In effetti si può vedere che queste quantità non sono indipendenti, poiché sussistono le relazioni $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$ e $|\mathbf{A}|^2 = m^2 k^2 + 2m|\mathbf{L}|^2 H_2$, che riportano il numero di costanti del moto a cinque. Quando il sistema ammette un numero di

costanti del moto indipendenti pari a $2N-1$, con N gradi di libertà, il sistema si definisce **massimamente superintegrabile**. È naturale chiedersi ora se i sistemi massimamente superintegrabili costituiscano una famiglia rara o meno. A questa domanda ha dato una risposta J. Bertrand [7] per quanto riguarda i sistemi con simmetria radiale. Bertrand considera una traiettoria circolare mettendosi sul minimo di un potenziale generico $V(r)$ che ammette stati legati. Perturbando tale orbita circolare si ottengono delle condizioni che la funzione $V(r)$ deve soddisfare affinché la perturbazione non rompa la condizione di traiettoria chiusa. Sorprendentemente si rese conto che esistono solo due potenziali massimamente superintegrabili e questi sono il potenziale di Keplero ed il potenziale di oscillatore armonico. Non sorprende tanto che in questa famiglia sia presente il potenziale armonico che emerge naturalmente nello studio delle perturbazioni e quindi da sistemi lineari, quanto la peculiarità del potenziale $1/r$. Questo significa che è come se la Natura avesse scelto un potenziale eccezionalmente simmetrico per due interazioni fondamentali come le interazioni gravitazionali ed elettromagnetiche. La cosa diviene ancora più suggestiva se pensiamo che il potenziale $1/r$ è conseguenza diretta della legge di Gauss. In uno spazio N -dimensionale il flusso costante del campo elettrico di una sorgente puntiforme si calcola su una ipersuperficie che scala come r^{N-1} . Questo genera una forza proporzionale al suo inverso $1/r^{N-1}$ il cui potenziale è proporzionale a $1/r^{N-2}$. Perciò solo in tre dimensioni l'interazione Coulombiana dà luogo alla massima superintegrabilità, davvero una coincidenza fortunata per chi ama le simmetrie.

Prima di concludere questa serie di riflessioni sul ruolo delle simmetrie nella fisica classica è necessario spendere qualche parola su come le simmetrie siano sopravvissute al cambio di paradigma scientifico conseguente all'introduzione della Meccanica Quantistica. Abbiamo visto come le simmetrie che descrivono il mondo fisico all'interno di una data teoria sono un aspetto letteralmente fondamentale che possono assumere il ruolo di postulato. Si pensi ad esempio ai postulati della teoria della relatività riguardo all'equivalenza tra diversi sistemi di riferimento inerziali, condiviso con la fisica Newtoniana. Al-

lo stesso modo la Meccanica Quantistica non fa venir meno il concetto di omogeneità ed isotropia dello spazio, ma rivede il concetto di osservabile fisica. Volendo trovare un'analogia con la geometria è come far venir meno il V postulato di Euclide senza invalidare i primi quattro, quello che si ottiene è una nuova geometria detta non Euclidea. Le conseguenze di queste riflessioni si possono ritrovare nei lavori di Pauli [8] che fu capace, usando il vettore di LRL, di ottenere lo spettro di emissione dell'atomo di idrogeno senza risolvere esplicitamente l'equazione di Schrödinger analogamente a quanto visto in meccanica classica dove possiamo fare a meno di risolvere le equazioni del moto per ottenere la traiettoria. Più tardi lo stesso Schrödinger mostrò che in effetti, nel caso dell'atomo di idrogeno, gli autovalori possono essere trovati molto elegantemente sfruttando il metodo della fattorizzazione [9], che non a caso può essere applicato con successo anche nel caso di oscillatore armonico quantistico, e che permette di ottenere lo spettro senza dover passare esplicitamente per il calcolo di un'equazione differenziale. Questa caratteristica si pensa in effetti essere comune a tutti i sistemi quantistici massimamente superintegrabili [10].



- [1] P.W. Anderson: "More is Different", *Science New Series* **177** (1972) 393-396.
- [2] E. Mach: *Populär-wissenschaftliche Vorlesungen*. Johann Ambrosius Barth, Lipsia (1896). trad. it. *Lecture Scientifiche Popolari*, Bocca, Torino (1900).
- [3] P. S. Laplace: *Essai philosophique sur les probabilités*. Bachelier, Parigi (1840).
- [4] L. Bonolis: "Il moto dei pianeti: ordine o caos? Il problema dei tre corpi, una sfida per la meccanica celeste", *La fisica nella scuola* **21** (2010) 12-36.
- [5] V. I. Arnold: *Metodi Matematici Della Meccanica Classica*. Editori Riuniti IV edizione, Roma (2004).
- [6] W. Miller, S. Post, P. Winternitz: "Classical and quantum Superintegrability with Applications", *J. Phys. A: Mathematical and Theoretical* **46** (2013) N42.
- [7] J. Bertrand, *C.R. Acad. Sci.*, **77**, Parigi (1873).
- [8] W. Pauli: "Über das Wasserstoffspektrum vom standpunkt der neuen Quantenmechanik", *Z. Phys.* **36** (1926) 336-363.
- [9] E. Schrödinger: "A method of determining quantum mechanical eigenvalues and eigenfunctions", *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A* **46** (1940) 916.

Further studies on solving eigenvalue problems by factorization *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A* **46** (1941) 183206.

- [10] P. Tempesta, A. Turbiner, P. Winternitz: "Exact solvability of superintegrable systems *J. Math. Phys.*", **42** 2001 (4248)



Danilo Riglioni, PhD: Nato a Roma nel 1983, si è laureato in Fisica nel 2008 presso l'Università degli Studi Roma Tre, con una tesi dal titolo Sistemi superintegrabili su spazi curvi. Conseguito nella stessa Università il titolo di dottore di ricerca in Fisica con la tesi Quantum Bertrand Systems ha trascorso un triennio come post-doc presso il Centre de Recherches Mathématiques, dell'Université di Montréal, Montréal (QC) Canada. Attualmente è professore di ruolo di Matematica e Fisica nelle scuole secondarie di secondo grado e collabora con Roma Tre nell'organizzazione di corsi di aggiornamento in fisica moderna per gli insegnanti della scuola secondaria di secondo grado. e-mail:danilo.riglioni@istruzione.it

Statistica, entropia e temperatura

Giampaolo Co'

Dipartimento di Matematica e Fisica "E. De Giorgi", Università di Lecce,
Istituto di Fisica Nazionale di Fisica Nucleare, sezione di Lecce.

Nei testi, e nei corsi, di Fisica Generale in cui è presentata la termodinamica, il legame tra entropia e configurazioni microscopiche del sistema è raramente discusso. In questo articolo, utilizzando un sistema modello nel quale ogni particella può acquisire solo due valori di energia, mostro come la configurazione di equilibrio sia quella enormemente più probabile tra tutte le possibili configurazioni che il sistema può esplorare. Descrivo poi l'equilibrio termodinamico tra due di questi sistemi modello, e definisco l'entropia e la temperatura in termini della configurazione di equilibrio. Queste definizioni statistiche di entropia e temperatura sono legate a quelle normalmente considerate in termodinamica da un termine costante: la costante di Boltzmann. I quattro principi della termodinamica sono conseguenze immediate delle definizioni statistiche dell'entropia e della temperatura.

Il sistema modello

Il sistema che considererò è costituito da un grande numero di particelle, confrontabile con quello

di Avogadro. Ognuna di queste particelle può acquisire solo due valori di energia. Per semplicità di discussione indicherò con frecce all'insù o all'ingiù i due stati energetici di ogni particella

↑ con energia $+m$
↓ con energia $-m$

Ad esempio, una particella di questo tipo potrebbe essere un magnete microscopico quantizzato, che ha la possibilità di essere allineato o anti-allineato ad un campo magnetico esterno. Le due posizioni del magnete corrispondono a due diversi valori dell'energia. Per semplicità chiamerò *spin* sù e giù le due posizioni del magnete.

Chiamo N il numero di particelle (magneti) che compongono il sistema, e per semplicità nella discussione faccio l'ipotesi che N sia pari.

Se le disposizioni dello spin delle varie particelle sono selezionate in modo casuale, il loro numero è dato da

$$(\uparrow_1 + \downarrow_1)(\uparrow_2 + \downarrow_2)(\uparrow_3 + \downarrow_3) \cdots (\uparrow_N + \downarrow_N)$$

e quindi è 2^N . Chiamo *configurazione* una specifica sequenza in cui la direzione dello spin di ogni particella è specificato. Ipotizzo che ogni configurazione sia equiprobabile, quindi la probabilità di trovare una particolare configurazione

è $1/(2^N)$.

L'energia totale del sistema è legata solo alla differenza tra il numero delle particelle con spin all'insù, e quelle con spin all'ingiù, non alla specifica configurazione considerata. In altre parole, l'energia è indipendente da quali siano le particelle con spin all'insù e all'ingiù, ma solo dalla loro differenza.

Per convenienza, definisco, il valore zero dell'energia quello dello stato in cui metà delle particelle ha spin all'insù, e l'altra metà ha spin all'ingiù. Chiamo s il numero di particelle con spin all'insù che eccede $N/2$. Il numero delle particelle con energia $+m$ è

$$N_{\uparrow} \equiv \frac{1}{2}N + s ,$$

e quelle con spin $-m$ è

$$N_{\downarrow} \equiv \frac{1}{2}N - s .$$

Definisco l'eccesso di spin come

$$N_{\uparrow} - N_{\downarrow} = 2s ,$$

unica quantità statistica da cui dipende l'energia del sistema, che, data la scelta dello zero è $E = 2sm$.

Nel caso di 3 particelle, le configurazioni accessibili distinte da energie diverse sono

$$(\uparrow + \downarrow)^3 = \uparrow\uparrow\uparrow + 3\uparrow\uparrow\downarrow + 3\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\downarrow\downarrow ,$$

dove ogni termine della somma precedente ha energia diversa rispetto agli altri. C'è uno stato con energia $3m$, ci sono tre stati con energia m , tre stati con energia $-m$, e uno stato con energia $-3m$.

In generale, per un numero di N particelle le configurazioni possibili sono espresse dallo sviluppo binomiale

$$\begin{aligned} (\uparrow + \downarrow)^N &= \uparrow^N + N\uparrow^{N-1}\downarrow \\ &+ \frac{1}{2}N(N-1)\uparrow^{N-2}\downarrow^2 + \dots \\ &= \sum_{t=0}^N \frac{N!}{(N-t)!t!} \uparrow^{N-t}\downarrow^t . \end{aligned}$$

Cambiando gli estremi della somma posso

riscrivere l'espressione precedente come

$$(\uparrow + \downarrow)^N = \sum_{s=-1/2N}^{1/2N} \frac{N!}{(\frac{1}{2}N + s)!(\frac{1}{2}N - s)!} \uparrow^{\frac{1}{2}N+s} \downarrow^{\frac{1}{2}N-s} .$$

Il coefficiente di questa somma è il numero di stati in cui il numero di particelle con spin all'insù è N_{\uparrow} e quelle con spin all'ingiù è N_{\downarrow} . Ognuno di questi stati ha la stessa energia.

Definisco la *funzione molteplicità* come

$$\begin{aligned} w(N, s) &\equiv \frac{N!}{(\frac{1}{2}N + s)!(\frac{1}{2}N - s)!} \\ &= \frac{N!}{(N_{\uparrow})!(N_{\downarrow})!} , \end{aligned} \quad (1)$$

la cui normalizzazione è, ovviamente,

$$\sum_{s=-1/2N}^{1/2N} w(N, s) = 2^N . \quad (2)$$

Dal punto di vista numerico, il calcolo $N!$ per grandi valori di N è problematico. Per questo motivo è prassi comune usare l'approssimazione di Stirling. Nell'appendice mostro come, utilizzando questa approssimazione, si ottiene la seguente espressione della funzione di molteplicità

$$w(N, s) \simeq w(N, 0) \exp(-2s^2/N) , \quad (3)$$

con

$$w(N, 0) = \frac{N!}{(\frac{1}{2}N)!(\frac{1}{2}N)!} \simeq \left(\frac{2}{\pi N}\right)^{\frac{1}{2}} 2^N . \quad (4)$$

Nella Tabella 1 presento il confronto tra i valori di $w(N, 0)$ calcolati esattamente e con l'approssimazione (4) per vari valori di N fino a 100. L'ultima colonna è il rapporto

$$\Delta = \frac{|\text{esatto} - \text{approssimato}|}{\text{esatto} + \text{approssimato}} .$$

Si nota che l'accuratezza dell'approssimazione migliora aumentando il valore di N , qui limitato a 100 per il limite dell'accuratezza numerica nel calcolo di $N!$ in doppia precisione. I tempi di calcolo con i moderni computer da tavolo sono dell'ordine del secondo. Bisogna considerare che

i valori di N che formano i sistemi che vogliamo descrivere sono dell'ordine di 10^{22} , 10^{23} .

N	esatto	approssimato	Δ
10	2.5200E+02	2.5837E+02	1.2479E-02
20	1.8476E+05	1.8708E+05	6.2473E-03
30	1.5512E+08	1.5642E+08	4.1659E-03
40	1.3785E+11	1.3871E+11	3.1247E-03
50	1.2641E+14	1.2704E+14	2.4998E-03
60	1.1826E+17	1.1876E+17	2.0832E-03
70	1.1219E+20	1.1259E+20	1.7856E-03
80	1.0751E+23	1.0784E+23	1.5625E-03
90	1.0383E+26	1.0412E+26	1.3889E-03
100	1.0089E+29	1.0114E+29	1.2500E-03

Tabella 1: Confronto numerico dell'approssimazione (4).

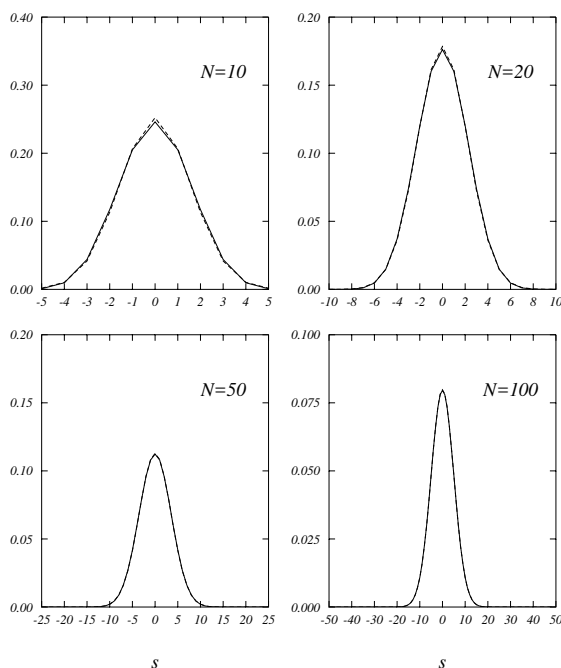


Figura 1: Distribuzioni $w(N, s)$ ottenute con l'equazione (3) per diversi valori di N . Le righe continue mostrano il risultato ottenuto usando l'espressione esatta di $w(N, 0)$, mentre le linee tratteggiate l'espressione approssimata. Tutte le curve sono normalizzate ad 1.

Nella Figura 1 mostro l'andamento della funzione $w(N, s)$, Eq. (3), in funzione di s per quattro diversi valori di N . In questa figura confronto anche i risultati ottenuti usando l'espresso-

ne esatta di $w(N, 0)$, linee continue, con quella approssimata, linee tratteggiate.

Si vede come l'approssimazione diventi sempre più valida con l'aumentare del valore di N . Per grandi valori di N diventa numericamente accettabile sostituire la somma dell'equazione (2) con un integrale, e poiché

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-x^2) = \pi^{1/2},$$

l'espressione è normalizzata a 2^N . Per poter confrontare i risultati ottenuti con diversi valori di N , tutte le curve mostrate in Figura 1 sono state divise per 2^N , quindi sono tutte normalizzate all'unità.

Per questioni estetiche non ho mostrato tutto l'intervallo dei valori possibili di s , intervallo che si estende da $-N$ a N . Mi interessa far notare come l'ampiezza della curva, che è una gaussiana, si riduca aumentando il valore di N . Il valore di w si riduce di un fattore $1/e$ quando

$$s^2 = \frac{1}{2}N \iff \frac{s}{N} = \left(\frac{1}{2N}\right)^{1/2}$$

La quantità $(1/(2N))^{1/2}$ indica quanto sia stretta la gaussiana. L'ampiezza della distribuzione diminuisce aumentando il numero di particelle. Per $N = 10^{22}$ si ha un valore di circa 10^{-11} .

Contatto termico

Utilizzerò il modello presentato precedentemente per costruire due sistemi che messi in contatto termico raggiungono l'equilibrio termodinamico.

Le ipotesi che userò per la descrizione di questo processo sono le seguenti.

- Definisco **chiuso** un sistema con energia costante, definito, e costante, numero di particelle e volume costante. Tutti i valori dei parametri esterni che potrebbero modificare il sistema, ad esempio la pressione esercitata da un pistone, sono costanti.
- Uno stato, che corrisponde a quella che ho chiamato configurazione, è accessibile se le sue proprietà sono compatibili con le specifiche fisiche del sistema. Questa ipotesi vuol

dire che le tradizionali leggi di conservazione delle quantità fisiche, ad esempio l'energia, il momento angolare e, nel nostro caso, anche il numero di particelle, sono rispettate da tutti gli stati accessibili dal sistema.

- Un sistema chiuso ha uguale probabilità di trovarsi in uno qualunque dei possibili stati accessibili. In altre parole, tutti gli stati accessibili sono ugualmente probabili.
- La dinamica interna del sistema è tale che lo stato, accessibile, in cui si trova il sistema cambi in continuazione.
- Dato un tempo sufficiente, il sistema esplorerà tutti gli stati accessibili occupando la stessa quantità di tempo in ognuno di loro.

Considero due sistemi chiusi \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 ognuno caratterizzato dal numero delle particelle che lo compone, N_1 e N_2 rispettivamente, e dall'energia U_1 e U_2 . Tradizionalmente, in termodinamica U è il simbolo che identifica l'energia del sistema. I due sistemi vengono messi in contatto termico, cioè in modo che energia e particelle possano fluire da un sistema all'altro, e formano un nuovo sistema chiuso $\mathcal{A}(N, U)$, con $N = N_1 + N_2$ e $U = U_1 + U_2$.

Faccio l'ipotesi che i sistemi \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 siano i sistemi modello che ho descritto nel paragrafo precedente. Inoltre, ipotizzo che in entrambi i sistemi le energie dei due stati accessibili ad ogni particella, caratterizzati da \uparrow e \downarrow , siano uguali. Quindi, per ogni sistema, il valore dell'energia è dato dall'eccesso di spin $2s_1$ e $2s_2$, rispettivamente per \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 .

Ipotizzo, inoltre, che quando i due sistemi entrano in contatto termico tra loro ci sia una piccola interazione tra le particelle che permetta di scambiare le direzioni dello spin delle particelle di un sistema rispetto all'altro. Dopo il contatto termico, il valore dell'energia totale del sistema unificato

$$U = U_1 + U_2 = 2(s_1 + s_2)m ,$$

rimane costante. Nell'evoluzione successiva, $s = s_1 + s_2$ rimane costante nel tempo anche se, singolarmente, s_1 e s_2 continuano a variare a causa della piccola interazione che scambia la direzione degli spin dei due sistemi in equilibrio termico.

La funzione di molteplicità al momento del contatto è

$$w(N_1, s_1) w(N_2, s_2) = w(N_1, s_1) w(N_2, s - s_1) ,$$

dove

$$w(N, s) = \frac{N!}{(\frac{1}{2}N + s)!(\frac{1}{2}N - s)!} .$$

Se ad un certo istante solo una particella di \mathcal{A}_1 con spin \uparrow scambia la direzione del proprio spin con una particella di \mathcal{A}_2 , la funzione di molteplicità diventa

$$w_1(N_1, s_1 + 1) w_2(N_2, s - s_1 - 1) .$$

La funzione di molteplicità del sistema \mathcal{A} è data dalla somma di tutte le possibili configurazioni ottenibili scambiandosi le direzioni dello spin, e mantenendo costanti i valori dell'energia ed il numero totale di particelle,

$$w(N, s) = \sum_{s_1 = -\frac{1}{2}N_1}^{\frac{1}{2}N_1} w_1(N_1, s_1) w_2(N_2, s - s_1) \quad (5)$$

dove ho considerato $N_1 < N_2$. Ho chiamato configurazione il prodotto di w_2 con w_1 per un valore fissato di s_1 .

C'è un valore di s_1 , che chiamerò s_1^m per il quale $w_1 w_2$ ha un massimo. Chiamo *configurazione più probabile* quella corrispondente a questo massimo. Se il numero di particelle del sistema è grande, dell'ordine del numero di Avogadro, il valore della configurazione più probabile è molto più grande di quello delle altre. La configurazione più probabile appare come un picco particolarmente stretto ed alto nella distribuzione delle configurazioni contenute nella somma (5) in funzione di s_1 . Il fatto che un termine della somma sia estremamente maggiore di tutti gli altri spinge ad utilizzare l'approssimazione in cui la configurazione più probabile sostituisce tutta la somma

$$w(N, s) \simeq w_1(N_1, s_1^m) w_2(N_2, s - s_1^m) .$$

Per poter stimare la validità di questa approssimazione dal punto di vista quantitativo, uso il sistema modello presentato nel paragrafo prece-

dente e l'espressione (3) per descrivere w_1 e w_2 . In questo caso ottengo

$$\begin{aligned} & w_1(N_1, s_1) w_2(N_2, s - s_1) \\ = & w_1(N_1, 0) w_2(N_2, 0) \exp\left(-\frac{2s_1^2}{N_1} - \frac{2s_2^2}{N_2}\right) \\ = & w_1(N_1, 0) w_2(N_2, 0) \\ & \exp\left(-\frac{2s_1^2}{N_1} - \frac{2(s - s_1)^2}{N_2}\right) \end{aligned}$$

Il valore di s_1 in cui questa funzione ha un massimo può essere calcolato cercando il punto di massimo del logaritmo della funzione.

$$\begin{aligned} & \log [w_1(N_1, s_1) w_2(N_2, s - s_1)] \\ = & \log [w_1(N_1, 0) w_2(N_2, 0)] \\ & - \frac{2s_1^2}{N_1} - \frac{2(s - s_1)^2}{N_2}, \end{aligned}$$

quindi il valore di s_1 che cerchiamo deve soddisfare la condizione

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s_1} \{\log [w_1(N_1, s_1) w_2(N_2, s_2)]\} \\ = & -\frac{4s_1}{N_1} + \frac{4(s - s_1)}{N_2} = 0. \end{aligned}$$

Lo zero della derivata prima si ha per $s_1 = s^m$ con

$$\frac{s_1^m}{N_1} = \frac{s - s_1^m}{N_2} = \frac{s_2^m}{N_2} = \frac{s}{N}.$$

Calcolando la derivata seconda si può verificare che il valore di $w_1 w_2$ per il quale $s_1 = s^m$ è massimo.

Questo significa che, usando i nostri sistemi modello, nella somma (5), che esprime la funzione di molteplicità del sistema totale, il termine maggiore è dato da

$$\begin{aligned} (w_1 w_2)_{\max} &= w_1(N_1, s_1^m) w_2(N_2, s - s_1^m) \\ &= w_1(N_1, 0) w_2(N_2, 0) \exp\left(-\frac{2s^2}{N}\right). \end{aligned}$$

Considero un numero di particelle che compongono i sistemi \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 dell'ordine di 10^{22} . Questo è anche l'ordine di grandezza del numero dei valori che s_1 può assumere, quindi il numero dei termini dell'espressione (5).

Per comprendere quanto sia stretta l'ampiezza della funzione di molteplicità $w(N, s)$ attorno al massimo, considero uno spostamento dal punto s_1^m di una frazione $\delta = 10^{12}$. Questo è un valore

molto piccolo, $\delta/N \sim 10^{-10}$ volte più piccolo del dominio dei valori accessibili a s_1 . Con questi numeri $2\delta^2/N = 200$, quindi il valore di $w_1 w_2$ si riduce di $e^{-400} \sim 10^{-174}$ rispetto al massimo. Questo significa che il picco della configurazione di massima probabilità è estremamente stretto e che il massimo è enormemente grande rispetto agli altri valori di $w_1 w_2$.

La probabilità di trovare il sistema con una deviazione maggiore di $\delta = 10^{12}$ rispetto al punto di massimo s_1^m si ottiene integrando la coda della distribuzione $w_1 w_2$ da $s_1 = \delta$ a $s_1 = N_1/2$, e moltiplicando per 2, vista la simmetria della funzione.

Per il valore indicato abbiamo che questa probabilità è dell'ordine di 10^{-152} . Dal punto di vista statistico il sistema deve evolvere in 10^{152} configurazioni per poterne trovare almeno una che si discosti da quella della posizione s_1^m di un valore maggiore di $\delta/N_1 = 10^{-10}$. Se la dinamica del sistema è tale da fargli cambiare configurazione ogni 10^{-12} secondi, ci vorranno, mediamente, 10^{140} secondi perchè il sistema si possa trovare in una configurazione differente da quella massima, di equilibrio. Questo tempo è da confrontare con l'attuale età dell'universo di 10^{18} secondi.

Equilibrio termico

Le considerazioni fatte per il sistema modello possono essere generalizzate. Nella discussione precedente ho usato l'eccesso di spin s , numero quantizzato, per definire l'energia del sistema. D'ora in poi userò direttamente l'energia U .

La molteplicità di un sistema chiuso prodotto dal contatto termico di due sistemi è data da

$$w(N, U) = \sum_{U_1} w_1(N_1, U_1) w_2(N_2, U_2)$$

dove rimane costante l'energia totale $U = U_1 + U_2$ ed il numero di particelle $N = N_1 + N_2$.

La configurazione di massima probabilità domina le proprietà del sistema. Le piccole variazioni attorno a questa configurazione possono essere descritte come

$$(dw)_{\max} = \left(\frac{\partial w_1}{\partial U_1}\right)_{N_1} w_2 dU_1 + w_1 \left(\frac{\partial w_2}{\partial U_2}\right)_{N_2} dU_2,$$

dove i sottoidici N_1 , e per conseguenza $N_2 = N - N_1$ rimangono costanti. Divido l'espressione precedente per $w_1 w_2$ e uso la relazione $dU_2 = -dU_1$ dovuta alla conservazione dell'energia

$$\frac{1}{w_1} \left(\frac{\partial w_1}{\partial U_1} \right)_{N_1} = \frac{1}{w_2} \left(\frac{\partial w_2}{\partial U_2} \right)_{N_2},$$

risultato che può essere espresso come

$$\left(\frac{\partial \log w_1}{\partial U_1} \right)_{N_1} = \left(\frac{\partial \log w_2}{\partial U_2} \right)_{N_2}.$$

Definisco l'entropia come

$$\sigma \equiv \log w(N, U), \quad (6)$$

quindi la condizione di equilibrio termico può essere espressa come

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial U_1} \right)_{N_1} = \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial U_2} \right)_{N_2}. \quad (7)$$

L'uguaglianza (7) che mette in relazione due quantità in equilibrio termico, spinge a definire la temperatura τ come

$$\frac{1}{\tau} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial U} \right). \quad (8)$$

Nelle definizioni (6) e (8) l'entropia è un numero puro e la temperatura ha le dimensioni di un'energia. Queste non sono le quantità comunemente utilizzate in termodinamica. Quella che in termodinamica è operativamente definita temperatura assoluta T è legata alla temperatura fondamentale τ dalla costante di Boltzmann k_B

$$\tau = k_B T \quad ; \quad k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J / K}$$

e quindi l'entropia termodinamica S è definita come

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right) \quad ; \quad S = k_B \sigma$$

e ha le dimensioni di energia.

L'incremento dell'entropia

Considero il cambiamento del valore dell'entropia $\Delta\sigma$ quando un certo ammontare di energia

ΔU passa dal sistema 1 al sistema 2.

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &= \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial U_1} \right)_{N_1} (-\Delta U) + \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial U_2} \right)_{N_2} (\Delta U) \\ &= \left(-\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \end{aligned}$$

Questo cambiamento dell'entropia è positivo quando $\tau_1 > \tau_2$, cioè quando il flusso di energia va dal sistema con temperatura maggiore a quello con temperatura minore.

In generale, l'entropia globale aumenta quando due sistemi sono portati in equilibrio termico. Per rendersi conto di questo basta considerare che nell'espressione

$$w(N, U) = \sum_{U_1} w_1(N_1, U_1) w_2(N_2, U - U_1)$$

c'è anche la configurazione iniziale che i due sistemi avevano prima di entrare in contatto termico tra loro

$$w_1(N_1, U_1^0) w_2(N_2, U - U_1^0)$$

dove ho indicato con U_1^0 e $U - U_1^0$ le energie iniziali dei due sistemi. Dato che tutti i termini della somma sono positivi, è evidente che

$$w(N, U) \geq w_1(N_1, U_1^0) w_2(N_2, U - U_1^0)$$

Il sistema, dopo il contatto termico, dato che tutti gli stati finali sono accessibili con la stessa probabilità, evolve nella configurazione di probabilità massima, quindi

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{finale}} &\simeq \log(w_1 w_2)_{\text{max}} \\ &\geq \sigma_{\text{iniziale}} = \log(w_1 w_2)_0 \end{aligned} \quad (9)$$

che indica la legge di aumento dell'entropia di un sistema chiuso.

Il processo che conduce all'equilibrio termico non è istantaneo ma richiede del tempo nel quale il sistema si trova in configurazioni intermedie tra quella iniziale e quella di equilibrio, con valori intermedi dell'entropia che, in questo senso, può essere considerata come funzione del tempo.

Termodinamica

La grande costruzione della termodinamica classica, sviluppatasi soprattutto nella seconda metà

del diciottesimo secolo e nella prima del diciannovesimo, è fatta senza considerare la struttura microscopica dei sistemi termodinamici. La termodinamica classica ignora la meccanica statistica, e richiede l'introduzione di quattro principi, che però sono ben compresi, e giustificati, dalla descrizione statistica del comportamento microscopico delle particelle che compongono il sistema. Qui di seguito, enuncerò, in corsivo, i principi termodinamici, e poi presenterò la loro interpretazione statistica.

• **Principio zero**

Due sistemi sono in equilibrio termico se, e solo se, sono uguali le loro temperature. Due sistemi in equilibrio termico con un terzo sistema sono in equilibrio termico tra loro.

Questa non è altro che una delle conseguenze della condizione di equilibrio (7) espressa in termini di definizione di entropia e temperatura

$$\left(\frac{\partial \log w_1}{\partial U_1}\right)_{N_1} = \left(\frac{\partial \log w_3}{\partial U_3}\right)_{N_3} = \left(\frac{\partial \log w_2}{\partial U_2}\right)_{N_2}$$

che implica $\tau_1 = \tau_3 = \tau_2$.

• **Primo principio**

Il calore è un forma di energia.

Nella visione statistica il calore è un'entità superflua poiché tutti i fenomeni sono descritti in termini di energia del sistema. Questa affermazione non è altro che asserire la conservazione dell'energia totale in un processo termodinamico.

• **Secondo principio**

È impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia il trasferimento di calore da un corpo ad un altro avente temperatura più elevata. (Clausius)

È impossibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia la produzione di lavoro a spese del calore prelevato da un'unica sorgente. (Kelvin-Planck)

Le due formulazioni sono conseguenze della legge dell'aumento dell'entropia (8), che in maniera meno rigida può essere formulato affermando che: se un sistema chiuso è in una configurazione di non equilibrio, la

conseguenza più probabile è che l'entropia del sistema continui a crescere monotonicamente in istanti successivi di tempo fino a portare all'equilibrio il sistema, situazione in cui il valore dell'entropia raggiunge suo il massimo.

• **Terzo principio**

Vicino allo zero assoluto, tutte le reazioni in un sistema in equilibrio interno avvengono senza scambio di entropia (Nerst).

L'entropia di tutti i sistemi in equilibrio interno è la stessa allo zero assoluto, e può quindi essere considerata nulla (Planck).

Il contributo all'entropia di un sistema da ogni aspetto del sistema che è in equilibrio termodinamico tende a zero quando la temperatura tende a zero (Simon).

Queste affermazioni sono conseguenza della definizione statistica di entropia, ipotizzando che lo stato fondamentale del sistema abbia una molteplicità definita. Se la molteplicità del sistema nello stato fondamentale è $w(0)$, il corrispondente valore dell'entropia è $\sigma(0) = \log w(0)$ per $\tau \rightarrow 0$.

Appendice: calcolo di $w(N, s)$ con l'approssimazione di Stirling

Ricavo le espressioni (3) e (4) usando l'approssimazione di Stirling per grandi numeri [1]

$$\log N! \simeq \frac{1}{2} \log(2\pi) + \left(N + \frac{1}{2}\right) \log N - N$$

Considero l'espressione di $w(N, s)$

$$\log(w) = \log(N!) - \log[(N/2+s)!] - \log[(N/2-s)!]$$

Usando la formula di Stirling per il primo termine ottengo

$$\begin{aligned} \log N! &\simeq \frac{1}{2} \log(2\pi) \\ &+ \left(\frac{N}{2} + s + \frac{N}{2} - s + \frac{1}{2}\right) \log N \\ &- \left(\frac{N}{2} + s + \frac{N}{2} - s\right) \end{aligned}$$

Aggiungendo e togliendo $1/2 \log N$ posso riscrivere l'espressione precedente come

$$\begin{aligned} \log N! &\simeq \frac{1}{2} \log\left(\frac{2\pi}{N}\right) \\ + \left(\frac{N}{2} + s + \frac{1}{2} + \frac{N}{2} - s + \frac{1}{2}\right) \log N \\ - \left(\frac{N}{2} + s + \frac{N}{2} - s\right) \end{aligned}$$

Per gli altri due termini ottengo

$$\begin{aligned} \log\left[\left(\frac{N}{2} + s\right)!\right] &= \frac{1}{2} \log(2\pi) + \\ \left(\frac{N}{2} + s + \frac{1}{2}\right) \log\left(\frac{N}{2} + s\right) &- \left(\frac{N}{2} + s\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \log\left[\left(\frac{N}{2} - s\right)!\right] &= \frac{1}{2} \log(2\pi) + \\ \left(\frac{N}{2} - s + \frac{1}{2}\right) \log\left(\frac{N}{2} - s\right) &- \left(\frac{N}{2} - s\right) \end{aligned}$$

Usando le tre espressioni derivate sopra, ottengo per w

$$\begin{aligned} \log(w) &\simeq \frac{1}{2} \log[1/(2\pi N)] \\ - \left(\frac{N}{2} + s + \frac{1}{2}\right) \log\left[\left(\frac{N}{2} + s\right)/N\right] \\ - \left(\frac{N}{2} - s + \frac{1}{2}\right) \log\left[\left(\frac{N}{2} - s\right)/N\right] \end{aligned}$$

Riscrivo gli ultimi due logaritmi

$$\begin{aligned} \log\left[\left(\frac{N}{2} + s\right)/N\right] &= \log\left[\frac{1}{2}(1 + 2s/N)\right] \\ &= -\log 2 + \log(1 + 2s/N) \\ &\simeq -\log 2 + (2s/N) - (2s^2/N^2) + \dots \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \log\left[\left(\frac{N}{2} - s\right)/N\right] \\ \simeq -\log 2 - (2s/N) - (2s^2/N^2) + \dots \end{aligned}$$

dove ho usato l'approssimazione

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

valida per $x \ll 1$.

Riarrangiando i vari termini ottengo

$$\begin{aligned} \log(w) &\simeq \frac{1}{2} \log[1/(2\pi N)] \\ - \left(\frac{N}{2} + s + \frac{1}{2}\right) &[-\log 2 + (2s/N) - (2s^2/N^2)] \\ - \left(\frac{N}{2} - s + \frac{1}{2}\right) &[-\log 2 - (2s/N) - (2s^2/N^2)] \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \log(w) &\simeq \frac{1}{2} \log[1/(2\pi N)] \\ - N \left[-\log 2 - \frac{2s^2}{N^2}\right] \\ - 2s \frac{2s}{N} - \left(-\log 2 - \frac{2s^2}{N^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \log[1/(2\pi N)] + (N+1) \log 2 \\ + N \frac{2s^2}{N^2} - \frac{4s^2}{N} - \frac{2s^2}{N^2} \end{aligned}$$

Trascurando l'ultimo termine $\sim s^2/N^2$

$$\log(g) \simeq \frac{1}{2} \log[2/(\pi N)] + N \log 2 - 2s^2/N$$



[1] C. Kittel, H. Kroemer: *Thermal Physics*. W. H. Freeman & Co., New York (1980).



Giampaolo Co': Professore associato di Fisica Nucleare presso l'Università del Salento si occupa di teorie a molti corpi applicate allo studio della struttura dei nuclei atomici.

Numero XI Anno 2018

Viaggio nella Scienza

Ithaca

I sistemi integrabili

