

Capitolo 8

La curvatura riemanniana

Secondo Robert Osserman, matematico ben noto, la curvatura è il concetto centrale della geometria riemanniana. Una metrica riemanniana g determina completamente la sua curvatura. Viceversa, spesso possiamo dedurre informazioni sulla metrica da particolari proprietà della curvatura. In alcuni casi, la conoscenza della curvatura determina completamente la metrica (almeno localmente). In generale, la curvatura influenza ma non determina la metrica. Tutte le informazioni sulla curvatura sono contenute nel *tensore di curvatura di Riemann* R associato alla varietà riemanniana (M, g) . Tale tensore è un oggetto analitico in generale non facile da maneggiare, tanto che, il famoso matematico M. Gromov chiamò il tensore di curvatura “*piccolo mostro dell'algebra multilineare, il cui pieno significato geometrico è ancora oscuro*”. Questo spiega l'esigenza di ricorrere anche ad altre forme di curvatura, come quella sezionale, di Ricci e scalare, di più semplice interpretazione geometrica e più maneggevoli rispetto al tensore di Riemann R . Tuttavia, in dimensione 2, il tensore R si riduce a una singola funzione: la curvatura gaussiana. Sebbene la definizione del tensore R si basi sulla nozione di connessione riemanniana, storicamente l'idea di connessione è postdata rispetto all'introduzione fatta da Riemann del tensore di curvatura. Egli individuò questo oggetto nel termine del secondo ordine della espressione di Taylor della metrica riemanniana g . Più precisamente, se $x = (x_1, \dots, x_n)$ sono coordinate normali centrate in p_0 , si ha

$$\begin{aligned}x_i(p_0) &= 0, & g_{ij}(p_0) &= g_{ij}(0) = \delta_{ij}, & (\partial g_{ij} / \partial x_k)(p_0) &= 0, \\g_{ij}(x) &= \delta_{ij} - (1/3) \sum_{h,k=1}^n R_{ihjk}(p_0) x_h x_k + o(|x|^2).\end{aligned}$$

Poiché (δ_{ij}) rappresenta la metrica euclidea, R stima di quanto una metrica differisce dall'essere piatta. Tutte le informazioni contenute in R sono anche contenute nella curvatura sezionale, la quale è la naturale generalizzazione della curvatura gaussiana. La curvatura sezionale è una funzione a valori reali definita nella grassmanniana dei 2-piani tangenti. Un ruolo fondamentale nello studio della geometria riemanniana è svolto dalle varietà a curvatura sezionale costante, anche per il loro legame con le geometrie non-euclidee.

8.1 Uno sguardo alla curvatura gaussiana

Prima di iniziare lo studio della curvatura di una varietà riemanniana, è opportuno esaminare alcuni aspetti e implicazioni della curvatura gaussiana di una superficie. La curvatura gaussiana è la principale nozione intrinseca di una superficie. Intuitivamente, con il termine “proprietà intrinseche” si indicano quelle proprietà di una superficie che dipendono solo da misure di lunghezze di curve che stanno sulla stessa superficie, al contrario di quelle estrinseche che dipendono dalla posizione della superficie nello spazio.

La curvatura di una curva

Per capire la genesi del concetto di curvatura, partiamo dalla nozione di curvatura di una curva dello spazio euclideo \mathbb{R}^3 . Se $\gamma(s)$, s ascissa curvilinea, è un arco di curva regolare,

$$k(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\|$$

è la *curvatura* di γ nel punto $\gamma(s)$. Nel caso di $\gamma(s)$ curva piana, è possibile definire la curvatura con segno. Se (e_1, e_2) è la base naturale di \mathbb{R}^2 , si definisce il versore normale $\vec{n}(s)$ richiedendo che la base $(\dot{\gamma}(s), \vec{n}(s))$ sia equiversa alla base (e_1, e_2) . Allora, la curvatura con segno è definita da $\ddot{\gamma}(s) = k(s)\vec{n}(s)$ (cfr. Figura 8.1).

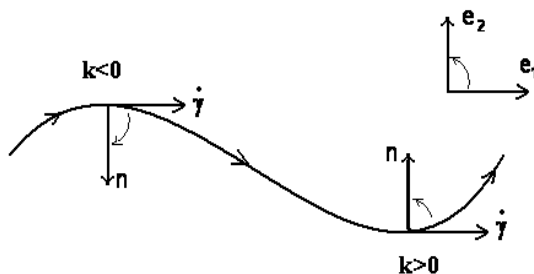


Figura 8.1: La curvatura di una curva.

Un altro modo per presentare la curvatura è il seguente. Fissato un punto $p = \gamma(s)$ sulla curva, si considera il versore normale $\vec{n}(s) = \frac{\ddot{\gamma}(s)}{\|\ddot{\gamma}(s)\|}$ a γ in quel punto, poi si considera una circonferenza unitaria e si sceglie un raggio avente la direzione del versore normale $\vec{n}(s)$, la scelta del raggio individua un punto $G(p)$ sulla circonferenza. Quando p descrive un piccolo arco $\gamma(s)$, $s_0 \leq s \leq s_0 + \Delta s$, su γ , $G(p)$ descrive un corrispondente arco, di lunghezza $\Delta\vartheta$, sulla circonferenza unitaria, allora la curvatura nel punto $\gamma(s_0)$ è data da

$$k(s_0) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta s}.$$

Quindi, la curvatura di una curva dà una stima di quanto la stessa curva si allontana dalla retta tangente in quel punto. In particolare, una circonferenza di raggio r ha curvatura costante $k = 1/r$.

Infine, osserviamo che la curvatura e la torsione τ (che a sua volta stima di quanto la curva si allontana dall'essere piana) caratterizzano una curva, abbiamo infatti il seguente teorema fondamentale della teoria delle curve.

Teorema 8.1. ([96], p.67) *Siano $\gamma_1(s), \gamma_2(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, s ascissa curvilinea, due curve regolari. Se $k_1(s) = k_2(s) > 0$ e $\tau_1(s) = \pm\tau_2(s)$, allora γ_1, γ_2 sono congruenti, ossia esiste un'isometria f dello spazio euclideo \mathbb{R}^3 tale che $f(\gamma_1) = \gamma_2$.*

La curvatura gaussiana

Gauss nel suo articolo “*Disquisitiones generales circa superficies curvas*” del 1827, definì la curvatura di una superficie M in un punto $p \in M$ come la misura di quanto la stessa superficie si allontana dal piano tangente in quel punto.

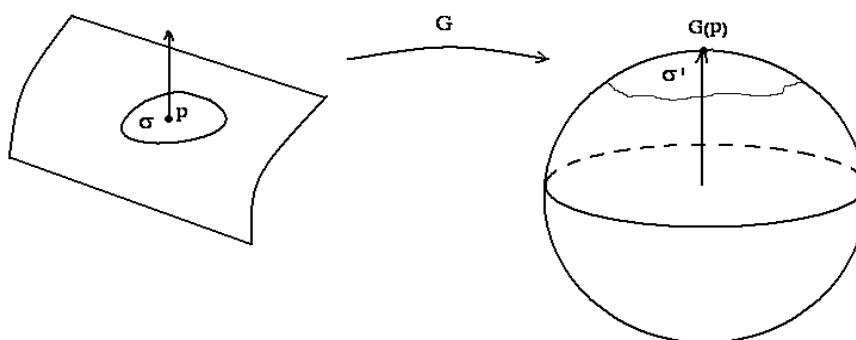


Figura 8.2: L'applicazione di Gauss.

Più precisamente, fissato un punto $p \in M$, si considera la normale in quel punto alla superficie, poi si considera una sfera unitaria e si sceglie un raggio avente la direzione della normale fissata; la scelta del raggio individua un punto $G(p)$ sulla sfera. Quando p descrive una piccola regione σ su M , $G(p)$ descrive una corrispondente regione σ' sulla sfera unitaria (cfr. Figura 8.2). Gauss definisce la curvatura $K(p)$ della superficie M in p , considerata a meno del segno, come il limite del rapporto tra l'area della regione σ' sulla sfera e l'area della corrispondente regione σ sulla superficie, dove il limite è fatto restringendo le regioni considerate fino a farle coincidere con i rispettivi punti di partenza. Inoltre, Gauss mostrò che $K(p)$ è esattamente il prodotto delle due curvatures principali $k_1(p)$ e $k_2(p)$ introdotte da Eulero nel 1760. Ricordiamo che le curvatures principali $k_1(p)$ e $k_2(p)$ di una superficie sono

definite, rispettivamente, come il massimo e il minimo della curvatura $k_n(p)$ di curve date dalle sezioni di M con piani normali ad M nel punto p (cioè con piani appartenenti al fascio di piani avente per asse la normale in p al piano tangente). Nel linguaggio moderno la definizione di Gauss può essere espressa nel modo seguente. Se si considera G come un'applicazione da M in S^2 , G è differenziabile e $K(p) = \det G_{*p}$ dove G_{*p} denota il differenziale di G nel punto p . Quando M è orientabile, la funzione G è ben definita sull'intera superficie M (in tal caso esiste un campo differenziabile di vettori normali ad M , non nullo e definito sull'intera superficie), in generale G è definita solo localmente. Si noti che al tempo di Gauss, la nozione di orientazione non era ben nota; Möbius esibì il suo famoso esempio di superficie non orientabile, oggi noto come nastro di Möbius, solo nel 1865.

Esercizio 8.2. Sia ξ un campo unitario di vettori ortogonali alla superficie M . Identificato $T_p M$ con $T_{G(p)} S^2$, verificare che il differenziale G_{*p} coincide, a meno del segno, con l'operatore forma (o operatore di Weingarten)

$$S_p : T_p M \rightarrow T_p M, V_p \mapsto S_p(V_p) = -\nabla_{V_p}^0 \xi,$$

dove ∇^0 è la connessione euclidea. Suggerimento: indicata con $\gamma(t)$ una curva differenziabile di M con $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = V_p$, osservare che

$$S_p(V_p) = \dots = -\xi'(0) \quad \text{e} \quad G_{*p}V_p = \dots = \xi'(0), \quad \text{dove} \quad \xi(t) = \xi(\gamma(t)).$$

Vi sono significative differenze fra superfici con curvatura positiva, nulla o negativa (cfr. Figura 8.3). Vicino al punto di tangenza, una superficie

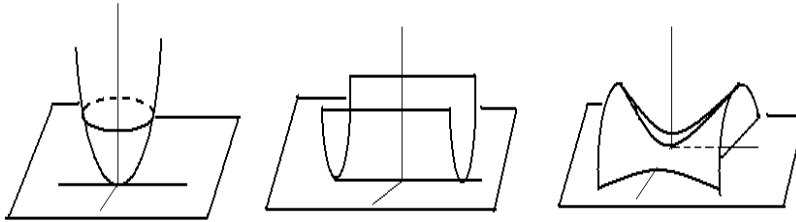


Figura 8.3: *Superfici con curvatura gaussiana $>$, $=$, $<$ 0.*

con curvatura positiva giace tutta da una parte rispetto al piano tangente, quelle con curvatura nulla hanno una linea lungo la quale si sovrappongono al loro piano tangente (tali superfici sono dette sviluppabili, come ad esempio piano, cono, cilindro). Le superfici con curvatura negativa invece intersecano i loro piani tangenti come in una sella. La misura precisa della curvatura dipende dal comportamento della superficie al secondo ordine. Un modo per

realizzare ciò è scegliere un sistema di coordinate in modo che il punto sulla superficie sotto lo sguardo sia l'origine e il piano tangente in quel punto sia orizzontale. Questo significa che la superficie localmente è rappresentata da $z = f(x, y)$ tale che f e le sue derivate parziali del primo ordine f_x e f_y siano nulle nell'origine. Allora la curvatura gaussiana nell'origine è il determinante della matrice hessiana

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Ad esempio, la curvatura della superficie $z = f(x, y)$, dove $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, nell'origine è data da $K_0 = 4(AC - B^2)$. Per un paraboloide di rotazione (ad esempio $z = -(x^2 + y^2)/2$) la curvatura gaussiana K_0 è positiva, invece per un paraboloide iperbolico o a sella (ad esempio $z = (x^2 - y^2)/2$) la curvatura gaussiana K_0 è negativa. La curvatura $K(p)$ per le superfici degli esempi non è costante: essa tende rapidamente a zero lontano dall'origine mantenendo lo stesso segno.

Ricordiamo che una nozione (o una proprietà) è detta *intrinseca* se essa dipende solo dalla prima forma fondamentale ossia se è invariante per isometrie locali, altrimenti è detta *estrinseca*. La definizione di curvatura data da Gauss sembra dipendere da nozioni estrinseche (viene considerato il vettore normale alla superficie). Egli però dimostrò che la sua definizione di curvatura dipende unicamente da come si effettuano le misure sulla superficie M , ossia dipende solo dalla prima forma fondamentale. Gauss, a partire dalle equazioni parametriche di una superficie regolare: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, definì la cosiddetta *prima forma fondamentale* della superficie (come una generalizzazione del concetto di distanza tra due punti infinitamente vicini) mediante la formula

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

dove $E = g_0(\phi_u, \phi_u)$, $F = g_0(\phi_u, \phi_v)$, $G = g_0(\phi_v, \phi_v)$, g_0 denota il prodotto scalare euclideo, e ϕ_u e ϕ_v sono i vettori tangenti alle linee coordinate $v = \text{cost.}$ e $u = \text{cost.}$ rispettivamente. Quindi, dimostrò il "*Theorema Egregium*": *la curvatura gaussiana dipende solo dalla prima forma fondamentale*, in altre parole la curvatura gaussiana è calcolabile da un essere bidimensionale che vive sulla superficie e non può abbandonarla per tracciare perpendicolari. Dunque: se $f : M \rightarrow \bar{M}$ è un'isometria (locale) tra due superfici, allora $\bar{K}(f(p)) = K(p)$.

Diamo ora delle presentazioni della curvatura gaussiana che mettono in evidenza il suo carattere intrinseco. Data una superficie M , sia $T_p M$ il piano tangente in un punto $p \in M$. La circonferenza $C_E(p, \varepsilon)$ (di $T_p M$ con centro in p e raggio ε) ha lunghezza euclidea

$$\mathcal{L}(C_E(p, \varepsilon)) = 2\pi\varepsilon.$$

La circonferenza di M di centro p e raggio ε è definita da

$$C_M(p, \varepsilon) = \{q \in M : d(p, q) = \varepsilon\},$$

dove d è la distanza intrinseca di M .

Teorema 8.3 (Bertrand-Diguet-Puiseux, 1848).

$$\mathcal{L}(C_M(p, \varepsilon)) = \mathcal{L}(C_E(p, \varepsilon)) \left[1 - \frac{K(p)}{3!} \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \right] = 2\pi\varepsilon - \frac{\pi}{3} K(p) \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3),$$

e quindi

$$K(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \left[\frac{2\pi\varepsilon - \mathcal{L}(C_M(p, \varepsilon))}{\varepsilon^3} \right].$$

Se M è la sfera di raggio R , il raggio della circonferenza $C_M(p, \varepsilon)$ è $R \sin(\varepsilon/R)$. Di conseguenza

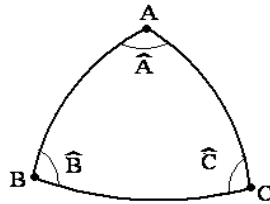
$$\mathcal{L}(C_M(p, \varepsilon)) = 2\pi R \sin \frac{\varepsilon}{R} = 2\pi\varepsilon - \frac{\pi\varepsilon^3}{3R^2} + o\left(\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^3\right),$$

e quindi $K(p) = 1/R^2$.

Teorema 8.4 (elegantissimo di Gauss, 1827). *Sia T un triangolo geodetico di vertici A, B, C di una superficie M di \mathbb{R}^3 . Allora*

$$\int_T K(p) d\sigma = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi,$$

dove $K(p)$ è la curvatura gaussiana della superficie M in p , $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ denotano le misure (in radianti) degli angoli interni al triangolo T , e $d\sigma = \sqrt{EG - F^2} du dv$ è l'elemento d'area di M .



L'invariante

$$K(p) = \lim_{T \rightarrow p} ((\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi) / \text{area}(T))$$

misura il difetto di euclidicità della superficie nel punto. In particolare, se K è costante su M , $K(p) = K_0$ per ogni $p \in M$ e quindi

$$K_0 = (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi) / \text{area}(T).$$

In particolare, per $K_0 = 1$ otteniamo esattamente la formula scoperta da A. Girard nel 1629 per un triangolo geodetico sulla sfera unitaria.

Se $K_0 = 0$ (cioè, se M è una superficie localmente piatta), si ha

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi,$$

(fatto ben noto della geometria euclidea).

Se $K_0 > 0$ (cioè, se M è localmente isometrica ad una sfera di raggio $\sqrt{1/K_0}$), si ha

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > \pi.$$

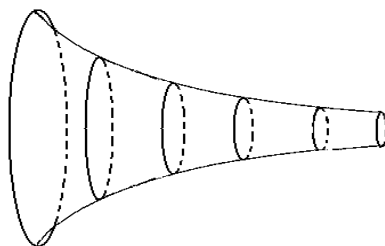
Se $K_0 < 0$ (cioè, se M è localmente isometrica ad una pseudosfera), si ha

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < \pi.$$

Al tempo di Gauss uno dei problemi fondamentali della geometria era la “*questione delle parallele*”, iniziata al tempo di Euclide e conclusasi solo con l’avvento delle geometrie non euclidee. Si trattava di decidere se il quinto postulato della geometria euclidea fosse indipendente dagli altri postulati della geometria di Euclide. Ben presto si stabilì che il quinto postulato è equivalente al fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a π (radianti). Dunque, la scoperta di Gauss faceva intravedere l’esistenza di geometrie diverse da quella euclidea e quindi di una geometria sulle superfici senza riferimento allo spazio ambiente.

La pseudosfera di Beltrami

Il piano euclideo ($K=0$) e la sfera $S^2(R)$ ($K = \frac{1}{R^2}$) sono due modelli della teoria delle superfici di \mathbb{R}^3 a curvatura gaussiana costante. Il terzo modello è la *pseudosfera di Beltrami*:



una superficie (non completa) di curvatura gaussiana costante negativa, che non è possibile visualizzare in modo completo in \mathbb{R}^3 . Nel seguito diamo una descrizione di tale superficie (cfr. M. Villa [115]). La pseudosfera di Beltrami è la superficie generata dalla rotazione di una trattrice intorno al proprio asintoto. La trattrice dal punto di vista meccanico è la curva descritta in un piano orizzontale da un punto pesante attaccato all’estremo di un filo teso, di cui l’altro estremo percorre una retta appartenente a quel piano (ciò giustifica il nome della curva). Tale curva è anche detta *curva del cane* pensando ad un uomo che, percorrendo una retta, tira per il guinzaglio un cane restio a seguirlo. Nel piano euclideo la *trattrice* è una curva per cui, se P è un punto

di essa e T è il punto in cui la tangente in P interseca una retta fissa a , il segmento PT ha lunghezza costante ($= R$) al variare di P sulla curva. La retta a è l'asintoto della trattrice (cfr. Figura 8.4). Supponendo che la retta a sia l'asse x , allora la trattrice γ ha equazione del tipo $y = y(x)$. Fissato $P_0(x_0, y_0) \in \gamma$ e detto T il punto in cui la tangente in P_0 incontra l'asse x , la retta $[P_0, T]$ è la tangente in P_0 a γ , quindi ha equazione

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \quad \text{con} \quad y'(x_0) = (dy/dx)(x_0).$$

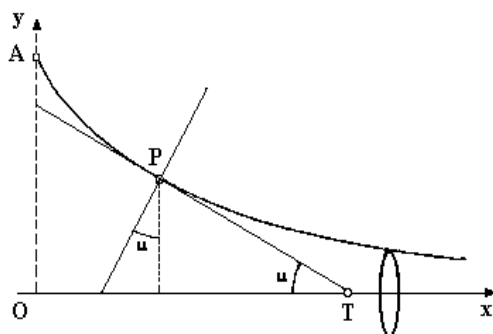


Figura 8.4: La trattrice.

Siccome T ha coordinate $x_1 = x_0 - \frac{1}{y'(x_0)}y_0 = x_0 - \frac{dx}{dy}(y_0)y_0$ e $y_1 = 0$, si ha

$$\overline{P_0T} = \text{cost} = R \Leftrightarrow R^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = \left(\frac{dx}{dy}(y_0)\right)^2 y_0^2 + y_0^2.$$

Considerato $P(x, y)$ generico punto di γ , si ha :

$$R^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 y^2 + y^2, \quad \text{cioè} \quad \frac{R^2 - y^2}{y^2} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2, \quad y > 0.$$

Pertanto $x' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}\sqrt{R^2 - y^2}$ (eq. differenziale della curva), e quindi

$$x = \int \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y} dy.$$

Indicato con u l'angolo formato dalla tangente PT con l'asse x , si ha

$$y = R \sin u, \quad x = R \int \frac{\cos^2 u}{\sin u} du = R \left(\int \frac{du}{\sin u} - \int \sin u du \right).$$

Il punto A inizio della curva (pensando alla generazione meccanica) ha coordinate $(0, R)$, pertanto dovrà aversi $x = 0$ per $u = \pi/2$. Dunque, γ ha

equazioni parametriche:

$$\gamma : \begin{cases} x = R \ln \tan u/2 + R \cos u, \\ y = R \sin u, \quad u \in]0, \pi[. \end{cases} \quad (8.1)$$

$\gamma(u)$ è una curva regolare tranne che per $u = \pi/2$. Eliminando u si ottiene l'equazione cartesiana:

$$x = -\sqrt{R^2 - y^2} + R \ln \frac{R + \sqrt{R^2 - y^2}}{y}.$$

Per $u \in]0, \pi/2[$ si ottiene la curva in Figura 8.4, per $u \in [\pi/2, \pi[$ si ottiene una curva simmetrica rispetto all'asse y . Infatti, cambiando nella (8.1) u con $\pi - u$, la x cambia di segno mentre la y resta inalterata. Quindi, γ è simmetrica rispetto all'asse y . Il punto A è una cuspide per la curva e l'asse y è la relativa tangente cuspidale. La pseudosfera si ottiene ruotando γ intorno all'asse x . La superficie Σ ottenuta ha equazioni parametriche

$$\Sigma : \begin{cases} x = R(\ln \tan u/2 + \cos u), & u \in]0, \frac{\pi}{2}[, v \in [0, 2\pi[, \\ y = R \sin u \cos v, \\ z = R \sin u \sin v. \end{cases}$$

I vettori tangenti coordinati sono

$$\begin{aligned} \phi_u &= R \left(\frac{\cos^2 u}{\sin u}, \cos u \cos v, \cos u \sin v \right), \\ \phi_v &= R(0, -\sin u \sin v, \sin u \cos v), \end{aligned}$$

e quindi la prima forma quadratica fondamentale è definita dai coefficienti

$$\begin{aligned} E &= g_0(\phi_u, \phi_u) = R^2 \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}, & F &= g_0(\phi_u, \phi_v) = 0, \\ G &= g_0(\phi_v, \phi_v) = R^2 \sin^2 u. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\xi = \frac{\phi_u \wedge \phi_v}{\|\phi_u \wedge \phi_v\|} = (\sin u, -\cos u \cos v, -\cos u \sin v)$$

è un vettore ortogonale alla superficie e quindi la seconda forma quadratica fondamentale è definita dai coefficienti

$$\begin{aligned} l &= g_0(\phi_{uu}, \xi) = -R \frac{\cos u}{\sin u}, \\ m &= g_0(\phi_{uv}, \xi) = 0, \\ n &= g_0(\phi_{vv}, \xi) = R \sin u \cos u. \end{aligned}$$

Pertanto, la curvatura gaussiana della pseudosfera è una costante negativa:

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{R^2}.$$

Si può verificare che la geometria sulla pseudosfera di Beltrami, assumendo come rette le geodetiche di tale superficie, coincide (limitatamente a regioni opportune) con la geometria piana iperbolica. Hilbert dimostrò che non esiste una superficie dello spazio euclideo a curvatura costante negativa in cui valga in tutta la sua estensione la geometria iperbolica. Più precisamente, vale il seguente

Teorema 8.5. (di Hilbert) *Nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 non esiste una superficie regolare completa di curvatura gaussiana costante negativa.*

8.2 Il tensore di curvatura di Riemann

Sia M una varietà differenziabile munita di una connessione lineare ∇ .

Definizione 8.6. Il tensore R di tipo $(1, 3)$ su M definito da

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M), \\ (X, Y, Z) &\mapsto R(X, Y)Z := -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= -[\nabla_X, \nabla_Y]Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \end{aligned}$$

si dice *tensore di curvatura* associato alla connessione lineare ∇ .

Esercizio 8.7. Si verifichi che R è effettivamente un tensore.

Poiché R è un tensore, $(R(X, Y)Z)(p)$ dipende univocamente dai vettori X_p, Y_p, Z_p , cioè dai tre campi di vettori X, Y, Z nel punto p , e non dal loro comportamento in un intorno di p . Di conseguenza, è possibile definire un tensore di curvatura sullo spazio $T_p M$ mediante la formula

$$R(X_p, Y_p)Z_p := (R(X, Y)Z)(p) = -\nabla_{X_p} \nabla_{Y_p} Z + \nabla_{Y_p} \nabla_{X_p} Z + \nabla_{[X, Y]_p} Z,$$

dove $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$, U intorno di p , con $X(p) = X_p, Y(p) = Y_p$ e $Z(p) = Z_p$.

Nella Sezione 6.2 si è definita per una funzione $f \in \mathcal{F}(M)$, rispetto a una fissata connessione lineare ∇ , la derivata seconda $\nabla^2 f$ che è un tensore di tipo $(0, 2)$. Ora, per un campo vettoriale $Z \in \mathfrak{X}(M)$ vediamo che si può definire la *derivata covariante seconda* $\nabla^2 Z$. Se S è un tensore di tipo $(1, 1)$, ∇S denota il tensore di tipo $(1, 2)$ definito da

$$(\nabla S)(X, Y) = (\nabla_X S)Y := \nabla_X SY - S(\nabla_X Y).$$

Dato $Z \in \mathfrak{X}(M)$, ∇Z si può pensare come un tensore di tipo $(1, 1)$ su M ,

$$\nabla Z : X \mapsto \nabla_X Z.$$

Pertanto, possiamo definire la derivata covariante seconda $\nabla^2 Z$:

$$(\nabla^2 Z)(X, Y) = \nabla_{X, Y}^2 Z := (\nabla_X \nabla_Y Z)(Y) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z \quad (8.2)$$

per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. $\nabla^2 Z$ è un tensore di tipo $(1, 2)$ su M . Assumendo ∇ simmetrica e usando la nozione appena introdotta, otteniamo:

$$R(X, Y)Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z = -\nabla_{X, Y}^2 Z + \nabla_{Y, X}^2 Z.$$

Quindi, $R(X, Y)Z$ è la parte antisimmetrica del tensore $\nabla^2 Z$. Pertanto, *R stima la non invertibilità della derivata covariante seconda di un campo di vettori*. Se $[X, Y] = 0$, come nel caso dei campi di vettori coordinati $X = \partial/\partial x_i$ e $Y = \partial/\partial x_j$, allora

$$R(X, Y)Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z.$$

Di conseguenza, se $R(X, Y) = 0$, si ha $\nabla_X \nabla_Y = \nabla_Y \nabla_X$.

Osservazione 8.8. Dati due campi vettoriali $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, è possibile definire l'operatore

$$R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), Z \mapsto R(X, Y)Z,$$

detto *operatore di curvatura*. Si tratta di un endomorfismo di $\mathfrak{X}(M)$ per il quale risulta $R(X, Y) = -R(Y, X)$. L'operatore di curvatura $R(X, Y)$ si può estendere ai campi tensoriali ponendo

$$R(X, Y)S := -\nabla_X(\nabla_Y S) + \nabla_Y(\nabla_X S) + \nabla_{[X, Y]} S.$$

In questo modo si ottiene un tensore dello stesso tipo di S . $R(X, Y)S$ è $\mathcal{F}(M)$ -lineare in X, Y, S . Inoltre, risulta

$$\begin{aligned} (R(X, Y)S)(V_1, \dots, V_r) &= R(X, Y)S(V_1, \dots, V_r) \\ &\quad - \sum_{i=1}^r S(V_1, \dots, R(X, Y)V_i, \dots, V_r). \end{aligned}$$

Si noti che se S è di tipo $(0, r)$, cioè se $S(V_1, \dots, V_r) = f \in \mathcal{F}(M)$, allora

$$R(X, Y)S(V_1, \dots, V_r) = 0$$

in quanto:

$$\begin{aligned} R(X, Y)f &= -\nabla_X \nabla_Y f + \nabla_Y \nabla_X f + \nabla_{[X, Y]} f \\ &= -X(Yf) + Y(Xf) + [X, Y](f) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esercizio 8.9. Si verifichi che il tensore di curvatura R_0 associato alla connessione lineare euclidea ∇^0 di \mathbb{R}^n è identicamente nullo.

Adesso, vediamo di quali proprietà si arricchisce il tensore R se la varietà considerata è una varietà riemanniana (M, g) e la connessione considerata

∇ è quella di Levi-Civita. In queste particolari condizioni, al tensore di curvatura R di tipo (1,3) si associa in modo naturale un tensore di tipo (0,4), che indichiamo con lo stesso simbolo R , definito da

$$R(X, Y, Z, W) := g(R(X, Y)Z, W).$$

Il tensore di curvatura R di tipo (0,4) è detto *tensore di curvatura di Riemann* della varietà riemanniana (M, g) . Ovviamente, è anche definito il tensore di curvatura di Riemann R in un fissato punto p di M , basta porre

$$R(X_p, Y_p, Z_p, W_p) := g_p(R(X_p, Y_p)Z_p, W_p).$$

Proposizione 8.10. *Il tensore di curvatura di Riemann R soddisfa le seguenti proprietà:*

- 1) $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$,
- 2) $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$,
- 3) $R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$,
- 4) $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$.

La proprietà 3) è nota come *prima identità di Bianchi*.

Dimostrazione. La 1) segue direttamente dalla definizione di tensore di curvatura. Per la 2) basta dimostrare che $R(X, Y, Z, Z) = 0$ per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Poiché

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, Z) &= g(R(X, Y)Z, Z) \\ &= -g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) + g(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) + g(\nabla_{[X, Y]} Z, Z), \end{aligned}$$

sfruttando la compatibilità della connessione di Levi-Civita ∇ con la metrica g , si ottiene:

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, Z) &= -Xg(\nabla_Y Z, Z) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) + Yg(\nabla_X Z, Z) \\ &\quad - g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) + \frac{1}{2} [X, Y]g(Z, Z) \\ &= -\frac{1}{2} XYg(Z, Z) + \frac{1}{2} YXg(Z, Z) + \frac{1}{2} [X, Y]g(Z, Z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Proviamo ora la 3). Usando la definizione di tensore di curvatura e la simmetria di ∇ , risulta:

$$\begin{aligned} &R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y \\ &= \nabla_Y [X, Z] - \nabla_X [Y, Z] - \nabla_Z [X, Y] + \nabla_{[X, Y]} Z + \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_{[Z, X]} Y \\ &= [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] + [[X, Y], Z] = 0, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è l'identità di Jacobi. Infine, proviamo la 4). Dalla prima identità di Bianchi, permutando ciclicamente gli argomenti di R , otteniamo le seguenti 4 equazioni:

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) &= 0, \\ R(Y, Z, W, X) + R(Z, W, Y, X) + R(W, Y, Z, X) &= 0, \\ R(Z, W, X, Y) + R(W, X, Z, Y) + R(X, Z, W, Y) &= 0, \\ R(W, X, Y, Z) + R(X, Y, W, Z) + R(Y, W, X, Z) &= 0. \end{aligned}$$

Sommando membro a membro e applicando le identità 1) e 2), si ricava:

$$2R(Z, X, Y, W) = 2R(Y, W, Z, X)$$

che equivale all'identità 4). \square

Esempio 8.11. Sia M una ipersuperficie regolare di \mathbb{R}^{n+1} con la metrica canonica $g = i^*g_0$. Il tensore di curvatura R di tipo $(1, 3)$ dell'ipersuperficie (M, g) è dato da

$$R(X, Y)Z = g(SX, Z)SY - g(SY, Z)SX, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), \quad (8.3)$$

dove S è l'operatore forma di M rispetto a un fissato campo vettoriale ξ unitario (locale) normale all'ipersuperficie. La (8.3) è detta *equazione di curvatura di Gauss* per ipersuperfici dello spazio euclideo.

Verifichiamo l'equazione (8.3). Ricordiamo che, per $p \in M$ e $X_p \in T_pM$, l'operatore forma S è dato da

$$SX_p = -\nabla_{X_p}^0 \xi,$$

dove ∇^0 è la connessione euclidea. Inoltre, vale l'equazione di Gauss (6.24), ovvero

$$(\nabla_X^0 Y)_p = (\nabla_X Y)_p + g_p(SX_p, Y_p)\xi_p,$$

dove ∇ è la connessione di Levi-Civita di (M, g) . Ora ricordiamo che il tensore di curvatura dello spazio euclideo è identicamente nullo, per cui è soddisfatta l'identità

$$-\nabla_X^0 \nabla_Y^0 Z + \nabla_Y^0 \nabla_X^0 Z + \nabla_{[X, Y]}^0 Z = 0. \quad (8.4)$$

Calcolando la derivata covariante seconda, applicando l'equazione di Gauss, si ha

$$\begin{aligned} \nabla_X^0 \nabla_Y^0 Z &= \nabla_X^0 (\nabla_Y Z + g(SY, Z)\xi) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + g(SX, \nabla_Y Z)\xi + X(g(SY, Z))\xi + g(SY, Z)\nabla_X^0 \xi, \end{aligned}$$

ovvero,

$$-\nabla_X^0 \nabla_Y^0 Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + g(SY, Z)SX - (g(SX, \nabla_Y Z) + X(g(SY, Z)))\xi.$$

In modo analogo si trova:

$$\begin{aligned}\nabla_Y^0 \nabla_X^0 Z &= \nabla_Y \nabla_X Z - g(SX, Z)SY + (g(SY, \nabla_X Z) + Y(g(SX, Z)))\xi, \\ \nabla_{[X, Y]}^0 Z &= \nabla_{[X, Y]} Z + g(S[X, Y], Z)\xi.\end{aligned}$$

Sostituendo le ultime tre equazioni nella (8.4), si ottiene

$$-\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z + g(SY, Z)SX - g(SX, Z)SY + (\dots)\xi = 0.$$

Da questa equazione, ponendo uguale a zero la componente tangente, e tenendo presente la definizione di $R(X, Y)Z$, si ottiene esattamente la (8.3).

Componenti locali del tensore di curvatura

Consideriamo una base locale $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ di campi di vettori definiti in un intorno coordinato U (in particolare si può considerare $e_i = \partial/\partial x_i$), dove $n = \dim M$. Il tensore di curvatura R di tipo $(1, 3)$ è univocamente determinato, nell'intorno coordinato U , dalle funzioni $R_{ijk}^l \in \mathcal{F}(U)$, $i, j, k, l = 1, \dots, n$, definite da:

$$R(e_i, e_j)e_k = \sum_{h=1}^n R_{ijk}^l e_l.$$

Il tensore di curvatura Riemann R di tipo $(0, 4)$ è univocamente determinato nell'intorno U dalle funzioni $R_{ijkl} \in \mathcal{F}(U)$, definite da:

$$R_{ijkl} := R(e_i, e_j, e_k, e_l) = g(R(e_i, e_j)e_k, e_l) = \sum_{l=1}^n R_{ijk}^l g_{lh},$$

dove $g_{ij} = g(e_i, e_j)$. In particolare, se la base $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ è ortonormale, si ha

$$R_{ijkl} = R_{ijk}^h.$$

Usando le funzioni componenti R_{ijkl} , le identità della Proposizione 8.10 diventano:

$$R_{ijhk} = -R_{jihk} = -R_{ijkh} = R_{hkij}, \quad R_{ijhk} + R_{jhik} + R_{hijk} = 0.$$

Da queste identità segue che le componenti indipendenti del tensore di curvatura di Riemann di una varietà riemanniana n -dimensionale sono solo (!)

$$N = \frac{1}{12} n^2(n^2 - 1).$$

In particolare:

- per $n = 2$: $N = 1$ (R_{1212});
- per $n = 3$: $N = 6$ ($R_{1212}, R_{1213}, R_{1223}, R_{2323}, R_{1313}, R_{1323}$);
- per $n = 4$: $N = 20$; per $n = 5$: $N = 50$; ...

Inoltre, per ogni $p \in U$,

$$R(e_{ip}, e_{jp}, e_{kp}, e_{hp}) = R_{ijkh}(p)$$

sono le componenti del tensore di curvatura di Riemann definito su $T_p M$. Ora, esprimiamo le componenti $R_{ij k}^h$ del tensore di curvatura, rispetto a una base coordinata $\{\partial_i = \partial/\partial x_i\}_{i=1, \dots, n}$, in funzione dei coefficienti g_{ij} della metrica riemanniana g . Siccome i *coefficienti di Christoffel* Γ_{ij}^k sono definiti da $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k$, si ha

$$\begin{aligned}
R(\partial_i, \partial_j) \partial_k &= -\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k + \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_k \\
&= -\nabla_{\partial_i} \left(\sum_{h=1}^n \Gamma_{jk}^h \partial_h \right) + \nabla_{\partial_j} \left(\sum_{r=1}^n \Gamma_{ik}^r \partial_r \right) \\
&= -\sum_{h=1}^n (\partial_i \Gamma_{jk}^h \partial_h + \Gamma_{jk}^h \nabla_{\partial_i} \partial_h) + \sum_{r=1}^n (\partial_j \Gamma_{ik}^r \partial_r + \Gamma_{ik}^r \nabla_{\partial_j} \partial_r) \\
&= -\sum_{s=1}^n \partial_i \Gamma_{jk}^s \partial_s - \sum_{h,s=1}^n \Gamma_{jk}^h \Gamma_{ih}^s \partial_s + \sum_{s=1}^n \partial_j \Gamma_{ik}^s \partial_s + \sum_{h,s=1}^n \Gamma_{ik}^h \Gamma_{jh}^s \partial_s \\
&= \sum_{s=1}^n (\partial_j \Gamma_{ik}^s - \partial_i \Gamma_{jk}^s) \partial_s + \sum_{s=1}^n \left(\sum_{h=1}^n \Gamma_{ik}^h \Gamma_{jh}^s - \sum_{h=1}^n \Gamma_{jk}^h \Gamma_{ih}^s \right) \partial_s \\
&= \sum_{s=1}^n \left\{ (\partial_j \Gamma_{ik}^s - \partial_i \Gamma_{jk}^s) + \sum_{h=1}^n (\Gamma_{ik}^h \Gamma_{jh}^s - \Gamma_{jk}^h \Gamma_{ih}^s) \right\} \partial_s.
\end{aligned}$$

D'altronde $R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = \sum_{s=1}^n R_{ijk}^s \partial_s$, perciò

$$R_{ijk}^s = (\partial_j \Gamma_{ik}^s - \partial_i \Gamma_{jk}^s) + \sum_{h=1}^n (\Gamma_{ik}^h \Gamma_{jh}^s - \Gamma_{jk}^h \Gamma_{ih}^s). \quad (8.5)$$

A questo punto basterà esprimere i coefficienti di Christoffel in funzione delle g_{ij} . Dall'equazione che definisce la connessione di Levi-Civita ∇ , posto $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$, $Z = \partial_l$ e moltiplicando ambo i membri per g^{lr} , si ottiene:

$$\left(\sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k g_{kl} \right) g^{lr} = (1/2) (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) g^{lr} \quad \forall l, r = 1, \dots, n.$$

Sommando rispetto all'indice l , siccome $\sum_{l=1}^n g_{kl} g^{lr} = \delta_{kr}$, si ha:

$$\Gamma_{ij}^r = (1/2) \sum_{l=1}^n \{ \partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij} \} g^{lr}. \quad (8.6)$$

Sostituendo la (8.6) nella (8.5), si ottiene l'espressione delle componenti del tensore R in funzione dei coefficienti g_{ij} della metrica g .

C'è un'altra importante identità soddisfatta dal tensore di curvatura R , denominata *seconda identità di Bianchi*, che coinvolge il tensore ∇R , pensato come tensore di tipo (1,4) e definito come segue:

$$(\nabla R)(X, Y, Z, V) := (\nabla_V R)(X, Y, Z) = \nabla_V R(X, Y)Z - R(\nabla_V X, Y)Z - R(X, \nabla_V Y)Z - R(X, Y)\nabla_V Z.$$

Lo stesso ∇R , inteso come tensore di tipo (0,5), è definito da:

$$\begin{aligned} (\nabla R)(X, Y, Z, V, W) &:= g((\nabla R)(X, Y, Z, V), W) \\ &= g((\nabla_V R)(X, Y, Z), W). \end{aligned}$$

Derivando R come tensore di tipo (0,4), si ha:

$$(\nabla_V R)(X, Y, Z, W) = g((\nabla_V R)(X, Y, Z), W),$$

dove R al secondo membro è di tipo (1,3). Tenendo conto che

$$\begin{aligned} (\nabla_V R)(X, Y, Z, W) &:= \nabla_V R(X, Y, Z, W) - R(\nabla_V X, Y, Z, W) \\ &\quad - R(X, \nabla_V Y, Z, W) - R(X, Y, \nabla_V Z, W) - R(X, Y, Z, \nabla_V W), \end{aligned}$$

si verifica facilmente che $\nabla_V R$ gode delle stesse proprietà di R :

$$\begin{aligned} (\nabla_V R)(X, Y, Z, W) &= -(\nabla_V R)(Y, X, Z, W) \\ &= -(\nabla_V R)(X, Y, W, Z) \\ &= (\nabla_V R)(Z, W, X, Y). \end{aligned}$$

Se fissiamo una base locale $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ di $\mathfrak{X}(M)$, è possibile esprimere le componenti $\nabla_h R_{ij k}^r$ del tensore ∇R del tipo (1,4) nel modo seguente:

$$(\nabla R)(e_i, e_j, e_k, e_h) := (\nabla_{e_h} R)(e_i, e_j, e_k) = \sum_{r=1}^n (\nabla_h R_{ij k}^r) e_r, \quad (8.7)$$

mentre il tensore ∇R di tipo (0,5) ha componenti locali $\nabla_h R_{ij ks}$ definite da

$$\begin{aligned} \nabla_h R_{ij ks} &:= (\nabla R)(e_i, e_j, e_k, e_h, e_s) \\ &= g((\nabla R)(e_i, e_j, e_k, e_h), e_s) \\ &= g((\nabla_{e_h} R)(e_i, e_j, e_k), e_s) \\ &= \sum_{r=1}^n \nabla_h R_{ij k}^r g_{rs}. \end{aligned}$$

Proposizione 8.12 (*2ª identità di Bianchi*). *Per ogni $X, Y, Z, V \in \mathfrak{X}(M)$, la derivata covariante del tensore di curvatura soddisfa la seguente identità:*

$$(\nabla_Z R)(X, Y, V) + (\nabla_X R)(Y, Z, V) + (\nabla_Y R)(Z, X, V) = 0. \quad (8.8)$$

In coordinate locali la (8.8) assume la forma:

$$\nabla_h R_{ij k}^r + \nabla_i R_{j h k}^r + \nabla_j R_{h i k}^r = 0. \quad (8.9)$$

Dimostrazione. Proviamo la (8.8) in ogni punto p di M . Sia p un punto della varietà M e sia $(U, (x_i))$ un sistema di coordinate normali centrato in p . Ricordiamo che rispetto al sistema coordinato fissato, risulta (cfr. Osservazione 7.48):

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0 \quad \text{e} \quad g_{ij}(p) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j, k = 1, \dots, n.$$

Quindi, dalla (8.5) si ottiene

$$\begin{aligned} R_{ij k}^r(p) &= \{\partial_j \Gamma_{ik}^r - \partial_i \Gamma_{jk}^r\}(p), \\ (\partial_h R_{ij k}^r)(p) &= \{\partial_{hj}^2 \Gamma_{ik}^r - \partial_{hi}^2 \Gamma_{jk}^r\}(p). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Inoltre, dalla definizione di ∇R segue che le componenti $\nabla_h R_{ij k}^r$, rispetto alla base $e_i = \partial_i$, sono date da

$$\begin{aligned} \nabla_h R_{ij k}^r &= \partial_h R_{ij k}^r + \sum_{m=1}^n \Gamma_{hm}^r R_{ij k}^m \\ &\quad - \sum_{m=1}^n \left\{ \Gamma_{hk}^m R_{ijm}^r + \Gamma_{hj}^m R_{imk}^r + \Gamma_{hi}^m R_{mjk}^r \right\}, \end{aligned}$$

e quindi

$$(\nabla_h R_{ij k}^r)(p) = (\partial_h R_{ij k}^r)(p) = \{\partial_{hj}^2 \Gamma_{ik}^r - \partial_{hi}^2 \Gamma_{jk}^r\}(p).$$

Allora, nel punto p , risulta:

$$\begin{aligned} (\nabla_h R_{ij k}^r + \nabla_i R_{j h k}^r + \nabla_j R_{h i k}^r)(p) &= (\partial_{hj}^2 \Gamma_{ik}^r - \partial_{hi}^2 \Gamma_{jk}^r + \partial_{ih}^2 \Gamma_{jk}^r \\ &\quad - \partial_{ij}^2 \Gamma_{hk}^r + \partial_{ji}^2 \Gamma_{hk}^r - \partial_{jh}^2 \Gamma_{ik}^r)(p) = 0. \end{aligned}$$

□

Osservazione 8.13. Rispetto a un fissato sistema di coordinate normali centrato in p , vale $(\partial_k g_{ij})(p) = 0$. Allora, dalla (8.10) e dalla (8.6), si ricava la formula:

$$R_{ij k}^r(p) = (1/2) \{ \partial_{jk}^2 g_{ir} + \partial_{ir}^2 g_{jk} - \partial_{ik}^2 g_{jr} - \partial_{jr}^2 g_{ik} \}(p),$$

dove il tensore di curvatura appare come una sorta di “accelerazione” della metrica.

Teorema 8.14. *Il tensore di curvatura di Riemann e la sua derivata covariante sono invarianti per isometrie. Più precisamente, se $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ è un'isometria e R, \tilde{R} sono i rispettivi tensori di curvatura di Riemann, si ha:*

- a) $f_*(R(X, Y)Z) = \tilde{R}(f_*X, f_*Y)f_*Z$;
- b) $f^*\tilde{R} = R$ (\tilde{R}, R come tensori di tipo (0.4));
- c) $f_*((\nabla_V R)(X, Y)Z) = (\tilde{\nabla}_{f_*V}\tilde{R})(f_*X, f_*Y)f_*Z$;
- d) $f^*\tilde{\nabla}\tilde{R} = \nabla R$ (come tensori di tipo (0.5)).

Dimostrazione. a) Basta osservare che, essendo f un'isometria, si ha

$$f_*\nabla_X\nabla_Y Z = \tilde{\nabla}_{f_*X}f_*\nabla_Y Z = \tilde{\nabla}_{f_*X}\tilde{\nabla}_{f_*Y}f_*Z.$$

b) Poiché f è un'isometria, risulta $\tilde{g}(f_*X, f_*Y) \circ f = g(X, Y)$, e quindi, la a) implica:

$$\begin{aligned} (f^*\tilde{R})(X, Y, Z, V) &= \tilde{R}(f_*X, f_*Y, f_*Z, f_*V) \circ f \\ &= \tilde{g}(\tilde{R}(f_*X, f_*Y)f_*Z, f_*V) \circ f \\ &= \tilde{g}(f_*R(X, Y)Z, f_*V) \circ f \\ &= g(R(X, Y)Z, V) = R(X, Y, Z, V). \end{aligned}$$

c) Questa identità si ottiene applicando, nell'ordine, la definizione di $\nabla_V R$ e l'invarianza per isometrie della connessione di Levi-Civita e del tensore di curvatura.

d) Quest'ultima identità segue dalla c). Infatti:

$$\begin{aligned} (f^*\tilde{\nabla}\tilde{R})(X, Y, Z, V, W) &= (\tilde{\nabla}\tilde{R})(f_*X, f_*Y, f_*Z, f_*V, f_*W) \circ f \\ &= \tilde{g}((\tilde{\nabla}_{f_*V}\tilde{R})(f_*X, f_*Y)f_*Z, f_*W) \circ f \\ &= \tilde{g}(f_*((\nabla_V R)(X, Y)Z), f_*W) \circ f \\ &= g((\nabla_V R)(X, Y)Z, W) \\ &= (\nabla R)(X, Y, Z, V, W). \end{aligned}$$

□

Osservazione 8.15. Il Teorema 8.14 vale anche nell'ipotesi in cui f sia un'isometria locale (in tal caso si considerano campi vettoriali locali). Inoltre, anche le derivate covarianti successive di R sono invarianti per isometrie.

8.3 La curvatura sezionale

Preliminari algebrici

Prima di definire il concetto di *curvatura sezionale* per una varietà riemanniana, è opportuno fare alcune considerazioni di carattere algebrico sul tensore di curvatura.

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita $n \geq 2$.

Definizione 8.16. Si dice *tensore di curvatura* su V ogni tensore R di tipo $(0, 4)$ su V , quindi $R : V \times V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ multilineare, che verifica le seguenti condizioni:

- i) $R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_2, v_3, v_1, v_4) + R(v_3, v_1, v_2, v_4) = 0$,
- ii) $R(v_1, v_2, v_3, v_4) = -R(v_2, v_1, v_3, v_4) = -R(v_1, v_2, v_4, v_3)$.

Si noti che da i) e ii) segue anche (cfr. Dim. della Proposizione 8.10):

- iii) $R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_3, v_4, v_1, v_2)$.

Proposizione 8.17. Siano R e T due tensori di curvatura su V . Allora,

$$R(v_1, v_2, v_1, v_2) = T(v_1, v_2, v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \implies R = T.$$

Dimostrazione. Senza perdere di generalità assumiamo $T = 0$ (basterà poi considerare $R' = R - T$ e $T' = 0$ al posto di R e T). In queste ipotesi, dimostrare la proposizione significa provare

$$R(v_1, v_2, v_1, v_2) = 0 \quad \forall v_1, v_2 \in V \implies R = 0.$$

Per ogni $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$, si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= R(v_1, v_2 + v_4, v_1, v_2 + v_4) \\ &= R(v_1, v_2, v_1, v_2) + 2R(v_1, v_2, v_1, v_4) + R(v_1, v_4, v_1, v_4) \\ &= 2R(v_1, v_2, v_1, v_4), \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} 0 &= R(v_1 + v_3, v_2, v_1 + v_3, v_4) \\ &= R(v_1, v_2, v_1 + v_3, v_4) + R(v_3, v_2, v_1 + v_3, v_4) \\ &= R(v_1, v_2, v_1, v_4) + R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_3, v_2, v_1, v_4) \\ &\quad + R(v_3, v_2, v_3, v_4) \\ &= R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_3, v_2, v_1, v_4) \\ &= R(v_1, v_2, v_3, v_4) - R(v_2, v_3, v_1, v_4). \end{aligned}$$

In definitiva, per ogni $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$:

$$(a) \quad R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_2, v_3, v_1, v_4).$$

Scambiando v_2, v_3, v_4 con v_3, v_4, v_2 rispettivamente, la (a) diventa:

$$(b) \quad R(v_1, v_3, v_4, v_2) = R(v_3, v_4, v_1, v_2) = R(v_1, v_2, v_3, v_4).$$

Tenendo conto delle proprietà i) e iii) del tensore R , la (a) e la (b) implicano:

$$\begin{aligned} 3R(v_1, v_2, v_3, v_4) &= R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_2, v_3, v_1, v_4) + R(v_1, v_3, v_4, v_2) \\ &= R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_2, v_3, v_1, v_4) + R(v_3, v_1, v_2, v_4) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Quindi, $R = 0$. □

Supponiamo ora che lo spazio vettoriale V sia dotato di un prodotto scalare definito positivo \langle, \rangle . Per ogni $v_1, v_2 \in V$, poniamo

$$\begin{aligned} A(v_1, v_2) &:= \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - (\langle v_1, v_2 \rangle)^2 \\ &= \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 (1 - \cos^2(\widehat{v_1, v_2})) = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \sin^2(\widehat{v_1, v_2}). \end{aligned}$$

Se v_1, v_2 sono due vettori non paralleli, la quantità $(A(v_1, v_2))^{\frac{1}{2}}$ esprime la misura dell'area del parallelogramma costruito sui vettori v_1, v_2 . Sia R un fissato tensore di curvatura su V . A ogni coppia (v_1, v_2) di vettori non paralleli di V , possiamo associare lo scalare

$$K(v_1, v_2) := \frac{R(v_1, v_2, v_1, v_2)}{A(v_1, v_2)}. \quad (8.11)$$

Se i vettori v_1, v_2 sono ortonormali, risulta $K(v_1, v_2) = R(v_1, v_2, v_1, v_2)$.

Lemma 8.18. *Lo scalare $K(v_1, v_2)$, con $v_1, v_2 \in V$, verifica le seguenti condizioni:*

- i) $K(v_1, v_2) = K(v_2, v_1)$;
- ii) $K(v_1, v_2) = K(av_1, bv_2) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$;
- iii) $K(v_1, v_2) = K(v_1 + \lambda v_2, v_2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. La i) è ovvia. La ii) segue da:

$$R(av_1, bv_2, av_1, bv_2) = a^2 b^2 R(v_1, v_2, v_1, v_2), \quad A(av_1, bv_2) = a^2 b^2 A(v_1, v_2).$$

La iii) segue da:

$$\begin{aligned} R(v_1 + \lambda v_2, v_2, v_1 + \lambda v_2, v_2) &= R(v_1, v_2, v_1 + \lambda v_2, v_2) \\ &\quad + \lambda R(v_2, v_2, v_1 + \lambda v_2, v_2) \\ &= R(v_1, v_2, v_1, v_2) + \lambda R(v_1, v_2, v_2, v_2) \\ &= R(v_1, v_2, v_1, v_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(v_1 + \lambda v_2, v_2) &= \|v_1 + \lambda v_2\|^2 \|v_2\|^2 - (\langle v_1 + \lambda v_2, v_2 \rangle)^2 \\
&= \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 + \lambda^2 \|v_2\|^4 + 2\lambda \langle v_1, v_2 \rangle \|v_2\|^2 \\
&\quad - (\langle v_1, v_2 \rangle)^2 - \lambda^2 \|v_2\|^4 - 2\lambda \langle v_1, v_2 \rangle \|v_2\|^2 \\
&= \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - (\langle v_1, v_2 \rangle)^2 = A(v_1, v_2).
\end{aligned}$$

□

Proposizione 8.19. *Sia P un piano dello spazio vettoriale V e sia $\{v_1, v_2\}$ una base per P . Allora, lo scalare $K(v_1, v_2)$ dipende solo dal piano P e non dalla particolare base scelta nel piano.*

Dimostrazione. Consideriamo in P una nuova base $\{w_1, w_2\}$, allora

$$w_1 = av_1 + bv_2, \quad w_2 = cv_1 + dv_2 \quad \text{con} \quad \Delta := ad - cb \neq 0.$$

Distinguiamo i seguenti due casi.

1) Se $a \neq 0$, applicando il Lemma 8.18, per ogni $\alpha \neq 0$, si ha

$$\begin{aligned}
K(v_1, v_2) &= K(av_1, \alpha v_2) = K\left(av_1 + \frac{b}{\alpha}(\alpha v_2), \alpha v_2\right) \\
&= K(av_1 + bv_2, \alpha v_2) = K(\alpha v_2, av_1 + bv_2) \\
&= K\left(\frac{c}{a}(av_1 + bv_2) + \alpha v_2, av_1 + bv_2\right) \\
&= K\left(cv_1 + \frac{bc}{a}v_2 + \alpha v_2, w_1\right).
\end{aligned}$$

Prendendo $\alpha := d - (bc)/a = \Delta/a$, si ottiene

$$K(v_1, v_2) = K(w_2, w_1) = K(w_1, w_2).$$

2) Se $a = 0$ ($\Rightarrow b \neq 0$ e $c \neq 0$), applicando il Lemma 8.18, si ha

$$\begin{aligned}
K(v_1, v_2) &= K(cv_1, bv_2) = K\left(cv_1 + \frac{d}{b}(bv_2), bv_2\right) \\
&= K(cv_1 + dv_2, bv_2) = K(w_2, w_1) = K(w_1, w_2).
\end{aligned}$$

□

Sia

$$G(V) := \{P : P \text{ sottospazio 2-dimensionale di } V\}.$$

Al tensore di curvatura R si può associare la funzione *curvatura sezionale*

$$K : G(V) \rightarrow \mathbb{R}, \quad P \mapsto K(P) := R(v_1, v_2, v_1, v_2)/A(v_1, v_2),$$

dove $\{v_1, v_2\}$ è una base del piano P . La Proposizione 8.19 garantisce che la funzione K è ben definita, nel senso che è indipendente dalla particolare base scelta in P . In particolare prendendo una base $\{v_1, v_2\}$ ortonormale, si ha:

$$K(P) = R(v_1, v_2, v_1, v_2).$$

L'applicazione $R_0 : V \times V \times V \rightarrow V$, tale che

$$(v_1, v_2, v_3) \mapsto R_0(v_1, v_2)v_3 := \langle v_1, v_3 \rangle v_2 - \langle v_2, v_3 \rangle v_1,$$

definisce un tensore di tipo $(1, 3)$ sullo spazio vettoriale V . R_0 determina un tensore di curvatura, che indicheremo ancora con il simbolo R_0 , definito da

$$\begin{aligned} R_0(v_1, v_2, v_3, v_4) &= \langle R_0(v_1, v_2)v_3, v_4 \rangle \\ &= \langle v_1, v_3 \rangle \langle v_2, v_4 \rangle - \langle v_2, v_3 \rangle \langle v_1, v_4 \rangle. \end{aligned} \quad (8.12)$$

La funzione curvatura sezionale K_0 associata al tensore R_0 è costante su $G(V)$, più precisamente:

$$K_0(P) = 1 \text{ per ogni } P \in G(V).$$

Proposizione 8.20. *Sia R un tensore di curvatura su V e K la funzione curvatura sezionale ad esso associata. Se $K(P) = \text{cost} = c \quad \forall P \in G(V)$, allora $R = cR_0$.*

Dimostrazione. $K(P) = \text{cost} = c$ per ogni $P \in G(V)$ implica:

$$\begin{aligned} R(v_1, v_2, v_1, v_2) &= cA(v_1, v_2) = c(\langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle - \langle v_1, v_2 \rangle^2) \\ &= cR_0(v_1, v_2, v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V. \end{aligned}$$

Pertanto, applicando la Proposizione 8.17, otteniamo $R = cR_0$. \square

Osservazione 8.21. Dalla Proposizione 8.17 segue che la curvatura sezionale K determina completamente il tensore di curvatura R . Per ogni $x, y, z, w \in V$, la formula esplicita che permette di esprimere $R(x, y, z, w)$ in funzione della curvatura sezionale è la seguente:

$$\begin{aligned} 6 R(x, y, z, w) &= R(x + w, y + z, x + w, y + z) \\ &\quad - R(y + w, x + z, y + w, x + z) \\ &\quad - R(x, y + z, x, y + z) - R(y, x + w, y, x + w) \\ &\quad - R(z, x + w, z, x + w) - R(w, y + z, w, y + z) \\ &\quad + R(x, y + w, x, y + w) + R(y, z + w, y, z + w) \\ &\quad + R(z, y + w, z, y + w) + R(w, x + z, w, x + z) \\ &\quad + R(x, z, x, z) + R(y, w, y, w) \\ &\quad - R(y, z, y, z) - R(x, y, x, y). \end{aligned}$$

Osservazione 8.22. Per ogni h e k tensori su V di tipo $(0, 2)$ simmetrici, il cosiddetto prodotto di Kulkarni-Nomizu:

$$\begin{aligned} (h \odot k)(v_1, v_2, v_3, v_4) &= h(v_1, v_3)k(v_2, v_4) + h(v_2, v_4)k(v_1, v_3) \\ &\quad - h(v_1, v_4)k(v_2, v_3) - h(v_2, v_3)k(v_1, v_4) \\ &= (k \odot h)(v_1, v_2, v_3, v_4) \end{aligned}$$

definisce un tensore di curvatura su V . Inoltre, indicato con g il prodotto scalare \langle, \rangle , si ha:

$$R_0 = (1/2)g \odot g.$$

La curvatura sezionale riemanniana

Sia (M, g) una varietà riemanniana n -dimensionale e sia R il tensore di curvatura di Riemann associato alla metrica g . Per ogni fissato punto p di M , si definisce *curvatura sezionale di M in p* l'applicazione $K : G(T_p M) \rightarrow \mathbb{R}$ che ad ogni piano P dello spazio $T_p M$ associa lo scalare

$$K(p, P) := R(X_1, X_2, X_1, X_2)/A(X_1, X_2), \quad (8.13)$$

dove $\{X_1, X_2\}$ è una base di P e

$$A(X_1, X_2) := g_p(X_1, X_1)g_p(X_2, X_2) - (g_p(X_1, X_2))^2.$$

Lo scalare $K(p, P)$, detto *curvatura sezionale di M in p lungo il piano P* , dipende solo dal piano e non dalla particolare base scelta (cfr. Proposizione 8.19). Dal Teorema 8.14 segue che la curvatura sezionale è invariante per isometrie (locali), nel senso che se f è un'isometria (locale) di M , allora per ogni $p \in M$ e per ogni $P \in G(T_p M)$:

$$K(p, P) = K(f(p), f_*P).$$

Definizione 8.23. Una varietà riemanniana (M, g) si dice che ha curvatura sezionale costante se la sua funzione curvatura sezionale K risulta costante, cioè

$$K(p, P) = k_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall p \in M \quad \text{e} \quad \forall P \in G(T_p M).$$

Teorema 8.24. *La curvatura sezionale di una varietà riemanniana determina completamente il tensore di curvatura di Riemann.*

Dimostrazione. Per ogni punto p in M e comunque prendiamo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, si ha $R(X, Y, Z, W)(p) = R(X_p, Y_p, Z_p, W_p)$. D'altronde, dall'Osservazione 8.21 segue che $R(X_p, Y_p, Z_p, W_p)$ è completamente determinato dalla curvatura sezionale lungo piani P dello spazio $T_p M$. Pertanto, possiamo concludere che la curvatura sezionale di una varietà riemanniana determina in modo univoco il tensore di curvatura di Riemann. \square

Esercizio 8.25. Si verifichi che il tensore di curvatura di Riemann R di una varietà riemanniana prodotto $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ è dato dalla formula:

$$R_p(X, Y, Z, W) = R_{1p_1}(X_1, Y_1, Z_1, W_1) + R_{2p_2}(X_2, Y_2, Z_2, W_2),$$

dove $p = (p_1, p_2)$ è un punto di $M_1 \times M_2$, X_i è la proiezione di X su M_i e R_{ip_i} è il tensore di curvatura di M_i nel punto p_i ($i = 1, 2$). Si concluda che una metrica riemanniana prodotto ha molte curvatures sezionali nulle.

Esempio 8.26. Sia G un gruppo di Lie munito di una metrica bi-invariante g . Ricordiamo che la connessione di Levi-Civita associata a g è data dalla (6.10), ossia $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$ per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$. Pertanto, dalla definizione di tensore di curvatura tenendo anche conto dell'identità di Jacobi, si ottiene

$$R(X, Y)Z = (1/4)[[X, Y], Z] = (1/4)ad_{[X, Y]}Z \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Inoltre vale la (5.3), ossia $g([X, Y], Z) = g(X, [Y, Z])$ per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Di conseguenza, il tensore di curvatura di Riemann è dato da

$$R(X, Y, Z, V) = (1/4)g([X, Y], Z, V) = g([X, Y], [Z, V])$$

per ogni $X, Y, Z, V \in \mathfrak{g}$. In particolare, se $X, Y \in \mathfrak{g}$ sono ortonormali, per la curvatura sezionale abbiamo

$$K(X, Y) = (1/4)\|[X, Y]\|^2 \geq 0.$$

La curvatura nella disuguaglianza isoperimetrica

Un interessante studio in cui appare in modo naturale la curvatura è quello delle disuguaglianze isoperimetriche. Tale studio trae origine dal classico problema isoperimetrico: *“tra tutte le curve chiuse semplici γ del piano (euclideo) che hanno la stessa lunghezza L , qual'è quella che racchiude un dominio di area massima?”* Se γ ha lunghezza L e racchiude un dominio di area A , allora la classica disuguaglianza isoperimetrica è data da:

$$L^2 \geq 4\pi A,$$

dove l'uguaglianza vale se, e solo se, γ è una circonferenza. In questa disuguaglianza la curvatura apparentemente non compare in quanto il piano euclideo ha curvatura gaussiana nulla. Se γ è una curva chiusa semplice della sfera $\mathbb{S}^2(R)$ di raggio R , la curvatura gaussiana $K = 1/R^2 > 0$ appare esplicitamente. Infatti, in tal caso, la disuguaglianza isoperimetrica diventa

$$(*) \quad L^2 \geq 4\pi A - A^2/R^2,$$

dove l'uguaglianza vale se, e solo se, γ è una circonferenza (e quindi un parallelo della sfera $\mathbb{S}^2(R)$). Si noti che una curva chiusa semplice della sfera $\mathbb{S}^2(R)$ delimita due domini D_1, D_2 con $A_2 = 4\pi R^2 - A_1$, dove $A_1 = \text{area}(D_1)$ e $A_2 = \text{area}(D_2)$. È interessante notare che la (*) vale per entrambi i domini D_1, D_2 . Infatti, si verifica facilmente che:

$$4\pi A_1 - A_1^2/R^2 = 4\pi(4\pi R^2 - A_1) - (4\pi R^2 - A_1)^2/R^2.$$

Quindi se (*) vale per uno dei due domini, allora vale anche per l'altro.

Più in generale, la disuguaglianza isoperimetrica (*) la si può estendere al caso di una varietà riemanniana $M^2(K)$ di dimensione 2, semplicemente connessa e a curvatura sezionale costante $K \in \mathbb{R}$. Sia D un dominio aperto di $M^2(K)$ la cui frontiera è una curva chiusa semplice γ . Se D ha area A e γ ha lunghezza L , allora

$$L^2 \geq 4\pi A - A^2 K,$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se D è un disco geodetico.

Ci sono molte generalizzazioni e formulazioni geometriche di questa disuguaglianza (cfr. [21], [80]).

Chiudiamo questa sezione enunciando tre importanti teoremi che evidenziano l'influenza della curvatura sulla topologia della varietà (cfr. [32], p. 206, 262, 149).

• **Teorema** [di Synge] *Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione n compatta e con curvatura sezionale positiva.*

- a) *Se M è orientabile e n è pari, allora M è semplicemente connessa.*
 b) *Se n è dispari, allora M è orientabile.*

• **Teorema** [di Preissman] *Una varietà riemanniana di dimensione n compatta con curvatura sezionale negativa ha gruppo fondamentale $\pi_1(M)$ non abeliano. In particolare, il toro n -dimensionale $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ (il cui gruppo fondamentale è \mathbb{Z}^n) non ammette metriche con curvatura sezionale < 0 .*

• **Teorema** [di Hadamard] *Una varietà riemanniana (M, g) completa semplicemente connessa di dimensione n e con curvatura sezionale non positiva è diffeomorfa a \mathbb{R}^n . Più precisamente, l'applicazione esponenziale $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ è un diffeomorfismo.*

8.4 Il tensore di curvatura di sottovarietà riemanniane

In questa sezione usiamo le notazioni introdotte nella Sezione 6.7. Sia quindi (M, g) una sottovarietà riemanniana di (\bar{M}, \bar{g}) . Indichiamo con \bar{R} il tensore di curvatura di (\bar{M}, \bar{g}) e con R il tensore di curvatura di (M, g) . Siano $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Applicando l'equazione di Gauss (6.19) e l'equazione di Weingarten (6.23), otteniamo

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= -\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z + \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z + \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z \\ &= -\bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + \alpha(Y, Z)) + \bar{\nabla}_Y (\nabla_X Z + \alpha(X, Z)) \\ &\quad + \nabla_{[X, Y]} Z + \alpha([X, Y], Z) \\ &= -\nabla_X \nabla_Y Z - \alpha(X, \nabla_Y Z) - \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) + S_{\alpha(Y, Z)} X \\ &\quad + \nabla_Y \nabla_X Z + \alpha(Y, \nabla_X Z) + \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z) - S_{\alpha(X, Z)} Y \\ &\quad + \nabla_{[X, Y]} Z + \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(\nabla_Y X, Z). \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + S_{\alpha(Y, Z)} X - S_{\alpha(X, Z)} Y \\ &\quad + (\nabla'_Y \alpha)(X, Z) - (\nabla'_X \alpha)(Y, Z), \end{aligned} \tag{8.14}$$

dove

$$(\nabla'_X \alpha)(Y, Z) = \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$$

è la derivata covariante di α (la derivata di Bortolotti di α). Dall'equazione (8.14), considerando le componenti tangenti, si ottiene l'equazione di curvatura di Gauss:

$$R(X, Y)Z = (\bar{R}(X, Y)Z)^\top + S_{\alpha(X, Z)}Y - S_{\alpha(Y, Z)}X, \quad (8.15)$$

equivalentemente:

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= \bar{R}(X, Y, Z, W) \\ &\quad + \bar{g}(S_{\alpha(X, Z)}Y, W) - \bar{g}(S_{\alpha(Y, Z)}X, W). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Troviamo ora la relazione tra le curvatures sezionali di M e \bar{M} . Dalla (8.16), si ha

$$\begin{aligned} R(X, Y, X, Y) &= \bar{R}(X, Y, X, Y) + \bar{g}(S_{\alpha(X, X)}Y, Y) - \bar{g}(S_{\alpha(Y, X)}X, Y) \\ &= \bar{R}(X, Y, X, Y) + \bar{g}(\alpha(X, X), \alpha(Y, Y)) - \|\alpha(X, Y)\|^2. \end{aligned}$$

Fissata una base ortonormale locale $\{\xi_a\}_{a=1, \dots, k=\bar{n}-n}$ di $\mathfrak{X}(M)^\perp$ e posto $S_a = S_{\xi_a}$, si ha

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y) &= \sum_a \bar{g}(\alpha(X, Y), \xi_a) \xi_a = \sum_a \bar{g}(S_a X, Y) \xi_a, \\ \|\alpha(X, Y)\|^2 &= \sum_a (\bar{g}(S_a X, Y))^2, \\ \bar{g}(\alpha(X, X), \alpha(Y, Y)) &= \sum_a \bar{g}(S_a X, X) \bar{g}(S_a Y, Y). \end{aligned}$$

Quindi, se $p \in M$ e $P \in G(T_p M)$ con $\{X_p, Y_p\}$ base ortonormale di P , si ha

$$\begin{aligned} K(p, P) &= \bar{K}(p, P) + \sum_a \bar{g}(S_a X_p, X_p) \bar{g}(S_a Y_p, Y_p) \\ &\quad - \sum_a (\bar{g}(S_a X_p, Y_p))^2. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Se M è una ipersuperficie di \bar{M} , $\{E_i\}_{i=1, \dots, n}$ una base ortonormale locale di autovettori per S_ξ , $S_\xi E_i = \lambda_i E_i$, allora la (8.17) implica

$$K_{ij}(p) = \bar{K}_{ij}(p) + \lambda_i(p) \lambda_j(p), \quad (8.18)$$

dove $K_{ij}(p)$ (rispettivamente $\bar{K}_{ij}(p)$) è la curvatura sezionale di M (rispettivamente di \bar{M}) in p lungo il piano generato dai vettori E_i, E_j . In particolare, dall'equazione (8.18) segue il

Teorema 8.27. (Theorema Egregium di Gauss) *Sia M una superficie di \mathbb{R}^3 con la metrica indotta. Allora, la curvatura sezionale è data da $K(p) = \lambda_1(p) \lambda_2(p)$ (prodotto delle curvatures principali).*

Infatti, il prodotto delle curvatures principali è la curvatura gaussiana della superficie, e quindi la curvatura gaussiana è un invariante intrinseco della superficie.

Osservazione 8.28. Nel caso di una ipersuperficie regolare M di \mathbb{R}^{n+1} con la metrica indotta, l'equazione di curvatura di Gauss (8.15) diventa la (8.3). Infatti, in questo caso particolare: il tensore di curvatura dello spazio euclideo è nullo, $\alpha(X, Z) = g(SX, Z)\xi$, $S = S_\xi$ e

$$S_{\alpha(X,Z)}Y = -(\nabla_Y^0 g(SX, Z)\xi)^\top = g(SX, Z)SY.$$

Interpretazione geometrica della curvatura sezionale

Sia (M, g) una varietà riemanniana n -dimensionale. Fissato un punto $p \in M$, consideriamo un piano P dello spazio T_pM e un intorno normale U del punto p del tipo $U = \exp_p(B(0, \delta))$, con $B(0, \delta)$ intorno sferico dell'origine in T_pM . L'insieme $\Sigma_p := \exp_p(B(0, \delta) \cap P)$ costituito da tutte le geodetiche γ di M uscenti dal punto p e tangenti ai vettori $X_p \in P$, cioè tali che $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) \in P \subset T_pM$, è una sottovarietà 2-dimensionale di M contenente p . Su Σ_p si considera la metrica riemanniana h indotta da g , ossia $h = i^*g$, dove $i : \Sigma_p \hookrightarrow M$. Le geodetiche γ di M uscenti dal punto p e tangenti ai vettori $X_p \in P$ sono curve di Σ_p e quindi geodetiche di Σ_p , di conseguenza la seconda forma fondamentale di Σ_p si annulla nel punto p (cfr. Proposizione 6.67). Allora, la (8.16) implica che

$$K(p, P) = \text{curvatura gaussiana di } \Sigma_p \text{ in } p,$$

ossia: *la curvatura gaussiana della superficie Σ_p nel punto p è esattamente la curvatura sezionale della varietà riemanniana M in p lungo il piano P .* Questo è il modo in cui Riemann introdusse la curvatura sezionale per varietà di dimensione maggiore di due.

La curvatura sezionale ha anche la seguente interpretazione geometrica. Fissato $p \in M$, se $V, W \in T_pM$ sono vettori unitari con angolo convesso ϑ , allora vale la seguente formula (cfr., ad esempio, [36] p.180)

$$d(\exp_p(tV), \exp_p(tW)) = \sqrt{2(1 - \cos \vartheta)}t \left(1 - \frac{\kappa \cos^2(\vartheta/2)}{6}t^2 + O(t^4) \right),$$

dove κ è la curvatura sezionale in p lungo il piano $P = \text{span}(V, W)$. Quindi, se la curvatura sezionale è positiva le geodetiche tendono a convergere (come nel caso della sfera), mentre se la curvatura sezionale è negativa le geodetiche tendono a divergere (come nel caso dello spazio iperbolico). Inoltre, siccome l'applicazione esponenziale in un fissato punto commuta con le isometrie locali (cfr. Proposizione 7.31), dalla precedente formula segue in particolare il *Theorema Egregium di Gauss*, ossia la curvatura gaussiana è invariante per isometrie locali.

8.5 La curvatura determina la metrica?

Nella Sezione 8.2 abbiamo visto che la metrica riemanniana g determina completamente la sua curvatura, vogliamo ora analizzare la questione inversa, cioè stabilire se la conoscenza della curvatura di una varietà riemanniana determina la metrica. Consideriamo due varietà riemanniane n -dimensionali M e \tilde{M} e due punti $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$. Sia inoltre $F : T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ un'isometria lineare (trasformazione ortogonale) e $U \subset M$ un intorno normale di p , tale che $\exp_{\tilde{p}}$ sia definita su $F(\exp_p^{-1}(U))$. Definiamo l'applicazione

$$f : U \xrightarrow{\exp_p^{-1}} T_p M \xrightarrow{F} T_{\tilde{p}} \tilde{M} \xrightarrow{\exp_{\tilde{p}}} \tilde{M}, \quad q \mapsto f(q) := (\exp_{\tilde{p}} \circ F \circ \exp_p^{-1})(q).$$

In particolare risulta $\tilde{p} = f(p)$. Problema: quando f (indotta da F) è un'isometria (locale)?

Per ogni fissato $q \in U$, consideriamo la geodetica normalizzata $\gamma : [0, t] \rightarrow M$ tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma(t) = q$. Indichiamo con τ_t lo spostamento parallelo lungo γ da p a q , con $\tilde{\tau}_t$ lo spostamento parallelo lungo la geodetica normalizzata $\tilde{\gamma} : [0, t] \rightarrow \tilde{M}$, tale che $\tilde{\gamma}(0) = f(p) = \tilde{p}$ e $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = F(\dot{\gamma}(0))$, e consideriamo l'applicazione

$$\Phi_t : T_q M \rightarrow T_{f(q)} \tilde{M}, \quad \Phi_t(v) := \tilde{\tau}_t \circ F \circ \tau_t^{-1}(v) \quad \forall v \in T_q M,$$

che, per come è stata definita, è un'isometria lineare. Siano infine R e \tilde{R} i tensori di curvatura di M e \tilde{M} rispettivamente. Con le notazioni appena introdotte possiamo enunciare il seguente teorema (cfr. [32], p.156).

Teorema 8.29 (di E. Cartan). *Se Φ_t conserva la curvatura, cioè se per ogni punto q di U e per ogni $V_1, V_2, V_3, V_4 \in T_q M$ risulta*

$$g_q(R(V_1, V_2)V_3, V_4) = \tilde{g}_{f(q)}(\tilde{R}(\Phi_t(V_1), \Phi_t(V_2))\Phi_t(V_3), \Phi_t(V_4)),$$

*allora: $f : U \rightarrow f(U) \subset \tilde{M}$ è un'isometria e $f_{*p} = F$.*

Il Teorema di Cartan implica che la metrica è in un certo senso determinata localmente dalla curvatura. Se \exp_p e $\exp_{\tilde{p}}$ sono diffeomorfismi definiti globalmente, allora $f : M \rightarrow \tilde{M}$ è un'isometria.

Corollario 8.30. (cfr. [32], p. 158) *Siano M e \tilde{M} due varietà riemanniane aventi stessa curvatura sezionale costante c e stessa dimensione n . Siano inoltre p e \tilde{p} due punti di M e \tilde{M} rispettivamente. Scegliamo $\{e_i\}$ base ortonormale di $T_p M$ e $\{\tilde{e}_i\}$ base ortonormale di $T_{\tilde{p}} \tilde{M}$. Allora, esistono U intorno di p in M , \tilde{U} intorno di \tilde{p} in \tilde{M} e un'isometria $f : U \rightarrow \tilde{U}$ tale che $f_{*p} e_i = \tilde{e}_i$.*

Dimostrazione. Scegliamo l'isometria F del Teorema di Cartan definita da $F(e_i) = \tilde{e}_i$ per ogni i . Siccome M e \tilde{M} hanno entrambe curvatura sezionale costante c , la condizione sulla curvatura è immediata e la conclusione segue dallo stesso Teorema di Cartan. \square

Il corollario seguente, che è un caso particolare del Corollario 8.30, evidenzia il fatto che gli spazi a curvatura sezionale costante sono ricchi di isometrie.

Corollario 8.31. *Sia M una varietà riemanniana n -dimensionale a curvatura sezionale costante e siano p e \tilde{p} due fissati punti di M . Indichiamo con $\{e_i\}$ e $\{v_i\}$ due basi ortonormali rispettivamente dello spazio T_pM e dello spazio $T_{\tilde{p}}M$. Allora, esistono U intorno di p , \tilde{U} intorno di \tilde{p} e $f : U \rightarrow \tilde{U}$ isometria tale che $f_{*p}e_i = v_i$ per ogni i .*

Siano (M, g) e (\tilde{M}, \tilde{g}) due varietà riemanniane e siano K e \tilde{K} le corrispondenti curvatures sezionali. Strettamente connesso al Teorema di Cartan è il problema di stabilire se un diffeomorfismo $f : M \rightarrow \tilde{M}$ che conserva la curvatura, cioè tale che per ogni punto p di M e per ogni sezione piana P di T_pM risulti $K(p, P) = \tilde{K}(f(p), f_*P)$, è un'isometria. La risposta a tale questione è, in generale, non affermativa, ad esempio un diffeomorfismo tra due varietà riemanniane aventi la stessa curvatura sezionale costante, conserva la curvatura pur non essendo un'isometria. Il seguente esempio mostra che, nel caso 2-dimensionale, la questione precedente non ha risposta positiva anche qualora lo spazio fosse compatto. Consideriamo la superficie $M_a = \{x^2 + y^2 = 1, -a \leq z \leq a\} \cup \{x^2 + y^2 + (z - a)^2 = 1, z \geq a\} \cup \{x^2 + y^2 + (z + a)^2 = 1, z \leq -a\}$, dove $a > 0$, e la superficie M_b con $b > a$. La superficie M_b è ottenuta da M_a dilatando il tratto cilindrico. Le superfici considerate sono varietà riemanniane compatte 2-dimensionali (aventi stesso diametro ma diversa lunghezza), diffeomorfe e con la medesima curvatura in punti corrispondenti, ma chiaramente non sono isometriche (infatti, nel tratto dilatato le distanze non vengono conservate, cfr. Figura 8.5).

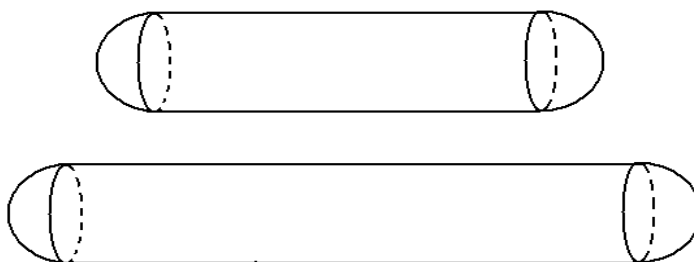


Figura 8.5: Le superfici M_a e M_b .

Tuttavia, i casi precedenti sono casi eccezionali. Infatti, R.S. Kulkarni [61] mostrò il seguente teorema.

Teorema 8.32. *Sia M è una varietà riemanniana analitica di dimensione $n \geq 4$. Allora, o M ha curvatura sezionale costante oppure ogni diffeomorfismo che conserva la curvatura è un'isometria.*

Se $\dim M = n \geq 3$, abbiamo anche il seguente risultato di S.T. Yau [127].

Teorema 8.33. *Sia $f : M \rightarrow \tilde{M}$ un diffeomorfismo tra due varietà riemanniane di dimensione $n \geq 3$, che conserva la curvatura sezionale. Se M non ha punti a curvatura sezionale costante, allora f è un'isometria.*

Il seguente esempio mostra che nel caso 2-dimensionale, la curvatura non determina la metrica (nemmeno localmente).

Esempio 8.34. Siano date le seguenti superfici di \mathbb{R}^3 , entrambe munite della metrica riemanniana indotta da quella euclidea, e parametrizzate da

$$\begin{aligned} M_1 : \phi_1(t, \vartheta) &= (t \cos \theta, t \sin \theta, \log t), \\ M_2 : \phi_2(t, \vartheta) &= (t \cos \theta, t \sin \theta, \theta), \end{aligned}$$

con $t > 0$ e $\theta \in]0, 2\pi[$. L'applicazione

$$\phi = \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : (t \cos \theta, t \sin \theta, \log t) \mapsto (t \cos \theta, t \sin \theta, \theta),$$

è un diffeomorfismo che, pur conservando la curvatura, non è un'isometria.

8.6 Spazi a curvatura sezionale costante

Ricordiamo che una varietà riemanniana (M, g) si dice che ha curvatura sezionale costante se la sua funzione curvatura sezionale $K(p, P) = \text{cost.} = k_0 \in \mathbb{R}$ per ogni $p \in M$ e per ogni $P \in G(T_p M)$.

La seguente proposizione fornisce una caratterizzazione delle varietà riemanniane a curvatura sezionale costante.

Proposizione 8.35. *Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione n . Allora, M ha curvatura sezionale costante k_0 se, e solo se, le componenti del tensore di curvatura di Riemann R , rispetto a una base locale $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$, sono date da:*

$$R_{ij kh} = k_0 \{g_{ik} g_{jh} - g_{ih} g_{kj}\} = k_0 R_{0ij kh}, \quad (8.19)$$

dove $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ e R_0 è il tensore di curvatura definito dalla (8.12). In particolare, se $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ è una base ortonormale, dalla (8.19) segue che

$$R_{ij ij} = k_0,$$

$$R_{ij kh} = 0 \quad \text{quando almeno 3 dei 4 indici } i, j, k, h \text{ sono distinti.}$$

Dimostrazione. Sia (M, g) a curvatura sezionale costante k_0 . Allora, per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e per ogni $p \in M$, risulta:

$$\begin{aligned} R(X, Y, X, Y)(p) &= k_0 A(X, Y)(p) \\ &= k_0 \{g(X, X)(p) g(Y, Y)(p) - g(X, Y)^2(p)\} \\ &= k_0 R_0(X, Y, X, Y)(p). \end{aligned}$$

Applicando la Proposizione 8.17, si ha:

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W)(p) &= k_0 R_0(X, Y, Z, W)(p) \\ &= k_0 \{g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z)\}(p), \end{aligned}$$

e quindi
$$R_{ijkh} = k_0 \{g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk}\}.$$

Viceversa, se $R_{ijkh} = R(e_i, e_j, e_h, e_k) = k_0 R_{0ijkh}$ con k_0 costante, si ottiene facilmente che M ha curvatura sezionale costante k_0 . \square

A priori, si potrebbe pensare che esistono varietà riemanniane a curvatura sezionale puntualmente costante ma non costante, cioè tali che per ogni fissato punto $p \in M$ risulti $K(p, P) = k(p)$ per ogni piano $P \in G(T_p M)$, dove $k \in \mathcal{F}(M)$. Ciò però non è possibile come risulta dal seguente teorema.

Teorema 8.36. (di Schur) *Sia (M, g) una varietà riemanniana (connessa) di dimensione $n \geq 3$. Se (M, g) ha curvatura sezionale puntualmente costante, cioè se per ogni punto p di M :*

$$K(p, P) = k(p) \quad \forall P \in G(T_p M),$$

allora (M, g) ha curvatura sezionale $K(p, P) = \text{cost} = k_0$.

Dimostrazione. Sia (M, g) a curvatura sezionale puntualmente costante $k(p)$. Allora, per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e per ogni $p \in M$:

$$\begin{aligned} R(X, Y, X, Y)(p) &= k(p) A(X, Y)(p) \\ &= k(p) \{g(X, X)g(Y, Y)(p) - g(X, Y)^2(p)\}. \end{aligned}$$

Applicando la Proposizione 8.17, per ogni $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, si ha

$$R(X, Y, Z, W)(p) = k(p) \{g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z)\}(p),$$

e quindi

$$R(X, Y)Z = k \{g(X, Z)Y - g(Y, Z)X\}. \quad (8.20)$$

Dalla (8.20), tenendo conto della compatibilità della connessione di Levi-Civita ∇ con la metrica g , si ottiene:

$$\begin{aligned} (\nabla_V R)(X, Y, Z) &= \nabla_V R(X, Y)Z - R(\nabla_V X, Y)Z - R(X, \nabla_V Y)Z \\ &\quad - R(X, Y)\nabla_V Z \\ &= \nabla_V (kg(X, Z)Y - kg(Y, Z)X) - kg(\nabla_V X, Z)Y \\ &\quad + kg(Y, Z)\nabla_V X - k \{g(X, Z)\nabla_V Y - g(\nabla_V Y, Z)X\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -kg(X, \nabla_V Z)Y + kg(Y, \nabla_V Z)X \\
= & V(k)\{g(X, Z)Y - g(Y, Z)X\} \\
& + k\{g(\nabla_V X, Z)Y + g(X, \nabla_V Z)Y\} \\
& + kg(X, Z)\nabla_V Y - k\{g(\nabla_V Y, Z)X + g(Y, \nabla_V Z)X\} \\
& - kg(Y, Z)\nabla_V X - k\{g(\nabla_V X, Z)Y + g(X, \nabla_V Z)Y\} \\
& + k\{g(\nabla_V Y, Z)X + g(Y, \nabla_V Z)X\} \\
& + kg(Y, Z)\nabla_V X - kg(X, Z)\nabla_V Y \\
= & V(k)\{g(X, Z)Y - g(Y, Z)X\} = V(k)R_0(X, Y)Z.
\end{aligned}$$

Quindi, applicando la seconda identità di Bianchi :

$$(\nabla_V R)(X, Y, Z) + (\nabla_X R)(Y, V, Z) + (\nabla_Y R)(V, X, Z) = 0,$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
V(k)\{g(X, Z)Y - g(Y, Z)X\} + X(k)\{g(Y, Z)V - g(V, Z)Y\} \\
+ Y(k)\{g(V, Z)X - g(X, Z)V\} = 0. \quad (8.21)
\end{aligned}$$

Fissato X arbitrario campo di vettori su M , scegliamo Y e $Z = V$ in modo che risultino unitari, ortogonali tra loro e ortogonali a X . Tali campi esistono in quanto M è una varietà di dimensione $n \geq 3$. Sostituendo questa scelta nella (8.21), abbiamo $-X(k)Y + Y(k)X = 0$ e quindi

$$0 = -X(k)g(Y, Y) + Y(k)g(X, Y) = -X(k).$$

Pertanto, $X(k) = 0$, cioè $(dk)(X) = 0$, con X arbitrario. Essendo M connessa, $k = \text{cost} = k_0$ su M . \square

Teorema 8.37. *Una varietà riemanniana omogenea e isotropa ha curvatura sezionale costante. In particolare: la sfera canonica \mathbb{S}^n , lo spazio euclideo \mathbb{R}^n e lo spazio iperbolico H^n sono varietà riemanniane a curvatura sezionale costante.*

Dimostrazione. Sia M uno spazio omogeneo e isotropo (cfr. Definizione 5.13). Siano p, q punti di M , P un piano, che supponiamo generato dalla base ortonormale $\{e_1, e_2\}$, dello spazio tangente $T_p M$, e Q un piano, che supponiamo generato dalla base ortonormale $\{e'_1, e'_2\}$, di $T_q M$. Inoltre, siano $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ basi ordinate ortonormali di $T_p M$ e $T_q M$ rispettivamente. Poiché M è omogenea, esiste un'isometria f_1 di M tale che $f_1(p) = q$. Indichiamo con $\bar{\mathcal{B}} = \{v_1, \dots, v_n\}$ la base ordinata ortonormale di $T_q M$ ottenuta da \mathcal{B} mediante il differenziale $(f_1)_{*p}$. Essendo M isotropa, esiste un'isometria f_2 di M tale che $f_2(q) = p$ e $(f_2)_{*q}v_i = e'_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$. L'applicazione $f := f_2 \circ f_1$ è un'isometria che verifica le condizioni:

$$f(p) = f_2(f_1(p)) = f_2(q) = p,$$

$$f_{*p}(e_i) = (f_2)_{*q}((f_1)_{*p}(e_i)) = (f_2)_{*q}v_i = e'_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

In particolare, $f(p) = q$ e $f_{*p}(P) = Q$. Di conseguenza, applicando il Teorema 8.14 all'isometria f , risulta: $K(q, Q) = R_q(e'_1, e'_2, e'_1, e'_2)$ e quindi $K(q, Q) = R_{f(p)}(f_{*p}e_1, f_{*p}e_2, f_{*p}e_1, f_{*p}e_2) = R_p(e_1, e_2, e_1, e_2) = K(p, P)$. \square

Il teorema seguente ci fornisce esplicitamente il valore della curvatura sezionale (costante) per gli spazi \mathbb{S}^n , \mathbb{R}^n , H^n .

Teorema 8.38. *Lo spazio euclideo \mathbb{R}^n , lo spazio iperbolico H^n e la sfera canonica \mathbb{S}^n hanno curvatura sezionale costante $k_0 = 0, -1, +1$ rispettivamente.*

Dimostrazione. Lo spazio euclideo ha chiaramente curvatura sezionale nulla in quanto il suo tensore di curvatura è identicamente nullo. Per la sfera canonica il risultato si può ottenere come conseguenza dell'equazione di curvatura di Gauss (8.3) e dell'equazione (6.25):

$$S_{\xi_p}X_p = -\nabla_{X_p}^0 \xi = -X_p.$$

Per lo spazio iperbolico H^n , consideriamo il modello $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ munito della metrica iperbolica $g = (1/x_n^2)(dx_1^2 + \dots + dx_n^2)$. In questo caso, come già osservato nell'Esempio 6.41, i campi vettoriali $V_i = x_n \partial_i = x_n \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, costituiscono una base ortonormale. Inoltre, per $i, j = 1, \dots, n-1$, risulta

$$[V_n, V_j] = [x_n \partial_n, x_n \partial_j] = V_j \quad \text{e} \quad [V_i, V_j] = [x_n \partial_i, x_n \partial_j] = 0.$$

Di conseguenza, la connessione di Levi-Civita associata a questa metrica è determinata, applicando la (6.9), da

$$\nabla_{V_i} V_i = V_n, \quad \nabla_{V_i} V_n = -V_i \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad \nabla_{V_j} V_i = 0 \quad (\text{rimanenti casi}).$$

Pertanto, se P_{in} è il piano generato dai vettori V_i e V_n , la curvatura sezionale $K(p, P_{in}) = g(R(V_i, V_n)V_i, V_n)$ e quindi

$$\begin{aligned} K(p, P_{in}) &= g(-\nabla_{V_i} \nabla_{V_n} V_i + \nabla_{V_n} \nabla_{V_i} V_i + \nabla_{[V_i, V_n]} V_i, V_n) \\ &= g(-\nabla_{V_i} V_i, V_n) = -g(V_n, V_n) = -1. \end{aligned}$$

Questo ci permette di concludere, tenendo anche conto del Teorema 8.37, che lo spazio iperbolico ha curvatura costante $k_0 = -1$. \square

Osservazione 8.39. Con la stessa dimostrazione del teorema precedente, si ottiene che la sfera di raggio R , con la metrica canonica, ha curvatura sezionale costante $k_0 = 1/R^2$ (basta osservare che in tal caso, l'operatore forma $SX_p = -(1/R)X_p$). Se consideriamo il semispazio $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ con la metrica iperbolica $g = (1/k^2 x_n^2)(dx_1^2 + \dots + dx_n^2)$, $k \neq 0$, i campi vettoriali $V_i = kx_n \partial_i$, $i = 1, \dots, n$, costituiscono una base ortonormale. Inoltre, per $i, j = 1, \dots, n-1$, risulta

$$[V_n, V_j] = kV_j \quad \text{e} \quad [V_i, V_j] = 0, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Quindi, procedendo come sopra, tenendo conto che metriche omotetiche hanno stessa connessione di Levi-Civita, si trova che lo spazio iperbolico (\mathbb{R}_+^n, g) ha curvatura sezionale costante $-k^2$.

Un altro modo di procedere per calcolare la curvatura dello spazio iperbolico e della sfera canonica, è applicare il seguente lemma.

Lemma 8.40. *Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n munito della metrica $g = \frac{1}{F^2}(dx_1^2 + \dots + x_n^2)$, quindi $g_{ij} = \frac{1}{F^2} \delta_{ij}$, con F funzione differenziabile positiva definita su Ω . Poniamo $f := \log F$, $f_j := \frac{\partial f}{\partial x_j}$ e $f_{kj} := \frac{\partial f_j}{\partial x_k}$. Allora, le componenti $R_{ijkh} = R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_h)$ del tensore di curvatura di (Ω, g) sono date da:*

- 1) $R_{ijkh} = 0$ se tutti e quattro gli indici sono distinti;
- 2) $F^2 R_{ijki} = -f_k f_j - f_{kj}$ se i tre indici sono distinti;
- 3) $F^2 R_{ijij} = f_{ii} + f_{jj} - \sum_{l \neq i, j} f_l^2$, $K(\partial_i, \partial_j) = \frac{R_{ijij}}{g_{ii} g_{jj}} = F^4 R_{ijij}$ ($i \neq j$).

Dimostrazione. Siccome $g_{ij} = \frac{1}{F^2} \delta_{ij}$, la matrice inversa di (g_{ij}) è definita da $g^{ij} = F^2 \delta_{ij}$. Allora:

$$\partial g_{ik} / \partial x_j = -2(F_j / F^3) \delta_{ik} = -2(f_j / F^2) \delta_{ik}$$

e i simboli di Christoffel, applicando la (8.6), sono dati da:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \{ \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \} g^{lk} \\ &= \frac{1}{2} \{ \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \} F^2 \\ &= -f_i \delta_{jk} - f_j \delta_{ki} + f_k \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Pertanto, risulta:

$$\begin{cases} \Gamma_{ij}^k = 0, & \text{se i tre indici } i, j, k \text{ sono distinti;} \\ \Gamma_{ij}^i = -f_j, \Gamma_{ii}^k = f_k, \Gamma_{ij}^j = -f_i, & \text{se solo due indici sono distinti;} \\ \Gamma_{ii}^i = -f_i. \end{cases}$$

Inoltre, le componenti $R_{ijk}{}^s$, sono date da (cfr. (8.5)):

$$R_{ijk}{}^s = (\partial_j \Gamma_{ik}^s - \partial_i \Gamma_{jk}^s) + \sum_{l=1}^n (\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s).$$

Di conseguenza, si ottiene:

$$\begin{aligned} R_{ijks} &= \sum_{r=1}^n R_{ijk}{}^r g_{rs} = \frac{1}{F^2} \sum_{r=1}^n R_{ijk}{}^r \delta_{rs} = \frac{1}{F^2} R_{ijk}{}^s \\ &= 0 \quad \text{se tutti e quattro gli indici sono distinti;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{ijk} &= \sum_{r=1}^n R_{ijk}{}^r g_{ri} = \frac{1}{F^2} R_{ijk}{}^i \\
&= \frac{1}{F^2} (\partial_j \Gamma_{ik}^i - \partial_i \Gamma_{jk}^i) + \frac{1}{F^2} \sum_{h=1}^n (\Gamma_{ik}^h \Gamma_{jh}^i - \Gamma_{jk}^h \Gamma_{ih}^i) \\
&= \frac{1}{F^2} (\partial_j \Gamma_{ik}^i + \Gamma_{ik}^i \Gamma_{ji}^i + \Gamma_{ik}^j \Gamma_{jj}^i + \Gamma_{ik}^k \Gamma_{ji}^k + \sum_{h=1}^n \Gamma_{jk}^h f_h) \\
&= \frac{1}{F^2} (-f_{kj} + f_k f_j - 2f_k f_j) \\
&= \frac{1}{F^2} (-f_{kj} - f_k f_j) \quad \text{se i tre indici } i, j, k \text{ sono distinti;}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{ijj} &= \sum_{s=1}^n R_{ijj}{}^s g_{sj} = \frac{1}{F^2} \sum_{s=1}^n R_{ijj}{}^s \delta_{sj} = \frac{1}{F^2} R_{ijj}{}^j \\
&= \frac{1}{F^2} \sum_{l=1}^n (\Gamma_{ii}^l \Gamma_{jl}^j - \Gamma_{ji}^l \Gamma_{il}^j) + \frac{1}{F^2} (\partial_j \Gamma_{ii}^j - \partial_i \Gamma_{ji}^j) \\
&= \frac{1}{F^2} \left(\sum_{l \neq i, j} \Gamma_{ii}^l \Gamma_{jl}^j + \Gamma_{ii}^i \Gamma_{ji}^j + \Gamma_{ii}^j \Gamma_{jj}^j - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ji}^l \Gamma_{il}^j + f_{ii} + f_{jj} \right) \\
&= \frac{1}{F^2} \left(- \sum_{l \neq i, j} f_l^2 + f_i^2 - f_j^2 - \Gamma_{ji}^i \Gamma_{ii}^j - \Gamma_{ji}^j \Gamma_{ij}^j + f_{ii} + f_{jj} \right) \\
&= \frac{1}{F^2} \left(- \sum_{l \neq i, j} f_l^2 + f_i^2 - f_j^2 + f_j^2 - f_i^2 + f_{ii} + f_{jj} \right) \\
&= \frac{1}{F^2} (f_{ii} + f_{jj} - \sum_{l \neq i, j} f_l^2) \quad \text{se i due indici } i, j \text{ sono distinti.}
\end{aligned}$$

Per la seconda parte di 3), basta osservare che i vettori ∂_i, ∂_j ($i \neq j$) sono ortogonali. \square

Per lo spazio iperbolico $(\mathbb{R}_+^n, g = \frac{1}{x_n^2}(dx_1^2 + \dots + x_n^2))$, $F^2 = x_n^2$, per cui

$$f = \log x_n, \quad f_i = 0 \quad \forall i \neq n, \quad f_n = \frac{1}{x_n}, \quad f_{nn} = -\frac{1}{x_n^2}.$$

Applicando la 3) del Lemma 8.40, per $i \neq j$ e $i, j \neq n$:

$$F^2 R_{ijij} = -f_n^2, \quad K(\partial_i, \partial_j) = (-f_n^2) F^2 = -\frac{1}{x_n^2} x_n^2 = -1,$$

$$F^2 R_{in in} = f_{ii} + f_{nn} = f_{nn}, \quad K(\partial_i, \partial_n) = f_{nn} F^2 = -\frac{1}{x_n^2} x_n^2 = -1.$$

Applicando la 1) e la 2) del Lemma 8.40, risulta $R_{ij\,kh} = 0$ quando almeno tre indici sono distinti. Pertanto, la Proposizione 8.35 (o il Teorema 8.37) permette di concludere che lo spazio iperbolico ha curvatura sezionale costante $k_0 = -1$.

Consideriamo ora la sfera (unitaria) \mathbb{S}^n munita della metrica canonica $g = i^*g_0$, dove g_0 è la metrica euclidea di \mathbb{R}^{n+1} e $i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Ricordiamo che, rispetto al sistema di coordinate locali (y_i) definite dalla proiezione stereografica dal polo sud, la metrica g ha la seguente espressione:

$$g = \frac{4}{(1 + \|y\|^2)^2} (dy_1^2 + \cdots + dy_n^2)$$

ed è quindi del tipo di metrica considerata nel Lemma 8.40 :

$$g_{ij} = \frac{1}{F^2} \delta_{ij}, \quad F = \frac{1 + \|y\|^2}{2} = \frac{1 + y_1^2 + \cdots + y_n^2}{2}, \quad f = \log F.$$

In questo caso:

$$f_i = y_i/F, \quad f_{ii} = (F - y_i^2)/F^2, \quad f_{ij} = -y_i y_j/F^2 \quad \text{per } i \neq j.$$

Applicando le formule del Lemma 8.40, si ottiene:

$$\begin{aligned} R_{ij\,kh} &= 0 && \text{se almeno tre indici sono distinti;} \\ F^2 R_{ij\,ij} &= f_{ii} + f_{jj} - \sum_{r \neq i,j} f_r^2 = (2F - \|y\|^2)/F^2 = 1/F^2; \\ R_{ij\,ij} &= 1/F^4 = g_{ii} g_{jj}; \quad K(\partial_i, \partial_j) = F^4 R_{ij\,ij} = 1. \end{aligned}$$

Anche in questo caso, la Proposizione 8.35 (o il Teorema 8.37) permette di concludere che \mathbb{S}^n ha curvatura sezionale costante $k_0 = +1$.

Un'interessante proprietà delle varietà riemanniane a curvatura sezionale costante ($\neq 0$) è che non ammettono campi vettoriali paralleli. Abbiamo infatti la seguente

Proposizione 8.41. *Sia (M, g) una varietà riemanniana. Se $V \in \mathfrak{X}(M)$ è un campo di vettori parallelo (non nullo), allora V ha lunghezza costante e la curvatura sezionale lungo piani contenenti V è nulla. Più precisamente: (M, g) è localmente un prodotto riemanniano del tipo $(M_1 \times \mathbb{R}, g_1 \times dt)$ con V tangente al fattore euclideo. In particolare: su una varietà riemanniana a curvatura sezionale costante $\neq 0$ non esistono campi di vettori paralleli.*

Dimostrazione. Sia V un campo di vettori parallelo (rispetto alla connessione di Levi-Civita). V ha lunghezza costante in quanto:

$$X(\|V\|^2) = 2g(\nabla_X V, V) = 0.$$

Inoltre,

$$R(V, X, V, X) = g(-\nabla_V \nabla_X V + \nabla_X \nabla_V V + \nabla_{[V, X]} V, X) = 0$$

ci dice che la curvatura sezionale lungo piani contenenti V è nulla. Ora, proviamo che (M, g) è localmente un prodotto riemanniano. Sia S_1 la distribuzione $(n-1)$ -dimensionale definita da V^\perp e sia S_2 la distribuzione 1-dimensionale definita da V . Per ogni $X, Y \in V^\perp$ si ha $\nabla_X Y \in V^\perp$, infatti $g(Y, V) = 0$ implica $Xg(Y, V) = 0$ e quindi $g(\nabla_X Y, V) = 0$. Di conseguenza, la distribuzione S_1 è involutiva (cioè, $[X, Y] \in S_1$ per ogni $X, Y \in S_1$) e quindi, per il Teorema di Frobenius, integrabile. Ovviamente, anche la distribuzione 1-dimensionale S_2 è integrabile. Siccome le distribuzioni S_1 e S_2 sono ortogonali, se M_1 è la varietà $(n-1)$ -dimensionale, varietà integrale di S_1 , allora (M, g) è localmente un prodotto riemanniano del tipo $(M_1 \times \mathbb{R}, g_1 \times dt)$ con V tangente al fattore euclideo e g_1 restrizione di g alla varietà M_1 . \square

Esercizio 8.42. Siano g e \bar{g} due metriche omotetiche su M : $\bar{g} = cg$, $c = \text{cost.} > 0$. Osservato che le connessioni di Levi-Civita ∇ e $\bar{\nabla}$ ad esse associate coincidono (cfr. Esercizio 6.50), verificare che

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z, & \bar{R}(X, Y, Z, W) &= cR(X, Y, Z, W), \\ \bar{K}(p, P) &= (1/c)K(p, P) \quad \forall p \in M \text{ e } \forall P \in G(T_p M). \end{aligned}$$

Se (M, g) è una varietà riemanniana a curvatura sezionale costante $k_0 \neq 0$, la varietà riemanniana (M, \bar{g}) , ottenuta ponendo $\bar{g} = cg$ con $c = k_0$ se $k_0 > 0$ e $c = -k_0$ se $k_0 < 0$, ha curvatura sezionale costante uguale a $+1$ oppure -1 (cfr. Esercizio 8.42). Pertanto, per ogni varietà riemanniana a curvatura sezionale costante k_0 non nulla, si può assumere, a meno di un cambio omotetico di metrica, che sia $k_0 = +1$ oppure $k_0 = -1$.

Definizione 8.43. Chiamiamo *spazio forma* ogni varietà riemanniana completa a curvatura sezionale costante k_0 .

A seconda del valore della costante k_0 possiamo distinguere tre tipologie di spazi forma: lo *spazio forma ellittico* (o *sferico*) se $k_0 > 0$, lo *spazio forma euclideo* se $k_0 = 0$ ed infine lo *spazio forma iperbolico* se $k_0 < 0$. Il teorema che segue classifica i diversi spazi forma riconducendo la questione ad un problema che rientra nella teoria dei gruppi (cfr. [120]). Individuare gli spazi forma significa infatti determinare sottogruppi G del gruppo delle isometrie che agiscono in modo propriamente discontinuo su ciascuno degli spazi semplicemente connessi \mathbb{S}^n , \mathbb{R}^n , H^n . In questo caso, l'applicazione

$$p: M \rightarrow M/G, x \mapsto p(x) = Gx,$$

(con lo spazio M/G munito della topologia quoziente), è un'applicazione di rivestimento (cfr. Sezione 5.7).

Teorema 8.44. Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione n completa a curvatura sezionale costante $k_0 \in \{-1, 0, +1\}$. Allora, il rivestimento universale riemanniano \tilde{M} di M è isometrico a uno dei seguenti spazi:

$$\mathbb{R}^n(\text{se } k_0 = 0), \quad \mathbb{S}^n(\text{se } k_0 = +1), \quad H^n(\text{se } k_0 = -1).$$

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso di M a curvatura sezionale costante $k_0 = +1$. Sia \tilde{M} il rivestimento universale riemanniano di M . Consideriamo $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ e un'isometria lineare $F : T_p\mathbb{S}^n \rightarrow T_{\tilde{p}}\tilde{M}$. L'applicazione $\exp_p : T_p\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ è definita sull'intero spazio $T_p\mathbb{S}^n$, applica iniettivamente $B(0, \pi)$ su $\mathbb{S}^n \setminus \{q\}$ e la frontiera di $B(0, \pi)$ è applicata in q , dove q è il punto antipodale di p . Definiamo

$$f = \exp_{\tilde{p}} \circ F \circ \exp_p^{-1} : \mathbb{S}^n \setminus \{q\} \rightarrow \tilde{M}.$$

Siccome \mathbb{S}^n e \tilde{M} hanno entrambe curvatura sezionale costante $+1$, la condizione sulla curvatura nel Teorema 8.29 (di Cartan) è verificata, per cui applicando lo stesso Teorema 8.29 si ha che f è un'isometria locale e $f_{*p} = F$. Fissiamo ora un punto $p' \in \mathbb{S}^n \setminus \{p, q\}$. Poniamo $\tilde{p}' = f(p')$, $F' = f_{*p'}$ e definiamo

$$f' = \exp_{\tilde{p}'} \circ F' \circ \exp_{p'}^{-1} : \mathbb{S}^n \setminus \{q'\} \rightarrow \tilde{M},$$

dove q' è il punto antipodale di p' . In particolare, $f'(p') = \tilde{p}'$. Applicando il Teorema 8.29, otteniamo che f' è un'isometria locale e $f'_{*p'} = F'$. Osserviamo che $W = \mathbb{S}^n \setminus \{q, q'\}$ è connesso, $p' \in W$, $f(p') = \tilde{p}' = f'(p')$ e $f_{*p'} = F' = f'_{*p'}$. Applicando il risultato riportato nell'Esercizio 7.37, si ha che $f = f'$ su W . Di conseguenza, possiamo definire l'applicazione

$$\phi : \mathbb{S}^n \longrightarrow \tilde{M}, \quad x \longmapsto \phi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \mathbb{S}^n \setminus \{q\}, \\ f'(x) & \text{se } x \in \mathbb{S}^n \setminus \{q'\}. \end{cases}$$

Chiaramente ϕ è un'isometria locale, quindi un diffeomorfismo locale. Dalla compattezza di \mathbb{S}^n segue che ϕ è un'applicazione di rivestimento (cfr. Proposizione 5.48) ed essendo \tilde{M} semplicemente connesso, ϕ è un diffeomorfismo e quindi un'isometria. Consideriamo ora gli altri due casi. Sia $M \in \{R^n, H^n\}$ e \tilde{M} il rivestimento universale riemanniano di M varietà riemanniana completa a curvatura sezionale costante $k_0 \leq 0$. Fissiamo i punti $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ e un'isometria lineare $F : T_pM \rightarrow T_{\tilde{p}}\tilde{M}$. Siccome M e \tilde{M} sono varietà riemanniane complete a curvatura sezionale costante $k_0 \leq 0$, applicando il Teorema 8.3 (di Hadamard), le applicazioni $\exp_p : T_pM \rightarrow M$ e $\exp_{\tilde{p}} : T_{\tilde{p}}\tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ sono diffeomorfismi globali. Consideriamo l'applicazione

$$f = \exp_{\tilde{p}} \circ F \circ \exp_p^{-1} : M \rightarrow \tilde{M}.$$

Siccome M e \tilde{M} hanno entrambe curvatura sezionale costante k_0 , dal Teorema 8.29 segue che f è un'isometria. In questo caso f è un'isometria globale in quanto f è un diffeomorfismo globale. \square

Ricordiamo che, se \tilde{M} è il rivestimento universale di M con proiezione $p : \tilde{M} \rightarrow M$, dalla teoria degli spazi di rivestimento (cfr., ad esempio, [57] pp.163-169) sappiamo che $M = \tilde{M}/\Gamma$, dove $\Gamma = \{f : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M} : p \circ f = p\}$, gruppo delle trasformazioni di rivestimento, è isomorfo a

$$\pi_1(M)/p_*(\pi_1(\tilde{M})) = \pi_1(M)$$

e agisce in modo propriamente discontinuo su \tilde{M} . In particolare, se il rivestimento è riemanniano : $\tilde{g} := p^*g$, dove g è la metrica di M , allora

$$f \in \Gamma \Rightarrow p \circ f = p \Rightarrow f^*\tilde{g} = f^*p^*g = (p \circ f)^*g = p^*g = \tilde{g},$$

cioè Γ è un sottogruppo del gruppo $\text{Iso}(\tilde{M}, \tilde{g})$ delle isometrie di \tilde{M} . Quindi, il Teorema 8.44 si può riformulare nel modo seguente.

Teorema 8.45. (Classificazione degli spazi a curvatura costante) *Sia (M, g) una varietà riemanniana n -dimensionale completa a curvatura sezionale costante $k_0 \in \{-1, 0, +1\}$. Allora, M è isometrica a \tilde{M}/Γ , dove $\tilde{M} = \mathbb{R}^n$ (se $k_0 = 0$), $\tilde{M} = \mathbb{S}^n$ (se $k_0 = +1$), $\tilde{M} = H^n$ (se $k_0 = -1$) e Γ è un gruppo propriamente discontinuo di isometrie di \tilde{M} isomorfo a $\pi_1(M)$.*

In particolare, se $k_0 > 0$ e n è pari, abbiamo il seguente teorema.

Teorema 8.46. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa di dimensione n pari e a curvatura sezionale costante $k = 1$. Allora, M è isometrica alla sfera \mathbb{S}^n oppure allo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n = \mathbb{S}^n/\{\pm I_d\}$.*

Dimostrazione. Sia $n = 2m$. Dal Teorema 8.45 segue che $M = \mathbb{S}^n/\Gamma$, dove Γ è un sottogruppo propriamente discontinuo del gruppo $\text{Iso}(\mathbb{S}^n) = O(2m+1)$. Sia $f \in \Gamma$, allora $\det f = \pm 1$. Esaminiamo le due diverse possibilità.

Caso a): $\det f = +1$. Poiché f è rappresentata da una matrice di ordine dispari, ammetterà un autovalore λ reale e dovrà essere $\lambda = \pm 1$. Se p è la molteplicità di $\lambda = +1$ e q è quella di $\lambda = -1$, dalla struttura delle matrici ortogonali segue che $2m+1 = p+q+2r$ e $\det f = (-1)^q$. Siccome $\det f = +1$, allora si ha $q = 0$ oppure q pari. In entrambi i casi, $2m+1 = p+q+2r$ implica che $p > 0$ e quindi $\lambda = +1$ è autovalore per f . Sia $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $x \neq 0$, tale che $f(x) = x$. In particolare, esiste $x_0 \in \mathbb{S}^n$, $x_0 = \frac{x}{|x|}$, per il quale si ha $f(x_0) = x_0$. Poiché l'azione del gruppo Γ è propriamente discontinua, i suoi elementi, tranne l'identità, non possono avere punti fissi per cui $f = I_d$ e $\Gamma = \{I_d\}$. Pertanto, in questo caso abbiamo $M = \mathbb{S}^n$.

Caso b): $\det f = -1$. Allora, $f \neq I_d$ e $\det f^2 = (\det f)^2 = 1$. Poiché $f^2 \in \text{Iso}(\mathbb{S}^n)$ e $\det f^2 = 1$, dal caso a) segue che $f^2 = I_d$ ($I_d \in \Gamma$). D'altro canto, essendo f ortogonale, risulta $f \cdot f^T = I_d$ e quindi f è un endomorfismo simmetrico. Poiché f è simmetrico, f ammette n autovalori λ_i reali. Inoltre f è ortogonale, quindi gli autovalori di f sono ± 1 . Questi due fatti implicano che $\lambda_i = +1$ oppure $\lambda_i = -1$. Ma f non può avere un autovalore uguale a $+1$ (in quanto se così fosse, f avrebbe un punto fisso e dovrebbe essere $f = I_d$, contro l'ipotesi secondo cui $\det f = -1$). Allora, sarà $\lambda_i = -1$ per ogni $i = 1, \dots, n$, per cui $f = -I_d$, $\Gamma = \{I_d, -I_d\}$ e quindi $M = \mathbb{S}^n/\Gamma = \mathbb{S}^n/\{\pm I_d\} = \mathbb{P}^n$. \square

Corollario 8.47. *Uno spazio forma $M = \mathbb{S}^n/\Gamma$ con $\Gamma \neq \{I\}$ e $\Gamma \neq \{\pm I\}$, ha necessariamente dimensione dispari.*

Una varietà riemanniana compatta (M, g) di curvatura sezionale costante positiva e di dimensione dispari $n = 2m - 1$ è del tipo \mathbb{S}^{2m-1}/Γ , dove Γ , sottogruppo di $SO(2m)$, è un gruppo ciclico finito di ordine $q > 2$, $\Gamma = \langle T \rangle$, e T^k ($1 \leq k \leq q - 1$) è un'isometria di \mathbb{S}^{2m-1} priva di punti fissi ([100], p.139-140). L'isometria T è definita dalla matrice ortogonale $(T_{i,j})$, dove :

$$T_{1,1} = \cos \frac{2\pi p_1}{q}, \quad T_{1,2} = -\sin \frac{2\pi p_1}{q}, \quad T_{1,3} = \dots = T_{1,2m} = 0$$

$$T_{2,1} = \sin \frac{2\pi p_1}{q}, \quad T_{2,2} = -\cos \frac{2\pi p_1}{q}, \quad T_{2,3} = \dots = T_{2,2m} = 0$$

$$T_{3,1} = T_{3,2} = 0, \quad T_{3,3} = \cos \frac{2\pi p_2}{q}, \quad T_{3,4} = -\sin \frac{2\pi p_2}{q},$$

$$T_{3,5} = \dots = T_{3,2m} = 0,$$

$$T_{4,1} = T_{4,2} = 0, \quad T_{4,3} = \sin \frac{2\pi p_2}{q}, \quad T_{4,4} = -\cos \frac{2\pi p_2}{q},$$

$$T_{4,5} = \dots = T_{4,2m} = 0,$$

così procedendo

$$T_{2m-1,1} = \dots = T_{2m-1,2m-2} = 0,$$

$$T_{2m-1,2m-1} = \cos \frac{2\pi p_m}{q}, \quad T_{2m-1,2m} = -\sin \frac{2\pi p_m}{q},$$

$$T_{2m,1} = \dots = T_{2m,2m-2} = 0,$$

$$T_{2m,2m-1} = \sin \frac{2\pi p_m}{q}, \quad T_{2m,2m} = -\cos \frac{2\pi p_m}{q},$$

con $p_1 = 1$ e gli p_i ($i = 2, \dots, m$) interi naturali relativamente primi rispetto al fissato intero naturale $q > 2$ (cioè il $M.C.D.(p_i, q) = 1$). Lo spazio $M = \mathbb{S}^{2m-1}/\Gamma$ è anche detto spazio lenticolare (*lens space*).

Quanto visto sinora ci permette di osservare che non tutte le varietà di dimensione n possiedono una metrica riemanniana con curvatura sezionale costante, al contrario di quanto accade per le varietà 2-dimensionali per le quali vale il seguente teorema (cfr., ad esempio, [62] p. 7).

Teorema 8.48 (di uniformizzazione di Poincaré). *Ogni 2-varietà differenziabile (connessa) M^2 è diffeomorfa ad una delle seguenti varietà: \mathbb{S}^2/Γ , \mathbb{R}^2/Γ , H^2/Γ , dove Γ è un gruppo discreto propriamente discontinuo di isometrie del corrispondente spazio modello. Pertanto, ogni varietà differenziabile di dimensione 2 ammette una metrica riemanniana completa a curvatura (gaussiana) costante.*

Esercizio 8.49. Usando il teorema di uniformizzazione, si verifichi che ogni 2-varietà connessa compatta orientabile di genere $p > 1$, oppure non orientabile di genere $q > 2$, ammette una metrica riemanniana a curvatura sezionale costante negativa. Cosa si può dire per la bottiglia di Klein? Suggestivo: Esprimere la caratteristica di Eulero-Poincaré $\chi(M)$ di tali superfici in funzione del loro genere, quindi utilizzare il Teorema di Gauss-Bonnet.

Chiudiamo questa Sezione con un cenno alle

Varietà semi-riemanniane a curvatura sezionale costante

Siano (M, g) una varietà semi-riemanniana, R il tensore di curvatura associato alla connessione di Levi-Civita di (M, g) e p è un punto di M . Per ogni $V_p, W_p \in T_p M$, poniamo

$$A_p(V_p, W_p) = g_p(V_p, V_p)g_p(W_p, W_p) - (g_p(V_p, W_p))^2.$$

Ricordiamo che un piano di uno spazio semi-euclideo in generale non è detto che sia non degenerare. Più precisamente, un sottospazio 2-dimensionale P di $T_p M$ è non degenerare se $A_p(V_p, W_p) \neq 0$ dove (V_p, W_p) è una base di P . Se P è un piano non degenerare di $T_p M$, come nel caso riemanniano, la *curvatura sezionale di M in p lungo il piano P* è definita da

$$K(p, P) = \frac{R(V_p, W_p, V_p, W_p)}{A(V_p, W_p)},$$

dove (V_p, W_p) è una base di P . Anche nel caso semi-riemanniano, lo scalare $K(p, P)$ dipende solo dal piano P e non dalla base scelta.

Una varietà semi-riemanniana (M, g) si dice che ha *curvatura sezionale costante* se la sua funzione curvatura sezionale K risulta costante, ovvero se per ogni $p \in M$ e per ogni piano non degenerare P di $T_p M$

$$K(p, P) = k_0 \text{ (costante).}$$

Una varietà semi-riemanniana si dice che è *completa* se è geodeticamente completa, ovvero ogni geodetica massimale è definita su tutto l'asse reale. Valgono i seguenti risultati (cfr. [79] per dettagli).

- La pseudosfera $\mathbb{S}_\nu^n(r)$, $0 \leq \nu \leq n$, è una varietà semi-riemanniana completa a curvatura sezionale costante positiva $K = 1/r^2$.
- Lo spazio pseudoiperbolico $H_\nu^n(r)$, $0 \leq \nu \leq n$, è una varietà semi-riemanniana completa a curvatura sezionale costante negativa $K = -1/r^2$.
- Due varietà semi-riemanniane complete semplicemente connesse che hanno stessa curvatura sezionale costante k_0 sono isometriche se, e sole se, hanno stessa dimensione e stesso indice.

Infine, ricordiamo che in relatività generale la pseudosfera $\mathbb{S}_1^4(r)$ è nota col nome di *spaziotempo di de Sitter*, e il rivestimento universale $\widetilde{H}_1^4(r)$ col nome di *spaziotempo anti-de Sitter*.

8.7 Tensore di Ricci e curvatura scalare

Un tensore più semplice da maneggiare, rispetto al tensore di curvatura di Riemann R , e che riassume in sé molte delle informazioni contenute in R , è il *tensore di Ricci* da cui seguono le nozioni di: *curvatura di Ricci*, *curvatura scalare* e *varietà di Einstein*. La curvatura di Ricci dà meno informazioni rispetto alla curvatura sezionale, tuttavia essa gioca un ruolo fondamentale in geometria riemanniana. Grigori Perelman usando e sviluppando la teoria del flusso di Ricci introdotta da R. S. Hamilton (cfr. Sezione 8.10), è riuscito a dimostrare la *congettura di Poincaré* all'inizio di questo millennio ([82], [83],[84]). Per la soluzione della congettura di Poincaré, Perelman è stato insignito della medaglia Fields nel congresso internazionale dei matematici a Madrid nell'agosto del 2006 (medaglia poi clamorosamente rifiutata).

Inoltre, notiamo che ci sono profondi legami tra la curvatura di Ricci e il trasporto ottimale (cfr., ad esempio, A. Figalli e C. Villani [36]). Alessio Figalli ha vinto la medaglia Fields nel 2018, il premio gli è stato conferito per i suoi contributi al trasporto ottimale, alla teoria delle equazioni derivate parziali e alla probabilità. Figalli è stato il secondo italiano a ricevere il prestigioso riconoscimento, il primo italiano fu Enrico Bombieri nel 1974.

Il tensore di Ricci

Sia (M, g) una varietà riemanniana n -dimensionale. Se p è un arbitrario punto di M , per ogni coppia di vettori $X_p, Y_p \in T_pM$, l'applicazione

$$R(X_p, \cdot)Y_p : T_pM \rightarrow T_pM, \quad Z_p \mapsto R(X_p, Z_p)Y_p,$$

è un endomorfismo dello spazio vettoriale reale T_pM , dove R è il tensore di curvatura di Riemann di M . Quindi, è possibile definire su T_pM la forma bilineare

$$Ric_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X_p, Y_p) \mapsto Ric_p(X_p, Y_p) := \text{tr } R(X_p, \cdot)Y_p.$$

Se $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ è una base ortonormale dello spazio tangente T_pM , si ha:

$$\begin{aligned} Ric_p(X_p, Y_p) &= \text{tr } (R(X_p, \cdot)Y_p) = \sum_{i=1}^n g(R(X_p, e_i)Y_p, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n R(X_p, e_i, Y_p, e_i) = \sum_{i=1}^n R(Y_p, e_i, X_p, e_i) \\ &= Ric_p(Y_p, X_p). \end{aligned}$$

Quindi, Ric_p è un tensore simmetrico di tipo $(0, 2)$ su T_pM .

Definizione 8.50. Per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e per ogni punto p di M , ponendo:

$$Ric(X, Y)(p) := \text{tr } \{R(X, \cdot)Y\}_p = \text{tr } R(X_p, \cdot)Y_p = Ric_p(X_p, Y_p),$$

si ottiene un tensore Ric covariante simmetrico del secondo ordine su M che è detto *tensore di Ricci* associato al tensore di Riemann R .

Rispetto a una base ortonormale locale $\{e_i\}$ di campi vettoriali, le componenti $Ric_{ij} = Ric(e_i, e_j)$ del tensore di Ricci Ric , sono date da:

$$Ric_{ij} = \sum_{k=1}^n R(e_i, e_k, e_j, e_k) = \sum_{k=1}^n R_{ikjk}.$$

Sia ora $\{\partial_i\}$ una base coordinata locale. Siccome $R(\partial_i, \partial_k)\partial_j$ è dato da $\sum_{r=1}^n R_{ikj}{}^r \partial_r$, allora è rappresentato rispetto alla base coordinata $\{\partial_i\}$ dalla matrice $(a_{rk} := R_{ikj}{}^r)$, per cui le componenti Ric_{ij} del tensore di Ricci rispetto alla base $\{\partial_i\}$ sono date da:

$$Ric_{ij} := Ric(\partial_i, \partial_j) = \sum_{k=1}^n R_{ikj}{}^k.$$

Inoltre, posto $g_{ks} = g(\partial_k, \partial_s)$, si ha $Ric_{ij} = \sum_{s,k=1}^n R_{ikjs} g^{ks}$. Infatti,

$$\begin{aligned} Ric_{ij} &= \sum_{k=1}^n R_{ikj}{}^k = \sum_{k,r=1}^n R_{ikj}{}^r \delta_{kr} = \sum_{k,r,s=1}^n R_{ikj}{}^r g^{ks} g_{sr} \\ &= \sum_{s,k=1}^n \left(\sum_{r=1}^n R_{ikj}{}^r g_{rs} \right) g^{ks} = \sum_{s,k=1}^n R_{ikjs} g^{ks}. \end{aligned}$$

L'**operatore di Ricci** è il tensore Q di tipo $(1, 1)$ definito, per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, da:

$$g(QX, Y) := Ric(X, Y).$$

Esercizio 8.51. Si verifichi che i tensori derivati $\nabla_X Ric$ e $\nabla_X Q$ sono simmetrici e soddisfano:

$$(\nabla_X Ric)(Y, Z) = g((\nabla_X Q)Y, Z).$$

Sia $v \in T_p M$ un vettore unitario e $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, v\}$ base ortonormale di $T_p M$. La *curvatura di Ricci* in p nella direzione di v è lo scalare

$$Ric_p(v) := \frac{1}{n-1} Ric_p(v, v) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n R_p(v, e_i, v, e_i),$$

e quindi

$$Ric_p(v) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n K(v, e_i).$$

Per come è stata definita, la curvatura di Ricci $Ric_p(v)$ rappresenta esattamente la media delle curvatures sezionali lungo i piani per il vettore v .

Un significato geometrico della curvatura di Ricci

Consideriamo un sistema di coordinate normali (x_i) centrato in p e definito in U . Rispetto alle coordinate normali, lo sviluppo di Taylor dei coefficienti $g_{ij}(x) = g(\partial_i, \partial_j)(x)$ è dato da

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - (1/3) \sum_{k,h=1}^n R_{ikjh}(p) x_k x_h + o(|x|^2).$$

Ricordiamo che per ogni $q \in U$ esiste un'unica geodetica minimale $\gamma(t)$ congiungente p a q , detta geodetica radiale. Rispetto alle coordinate normali,

$\gamma(t)$ è parametrizzata da $x_i(t) = ta_i$. Indicato con $u \in T_p M$ il vettore unitario tangente per $t = 0$ a γ , e posto $r = L(\gamma) = d(p, q)$, si ha $\dot{\gamma}(0) = ru$. D'altronde, $\dot{x}_i(t) = a_i = \dot{x}_i(0) = ru_i$ e quindi $\dot{\gamma}(t) = ru$ e $x_i(t) = tr u_i$. Di conseguenza, $x_i(q) = x_i(\gamma(1)) = ru_i$. Pertanto, ogni punto q di U ha coordinate normali del tipo $x_i = ru_i$, e la formula precedente diventa:

$$g_{ij}(q) = g_{ij}(ru) = \delta_{ij} - (r^2/3) \sum_{k,h=1}^n R_{ikjh}(p) u_k u_h + o(r^2),$$

da cui segue (cfr. [100], p. 45):

$$\det(g_{ij})(q) = 1 - (r^2/3) \sum_{i,k,h=1}^n R_{ikih}(p) u_k u_h + o(r^2). \quad (8.22)$$

Siccome (x_i) è un sistema di coordinate normali centrato in p , la base $\{(\partial_i)_p\}$ è ortonormale e quindi, posto $u = \sum_{i=1}^n u_i \partial_i$, si ha:

$$Ric(u, u)(p) = \sum_{i=1}^n R((\partial_i)_p, u, (\partial_i)_p, u) = \sum_{i,k,h=1}^n R_{ikih}(p) u_k u_h,$$

e la (8.22) diventa

$$\det(g_{ij}(q)) = 1 - (r^2/3) Ric_p(u, u) + o(r^2).$$

La funzione $\det(g_{ij})$ interviene nella definizione dell'elemento di volume (cfr. Appendice A). In particolare, se prendiamo $U = \mathcal{B}_R(p) = \exp_p \mathcal{B}_R(0)$ dove $\mathcal{B}_R(0) \subset T_p M$, allora (cfr. [100] p. 66, [37] p. 139):

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{B}_R(p)) &= \int_{\mathcal{B}_R(0)} \sqrt{\det(g_{ij}(q))} \circ \exp_p dx_1 \dots dx_n \\ &= \text{vol}_e(\mathcal{B}_R(0)) \left(1 - \frac{\text{tr } Ric_p}{6(n+2)} R^2 + o(R^2) \right), \end{aligned}$$

dove $\text{vol}_e(\mathcal{B}_R(0))$ denota il volume euclideo di $\mathcal{B}_R(0)$, palla di centro 0 e raggio R di \mathbb{R}^n . Ricordiamo che:

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathbb{S}_1^{2k}) &= \frac{2(2\pi)^k}{(2k-1)(2k-3)\dots 3 \cdot 1}, & \text{vol}(\mathbb{S}_1^{2k+1}) &= \frac{2\pi^{k+1}}{k!}, \\ \text{vol}(\mathbb{S}_R^2) &= 4\pi R^2, & \text{vol}(\mathbb{S}_R^{n-1}) &= R^{n-1} \text{vol}(\mathbb{S}_1^{n-1}), & \mathbb{S}_1^{n-1} &= \partial \mathcal{B}_1^n, \\ \text{vol}(\mathcal{B}_1^n) &= \frac{\text{vol}(\mathbb{S}_1^{n-1})}{n}, & \text{vol}(\mathcal{B}_R^n) &= R^n \text{vol}(\mathcal{B}_1^n), & \text{vol}(\mathcal{B}_R^3) &= \frac{4}{3}\pi R^3, \end{aligned}$$

dove \mathbb{S}_1^n denota la n -sfera di raggio 1 e \mathbb{S}_R^n la n -sfera di raggio R .

La curvatura scalare

La funzione $r : M \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$r(p) := \text{tr } Q_p = \text{tr } Ric_p,$$

si dice *curvatura scalare* della varietà riemanniana M .

Se $\{e_i\}$ è una base ortonormale locale di campi vettoriali, allora:

$$r = \sum_{i=1}^n g(Q(e_i), e_i) = \sum_{i=1}^n Ric(e_i, e_i) = \sum_{i,k=1}^n R_{ikik},$$

dove R_{ikik} sono le componenti di R rispetto alla stessa base $\{e_i\}$. Quindi, la curvatura scalare in un punto p è la somma di tutte le curvatures sezionali in p rispetto ad una base ortonormale. Siano $\{e_i\}$ e $\{\partial_j\}$ rispettivamente una base ortonormale locale e una base coordinata locale di campi vettoriali, definite entrambe nello stesso dominio. Sia $A = (a_{ij})$ la matrice del cambiamento di base definita da: $e_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} \partial_k$. La matrice $G = (g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j))$ rappresenta la metrica riemanniana g rispetto alla base $\{\partial_j\}$, e $I_n = (\delta_{ij})$ rappresenta la metrica riemanniana g rispetto alla base $\{e_i\}$. Siccome G e I_n sono congruenti (cfr. Lemma 12.5): $I_n = A^T G A$, e quindi $G^{-1} = A A^T$, cioè

$$g^{ks} = \sum_{i=1}^n a_{ki} a_{is}^T = \sum_{i=1}^n a_{ki} a_{si} \quad \forall k, s = 1, \dots, n.$$

Inoltre, posto $Ric_{ij} := Ric(\partial_i, \partial_j)$ e $R_{ij kh} := R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_h)$, usando la precedente formula, si ottiene:

$$r = \sum_{i=1}^n Ric(e_i, e_i) = \sum_{k,h,i=1}^n Ric_{kh} a_{ki} a_{hi} = \sum_{k,h=1}^n Ric_{kh} \sum_{i=1}^n a_{ki} a_{hi}.$$

Quindi

$$r = \sum_{k,h=1}^n Ric_{kh} g^{kh} = \sum_{i,k,h,j=1}^n R_{kijh} g^{ij} g^{kh}. \quad (8.23)$$

Esercizio 8.52. Siano \bar{g} e g due metriche omotetiche su M : $\bar{g} = cg$, $c = \text{cost} > 0$. Si verifichi che per i tensori di Ricci, gli operatori di Ricci e le curvatures scalari si ha:

$$\bar{Ric} = Ric, \quad \bar{Q} = (1/c)Q \quad \text{e} \quad \bar{r} = (1/c)r.$$

Ricordiamo che la divergenza del tensore di Ricci è definita da (cfr. anche Appendice B.2):

$$(\text{div} Ric)(X) = \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} Ric)(e_i, X) = \sum_{i=1}^n g((\nabla_{e_i} Q)e_i, X),$$

dove (e_i) è una base ortonormale locale di campi di vettori.

Proposizione 8.53. *Il tensore di Ricci Ric e la curvatura scalare r verificano, per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, le seguenti identità:*

- $\nabla_X \text{tr} Ric = \text{tr} \nabla_X Ric$, cioè $X(r) = \text{tr} \nabla_X Ric$;
- $(\nabla_Z Ric)(X, Y) = \text{tr}(\nabla_Z R)(X, \cdot)Y$;
- $\text{div} Ric = (1/2)dr$;
- $(\text{div} R)(X, Y, Z) = (\nabla_Y Ric)(X, Z) - (\nabla_X Ric)(Y, Z)$.

Dimostrazione. In generale, se S è un tensore di tipo $(1, 1)$, $\nabla_X \text{tr } S = \text{tr } \nabla_X S$ (cfr. Sezione 6.9). Quindi, vale in particolare la prima identità di cui diamo comunque una verifica diretta. Siccome Ric è simmetrico, possiamo considerare una base ortonormale $\{e_i\}$ di autovettori per Q . Pertanto,

$$g(Qe_i, \nabla_X e_i) = \lambda_i g(e_i, \nabla_X e_i) = 0$$

e quindi,

$$\begin{aligned} X(r) &= \sum_{i=1}^n Xg(Qe_i, e_i) = \sum_{i=1}^n \{g(\nabla_X Qe_i, e_i) + g(Qe_i, \nabla_X e_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_X Qe_i, e_i) = \sum_{i=1}^n g((\nabla_X Q)e_i, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (\nabla_X Ric)(e_i, e_i) = \text{tr } \nabla_X Ric. \end{aligned}$$

Per provare la seconda identità, fissiamo un punto p di M e consideriamo un riferimento geodetico in p (cfr. Osservazione 7.38), cioè una base ortonormale locale $\{e_i\}$ definita in un intorno di p e tale che $(\nabla e_i)_p = 0$. Allora,

$$\begin{aligned} (\nabla_Z Ric)(X, Y)(p) &= \sum_{i=1}^n \left(\nabla_Z R(X, e_i, Y, e_i) \right. \\ &\quad \left. - R(\nabla_Z X, e_i, Y, e_i) - R(X, e_i, \nabla_Z Y, e_i) \right)(p) \\ &= \sum_{i=1}^n ((\nabla_Z R)(X, e_i, Y, e_i))(p). \end{aligned}$$

Per provare la c), usiamo la stessa base di prima e la seconda identità di Bianchi. Infatti, per ogni fissato indice k , si ottiene:

$$\begin{aligned} e_k(r)(p) &= \left\{ e_k \left(\sum_{i=1}^n Ric(e_i, e_i) \right) \right\}(p) = \left\{ e_k \left(\sum_{i,j=1}^n g(R(e_i, e_j)e_i, e_j) \right) \right\}(p) \\ &= \left\{ \sum_{i,j=1}^n g((\nabla_{e_k} R)(e_i, e_j)e_i, e_j) \right\}(p) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left\{ -g((\nabla_{e_i} R)(e_j, e_k)e_i, e_j) - g((\nabla_{e_j} R)(e_k, e_i)e_i, e_j) \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{e_i} R)(e_j, e_i, e_j, e_k) + \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{e_j} R)(e_i, e_j, e_i, e_k) \right\}(p), \\ &= 2 \left\{ \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{e_i} R)(e_j, e_i, e_j, e_k) \right\}(p) \end{aligned}$$

$$= 2 \left\{ \sum_{i,k=1}^n e_i \left(\sum_{j=1}^n R(e_j, e_i, e_j, e_k) \right) \right\} (p),$$

e quindi

$$\begin{aligned} e_k(r)(p) &= 2 \left\{ \sum_{i,k=1}^n e_i Ric(e_i, e_k) \right\} (p) = 2 \left\{ \sum_{i,k=1}^n (\nabla_{e_i} Ric)(e_i, e_k) \right\} (p) \\ &= 2 \left\{ \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} Ric)(e_k, e_i) \right\} (p) = 2(\operatorname{div} Ric)(e_k)(p) \\ &= 2 \left\{ \sum_{i=1}^n g((\nabla_{e_i} Q)e_i, e_k) \right\} (p). \end{aligned}$$

Pertanto, indicata con $\{\theta^i\}$ la base (locale) duale di $\{e_i\}$, si ha

$$dr = \sum_{k=1}^n (dr)(e_k) \theta^k = \sum_{k=1}^n e_k(r) \theta^k = 2 \sum_{k=1}^n (\operatorname{div} Ric)(e_k) \theta^k = 2 \operatorname{div} Ric.$$

Infine, tenendo conto della b), si ha:

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} R)(X, Y, Z) &= \sum_{i=1}^n g((\nabla_{e_i} R)(X, Y, Z), e_i) = \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} R)(X, Y, Z, e_i) \\ &= - \sum_{i=1}^n (\nabla_X R)(Y, e_i, Z, e_i) - \sum_{i=1}^n (\nabla_Y R)(e_i, X, Z, e_i) \\ &= -(\nabla_X Ric)(Y, Z) + (\nabla_Y Ric)(X, Z). \end{aligned}$$

□

Corollario 8.54. *Se (M, g) è una varietà riemanniana (connessa) localmente simmetrica (i.e., $\nabla R = 0$), oppure con tensore di Ricci parallelo, allora $r = \operatorname{cost}$.*

Definizione 8.55. Sia (M, g) una varietà riemanniana ed S un tensore su M di tipo $(0, 2)$ simmetrico. S si dice che è un *tensore di Codazzi* se

$$(\nabla_X S)(Y, Z) = (\nabla_Y S)(X, Z).$$

Esercizio 8.56. Si verifichi che se il tensore di Ricci di (M, g) è di Codazzi, allora la curvatura scalare r è costante.

Esercizio 8.57. Si verifichi che per il tensore di Ricci Ric e per la curvatura scalare r di una varietà riemanniana prodotto $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$, valgono le formule:

$$Ric(X, Y) = Ric_1(X_1, Y_1) + Ric_2(X_2, Y_2) \quad \text{e} \quad r = r_1 + r_2,$$

dove X_i, Y_i sono le proiezioni di X, Y su M_i ($i = 1, 2$). Il tensore di Ricci di un (*doubly*) *warped product* si può trovare in [97], p. 71,74.

Curvatura di Ricci e topologia

Ogni varietà differenziabile di dimensione $n \geq 3$ ammette una metrica riemanniana con curvatura di Ricci negativa (cfr. [53] p. 2). Di conseguenza, la curvatura di Ricci negativa non implica restrizioni topologiche. Ci limitiamo di seguito a enunciare un importante teorema che mostra come la positività della curvatura di Ricci influenza la topologia di M . Premettiamo la seguente definizione di *diametro di una varietà riemanniana*:

$$\text{diam}(M) = \sup\{d(p, q) : p, q \in M\}.$$

Se M è compatta, la funzione distanza d (che è continua) è definita sul compatto $M \times M$, e quindi il $\text{diam}(M)$ è finito. In particolare, nel caso della sfera \mathbb{S}_R^n di raggio R ,

$$\text{diam}(\mathbb{S}_R^n) = \pi R \quad (\text{e non } 2R)$$

in quanto la distanza tra punti antipodali è πR .

Teorema 8.58. (Myers [71]) *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa, $\dim = n$. Se, il tensore di Ricci soddisfa la disuguaglianza:*

$$\text{Ric} \geq \frac{(n-1)}{R^2} g, \quad \text{dove } R = \text{cost} > 0,$$

allora M è compatta con gruppo fondamentale finito e $\text{diam}(M) \leq \pi R$.

Osservazione 8.59. Si noti che una varietà riemanniana completa con tensore di Ricci definito positivo può non essere compatta. Ad esempio, l'iperboloide ellittico

$$M_0 : x^2 + y^2 - z^2 = -1, \quad z > 0,$$

con la metrica canonica g (ovvero, con la metrica indotta) è una varietà riemanniana completa ma non compatta. Tuttavia, il suo tensore di Ricci

$$\text{Ric} = Kg,$$

dove K , curvatura gaussiana di M_0 , è strettamente positiva. Infatti, M_0 si può rappresentare con l'equazione

$$z = f(x, y), \quad \text{dove } f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2},$$

e quindi la curvatura gaussiana nel generico punto di M_0 è data dalla formula (cfr. [96] p.169)

$$K = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2} = \dots = \frac{1}{(1 + 2x^2 + 2y^2)^2} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} > 0.$$

Dunque, il tensore di Ricci $\text{Ric} = Kg$ è definito positivo e tende a zero quando $(x^2 + y^2)$ tende a $+\infty$.

8.8 Varietà di Einstein

Per uno studio approfondito sulle varietà di Einstein si rinvia al testo di Besse [10].

Definizione 8.60. Una varietà riemanniana (M, g) si dice *varietà di Einstein* se il tensore di Ricci Ric soddisfa:

$$Ric = \lambda g, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{equivalentemente, } Q = \lambda I).$$

Una varietà di Einstein n -dimensionale ha curvatura scalare (costante)

$$r = \text{tr} Ric = \lambda \text{tr} g = n\lambda.$$

Pertanto, la condizione di Einstein si può riscrivere nella forma equivalente:

$$Ric = (r/n)g \quad (\text{equivalentemente, } Q = (r/n)I). \quad (8.24)$$

In particolare, una varietà di Einstein ha tensore di Ricci parallelo (non vale il viceversa). La proposizione seguente rappresenta, in un certo senso, l'analogo del Teorema di Schur per la condizione di Einstein.

Proposizione 8.61. *Sia (M, g) una varietà riemanniana connessa di dimensione $n \geq 3$. Se $Ric = \lambda g$, con λ funzione differenziabile su M , allora $\lambda = \text{cost} = r/n$.*

Dimostrazione. Sia $\{e_i\}$ una base ortonormale locale di campi vettoriali ed X un arbitrario campo vettoriale. Dalla c) della Proposizione 8.53, si ha:

$$\begin{aligned} X(r) &= 2 \sum_{i=1}^n g((\nabla_{e_i} Q)e_i, X) = 2 \sum_{i=1}^n g((\nabla_{e_i} \lambda I)e_i, X) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n e_i(\lambda)g(e_i, X) = 2 \sum_{i=1}^n e_i(\lambda)X^i = 2X(\lambda). \end{aligned}$$

D'altronde, $Ric = \lambda g$ implica che $r = \text{tr} Ric = \lambda n$, e quindi

$$n X(\lambda) = 2X(\lambda).$$

Essendo $n \geq 3$ ed M connessa, si ottiene $\lambda = \text{costante}$, e quindi $\lambda = r/n$. \square

Proposizione 8.62. *Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione n a curvatura sezionale costante k_0 . Allora, M è una varietà di Einstein:*

$$Ric = k_0(n-1)g, \quad r = n(n-1)k_0.$$

Dimostrazione. Le componenti locali $R_{ijkh} = R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_h)$ del tensore di curvatura di Riemann di una varietà riemanniana a curvatura sezionale costante k_0 , sono date da: $R_{ijkh} = k_0(g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk})$. Di conseguenza, per le componenti di Ric rispetto alla stessa base coordinata, si ha:

$$Ric_{ik} = \sum_{j,h=1}^n R_{ijkh} g^{jh} = k_0 \sum_{j,h=1}^n (g_{ik} g_{jh} g^{jh} - g_{ih} g_{jk} g^{jh}),$$

e quindi

$$Ric_{ik} = k_0 \sum_{h=1}^n (g_{ik} \delta_{hh} - g_{ih} \delta_{kh}) = (n-1)k_0 g_{ik}.$$

Di conseguenza, M è uno spazio di Einstein con curvatura scalare costante $r = n(n-1)k_0$. \square

Il viceversa della Proposizione 8.62 vale solo nelle dimensioni 2 e 3.

Proposizione 8.63. *Sia (M, g) una varietà di Einstein di dimensione n con $n = 2$ oppure $n = 3$. Allora, (M, g) ha curvatura sezionale costante.*

Dimostrazione. Se M ha dimensione 2, ogni base ortonormale locale di campi vettoriali (e_1, e_2) diagonalizza il tensore di Ricci. Infatti:

$$\begin{aligned} Ric_{12} &= Ric_{21} = R_{2111} + R_{2212} = 0, \\ Ric_{11} &= R_{1212} = R_{2121} = Ric_{22} \Rightarrow Ric_{11} = Ric_{22} = K, \end{aligned}$$

dove K è la curvatura gaussiana di M . In particolare, $Ric = Kg$. Inoltre:

$$2K = 2R_{1212} = Ric_{11} + Ric_{22} = r = \text{cost.}$$

Quindi, varietà riemanniane 2-dimensionali di Einstein sono a curvatura sezionale costante. Sia ora M una varietà di Einstein 3-dimensionale: $Ric = \lambda g$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Fissato $p \in M$, sia P un generico piano di $T_p M$. Consideriamo in $T_p M$ una base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$ con $\{e_1, e_2\}$ base di P . Allora:

$$\begin{aligned} Ric_{11} &= R_{1212} + R_{1313} = a + b = \lambda, \\ Ric_{22} &= R_{2121} + R_{2323} = a + c = \lambda, \\ Ric_{33} &= R_{3131} + R_{3232} = b + c = \lambda. \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\lambda = Ric_{11} + Ric_{22} - Ric_{33} = 2a = 2R_{1212} = 2K(p, P)$$

e quindi, M ha curvatura sezionale $K(p, P) = \lambda/2 = \text{cost.}$ \square

Esercizio 8.64. Siano (M_1, g_1) e (M_2, g_2) due varietà di Einstein, $\dim M_1 = n_1$ e $\dim M_2 = n_2$. Si verifichi che la varietà riemanniana prodotto $(M, g) = (M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ è di Einstein se e solo se $n_1 r_2 = n_2 r_1$, dove r_i è la curvatura scalare di M_i ($i = 1, 2$).

Suggerimento: usare la caratterizzazione, data nella Proposizione D.2, delle varietà di Einstein.

Dall'Esercizio 8.64 segue che, in dimensione $n > 3$, esistono varietà di Einstein che non sono a curvatura sezionale costante. Ad esempio, $M = \mathbb{S}^n(1) \times \mathbb{S}^n(1)$ è una varietà di Einstein che non è a curvatura sezionale costante. $M = \mathbb{S}^n(1) \times \mathbb{R}$ è un esempio di varietà riemanniana con tensore di Ricci parallelo che non è di Einstein. Più in generale: una varietà riemanniana con tensore di Ricci parallelo è di Einstein se è irriducibile, altrimenti è localmente un prodotto riemanniano di varietà di Einstein (cfr. [97], p. 227).

Osservazione 8.65. Varietà di Einstein complete con curvatura scalare r (costante) positiva soddisfano le ipotesi del Teorema 8.58 (di Myers). Pertanto: *varietà di Einstein complete e non compatte hanno necessariamente curvatura scalare $r \leq 0$* (in quanto se fosse $r > 0$, per il Teorema di Myers, la varietà dovrebbe essere compatta).

Osservazione 8.66. Una caratterizzazione variazionale delle metriche di Einstein è data nel Capitolo 11 (cfr. Teorema 11.4).

L'equazione di Einstein

L'origine della terminologia “varietà di Einstein” va cercata in Fisica, nella teoria della relatività generale di Einstein (teoria relativistica della gravitazione). L'aspetto centrale di questa teoria è che lo spazio-tempo è modellato come una varietà 4-dimensionale munita di una metrica di Lorentz g (cfr. Osservazione 4.9). La geometria di tale varietà è determinata dall'*equazione di Einstein*, anche detta *equazione di campo di Einstein* ([20], p. 158):

$$\text{Ric} - (r/2)g = 8\pi GT, \quad (8.25)$$

dove G è la costante gravitazionale universale di Newton e T è il *tensore energia-impulso* (T è un tensore di tipo $(0, 2)$ simmetrico).

Il termine a sinistra dell'equazione (8.25) è anche detto “tensore gravitazionale di Einstein”. In generale, se S è un tensore simmetrico di tipo $(0, 2)$, il tensore

$$\mathcal{G}(S) := S - (1/2)(\text{tr}S)g$$

si dice *tensore gravitazionale associato ad S* . Applicando la (2.9) della Appendice B.2, si ha

$$\text{div}(\mathcal{G}(S)) = \text{div}(S) - (1/2) d(\text{tr}S).$$

In particolare, applicando la c) della Proposizione 8.53 alla (8.25), la formula precedente implica

$$\text{div}T=0.$$

In una regione dello spazio privo di materia, il tensore $T = 0$ e l'equazione (8.25) diventa

$$\text{Ric} = (r/2)g.$$

Considerando le tracce di ambo i membri e ricordando che $\text{tr}g = \dim M = 4$, otteniamo $r = 2r$, da cui $r = 0$. Pertanto, la (8.25) diventa $\text{Ric} = 0$, e ciò significa che g è una metrica di Einstein nel senso matematico del termine con curvatura scalare nulla.

Nel 1917, subito dopo aver formulato la relatività generale, Einstein cercò di trovare un modello cosmologico statico dell'universo, in accordo con le osservazioni astronomiche di quel periodo. A tal fine decise di modificare l'equazione (8.25) nella seguente formulazione

$$\text{Ric} - (r/2)g + \Lambda g = 8\pi GT, \quad (8.26)$$

dove Λ è una costante nota come *costante cosmologica*. Più di dieci anni dopo, nel 1929, l'astronomo Edwin Hubble scoprì che l'universo si stava espandendo. La costante cosmologica era stata introdotta per poter spiegare l'esistenza di un universo statico. Con la scoperta dell'espansione dell'universo, la costante cosmologica non era più necessaria. Einstein stesso ritrattò la propria modifica (che in seguito chiamò il suo più grande errore). Ma nel 1998 una serie di osservazioni su oggetti astrofisici denominati supernovae indicano che non solo l'universo si sta espandendo, ma lo fa in maniera accelerata. Questa accelerazione nell'espansione dell'universo non era compatibile con i modelli privi di costante cosmologica. La costante cosmologica viene quindi reintrodotta nell'equazione di Einstein per giustificare la presenza di una *energia oscura* responsabile dell'accelerazione nell'espansione dell'universo.

L'equazione di Einstein nella formulazione (8.26) in una regione dello spazio-tempo con il tensore $T = 0$, diventa

$$Ric = \left(\frac{r}{2} - \Lambda\right) g.$$

In tal caso, siccome $\dim M = 4 > 2$, dalla Proposizione 8.61 si ottiene

$$\left(\frac{r}{2} - \Lambda\right) = \text{cost.} = \frac{r}{4}$$

e quindi

$$Ric = \Lambda g.$$

Di conseguenza, anche in questo caso, lo spazio-tempo della relatività generale con $T = 0$ è un esempio di varietà di Einstein (nel senso matematico del termine) con curvatura scalare $r = 4\Lambda$.

In generale, dall'equazione (8.26) si ottiene

$$r - (r/2)4 + 4\Lambda = 8\pi G \text{tr}(T), \quad \text{ossia} \quad r = 4\Lambda - 8\pi G \text{tr}(T).$$

Quindi, l'equazione (8.26) si può esprimere anche nella seguente forma

$$Ric = 8\pi GT + (\Lambda - 4\pi G \text{tr}(T))g.$$

8.9 Curvatura di gruppi di Lie 3D

Sia G un gruppo di Lie n -dimensionale con algebra di Lie \mathfrak{g} . Se (e_1, \dots, e_n) è una base di campi vettoriali invarianti a sinistra, possiamo definire una metrica riemanniana invariante a sinistra g ponendo $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Ricordiamo che un *gruppo di Lie Riemanniano* è una coppia (G, g) , dove G è gruppo di Lie e g è una fissata metrica riemanniana invariante a sinistra. In particolare: un gruppo di Lie riemanniano è una varietà riemanniana omogenea, e in generale non vale il viceversa. In dimensione tre, ad eccezione del prodotto riemanniano $S^2 \times \mathbb{R}$, ogni varietà riemanniana omogenea semplicemente connessa è un gruppo di Lie riemanniano semplicemente connesso (cfr. Sezione 10.2).

Nel seguito esaminiamo la curvatura dei gruppi di Lie riemanniani semplicemente connessi 3D.

Caso unimodulare

Sia (G, g) un gruppo di Lie Riemanniano unimodulare 3D con algebra di Lie \mathfrak{g} . Allora, esiste una base (e_1, e_2, e_3) di \mathfrak{g} , ortonormale rispetto alla metrica invariante a sinistra g , ed esistono $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, tali che

$$[e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2, \quad [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3. \quad (8.27)$$

Poniamo

$$\mu_1 = \frac{(\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1)}{2}, \quad \mu_2 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2)}{2}, \quad \mu_3 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)}{2}.$$

Usando la (8.27) e la formula di Koszul (6.8), si ottiene che la connessione di Levi-Civita ∇ , associata alla metrica invariante a sinistra g , è data dalla seguente tabella:

$$\begin{cases} \nabla_{e_1} e_1 = 0, & \nabla_{e_1} e_2 = \mu_1 e_3, & \nabla_{e_1} e_3 = -\mu_1 e_2, \\ \nabla_{e_2} e_1 = -\mu_2 e_3, & \nabla_{e_2} e_2 = 0, & \nabla_{e_2} e_3 = \mu_2 e_1, \\ \nabla_{e_3} e_1 = \mu_3 e_2, & \nabla_{e_3} e_2 = -\mu_3 e_1, & \nabla_{e_3} e_3 = 0. \end{cases} \quad (8.28)$$

Di conseguenza, si può determinare il tensore di curvatura:

$$\begin{aligned} R(e_1, e_2)e_3 &= -\nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_3 + \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_3 + \nabla_{[e_1, e_2]} e_3 = 0, \\ R(e_1, e_2)e_2 &= -\nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_2 + \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_2 + \nabla_{[e_1, e_2]} e_2 = (\mu_1 \mu_2 - \lambda_3 \mu_3) e_1, \\ R(e_1, e_3)e_3 &= -\nabla_{e_1} \nabla_{e_3} e_3 + \nabla_{e_3} \nabla_{e_1} e_3 + \nabla_{[e_1, e_3]} e_3 = (\mu_1 \mu_3 - \lambda_2 \mu_2) e_1, \\ R(e_2, e_3)e_3 &= -\nabla_{e_2} \nabla_{e_3} e_3 + \nabla_{e_3} \nabla_{e_2} e_3 + \nabla_{[e_2, e_3]} e_3 = (\mu_2 \mu_3 - \lambda_1 \mu_1) e_2. \end{aligned}$$

Pertanto, si ottengono facilmente le componenti del tensore di Ricci $Ric_{ij} = Ric(e_i, e_j)$:

$$\begin{cases} Ric_{11} = R_{1313} + R_{1212} = 2\mu_2 \mu_3, \\ Ric_{12} = R_{1323} = -R_{2331} = 0, \\ Ric_{13} = R_{1232} = 0, \\ Ric_{22} = R_{2323} + R_{1212} = 2\mu_1 \mu_3, \\ Ric_{23} = R_{2131} = -R_{1231} = 0, \\ Ric_{33} = R_{1313} + R_{2323} = 2\mu_1 \mu_2. \end{cases} \quad (8.29)$$

Ricordiamo che una varietà riemanniana 3D è a curvatura sezionale costante κ se è di Einstein, ossia il tensore di Ricci $Ric = \lambda g$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e $\kappa = \lambda/2$ (cfr. Proposizione 8.63). Per i gruppi di Lie riemanniani unimodulari che stiamo esaminando, tale condizione è equivalente alle condizioni

$$\mu_1\mu_2 = \mu_1\mu_3 = \mu_2\mu_3.$$

Di conseguenza, si hanno i seguenti casi:

- $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \neq 0$, ossia $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$, e quindi $\kappa = \lambda_1^2/4$.
- due μ_i nulli e l'altro non nullo; senza perdere in generalità possiamo assumere $\mu_1 = \mu_2 = 0$ e $\mu_3 \neq 0$, ossia $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 \neq 0$, e quindi $\kappa = 0$.
- $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$, ossia $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, e quindi $\kappa = 0$.

Tenendo conto della classificazione dei gruppi Lie unimodulari 3D (cfr. Sottosezione 3.6.1), si ottiene il seguente risultato.

Teorema 8.67. *I gruppi di Lie semplicemente connessi unimodulari 3D che ammettono metriche riemanniane invarianti a sinistra e a curvatura sezionale costante κ sono esattamente:*

$SU(2) = \mathbb{S}^3$ ($\kappa = \lambda_1^2/4 > 0$), il gruppo abeliano \mathbb{R}^3 ($\kappa = 0$) e $\tilde{E}(2)$ ($\kappa = 0$).

In particolare, i gruppi di Lie \mathbb{R}^3 e $\tilde{E}(2)$, i quali non sono isomorfi, ammettono metriche (piatte) invarianti a sinistra isometriche.

Metriche di Berger sul gruppo di Lie $SU(2)$

Sia (G, g) un gruppo di Lie semplicemente connesso unimodulare 3D definito dalla (8.27) con le costanti λ_i che soddisfano

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda > 0, \lambda_1 > 0.$$

Quindi, G è il gruppo di Lie $SU(2) \equiv \mathbb{S}^3$ e la metrica g non ha curvatura sezionale costante. Poniamo

$$\xi_1 = \mu e_1, \text{ dove } \mu = \sqrt{(\lambda_1/\lambda)} > 0, \quad \xi_2 = e_2 \quad \text{e} \quad \xi_3 = e_3.$$

Allora

$$[\xi_2, \xi_3] = \sqrt{\lambda\lambda_1} \xi_1, \quad [\xi_3, \xi_1] = \sqrt{\lambda\lambda_1} \xi_2, \quad [\xi_1, \xi_2] = \sqrt{\lambda\lambda_1} \xi_3.$$

Di conseguenza, la metrica invariante a sinistra g_0 definita da

$$g_0(\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij}$$

è la metrica canonica con curvatura sezionale costante $\kappa = (\lambda\lambda_1)/4 > 0$ (cfr. Teorema 8.67). Ora, per $\varepsilon > 0$, consideriamo la metrica invariante a sinistra

$$g_\varepsilon = g_0 + (\varepsilon - 1)\eta \otimes \eta,$$

dove $\eta = g_0(\xi_1, \cdot)$. La metrica riemanniana g_ε è nota in letteratura col nome di metrica di Berger sulla sfera \mathbb{S}^3 (cfr. Sezione 9.4). In tal caso, i campi vettoriali

$$\tilde{\xi}_1 = (1/\sqrt{\varepsilon})\xi_1, \quad \tilde{\xi}_2 = \xi_2 \quad \text{e} \quad \tilde{\xi}_3 = \xi_3,$$

sono g_ε -ortonormali e soddisfano

$$[\tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3] = \sqrt{\varepsilon\lambda\lambda_1} \tilde{\xi}_1, \quad [\tilde{\xi}_3, \tilde{\xi}_1] = \sqrt{(\lambda\lambda_1)/\varepsilon} \tilde{\xi}_2, \quad [\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2] = \sqrt{(\lambda\lambda_1)/\varepsilon} \tilde{\xi}_3.$$

In particolare, prendendo $\varepsilon = \lambda_1/\lambda$, si ha

$$\sqrt{\varepsilon\lambda\lambda_1} = \lambda_1 \quad \text{e} \quad \sqrt{(\lambda\lambda_1)/\varepsilon} = \lambda = \lambda_2 = \lambda_3,$$

e quindi la corrispondente metrica g_ε è la metrica g di partenza. Pertanto, abbiamo la seguente

Proposizione 8.68. *Se le costanti λ_i che definiscono il gruppo di Lie $SU(2) \equiv \mathbb{S}^3$, soddisfano $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda > 0$, $\lambda_1 > 0$, allora la corrispondente metrica invariante a sinistra g è una metrica di Berger.*

Osservazione 8.69. Consideriamo i gruppi di Lie unimodulari con $\lambda_1 = 2$ della Proposizione 4.46: $SU(2)$, $SL(2, \mathbb{R})$ e Nil^3 . Sappiamo che tali gruppi ammettono una struttura riemanniana di contatto invariante a sinistra con campo vettoriale di Reeb $\xi = e_1$, e con il tensore h che soddisfa

$$2he_2 = (\lambda_3 - \lambda_2)e_2, \quad 2he_3 = -(\lambda_3 - \lambda_2)e_3,$$

e quindi $\text{tr}h^2 = -(\lambda_3 - \lambda_2)^2/2$. Dalla (8.29) segue che

$$\text{Ric}(\xi, \xi) = \text{Ric}_{11} = 2\mu_2\mu_3 = 2 - (\lambda_3 - \lambda_2)^2/2 = 2 - \text{tr}h^2 \leq 2,$$

e quindi $\text{Ric}(\xi, \xi) = 2$ se e solo se $h = 0$ (ovvero, la struttura è sasakiana). Inoltre, quando la struttura è sasakiana, ossia quando $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, dalla (8.29) segue che la curvatura scalare r è data da

$$r = \text{Ric}_{11} + \text{Ric}_{22} + \text{Ric}_{33} = 2(\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_2) = -2 + 4\lambda.$$

Pertanto, in tal caso i gruppi in esame sono caratterizzati dalla loro curvatura scalare, più precisamente si ha:

- $SU(2) \equiv \mathbb{S}^3$ se $r > -2$;
- $SL(2, \mathbb{R})$ se $r < -2$;
- Nil^3 se $r = -2$.

Osservazione 8.70. Dalla tabella delle derivate covarianti (8.28), segue che

$$\text{div}e_i := \text{tr}\nabla e_i = \sum_j g(\nabla_{e_j}e_i, e_j) = 0 \text{ per ogni } i = 1, 2, 3.$$

D'altronde, ogni campo vettoriale X invariante a sinistra è dato da $\sum_i a_i e_i$ con a_i costanti. Pertanto, possiamo affermare che: *ogni campo vettoriale invariante a sinistra su un gruppo di Lie 3D unimodulare ha divergenza nulla.*

Caso non-unimodulare

Iniziamo esaminando due Esempi.

Esempio 8.71. Il gruppo di Lie riemanniano $H^3(-k^2)$

Consideriamo lo spazio iperbolico $H^3(-k^2)$ con la struttura naturale di gruppo di Lie riemanniano, così come richiamata nell'Esempio 4.53, quindi con la metrica iperbolica g di curvatura sezionale costante $-k^2 < 0$ come metrica invariante a sinistra. Inoltre, con le notazioni usate nella Sottosezione 3.6.2, $H^3(-k^2)$ è il gruppo di Lie riemanniano non unimodulare definito dal prodotto semidiretto $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$, dove A è la matrice $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = k I_2$. Quindi, l'invariante di Milnor $\mathcal{D} = 4(\det A)/(\text{tr}A)^2 = 1$.

Esempio 8.72. Il gruppo di Lie riemanniano $H^2(-k^2) \times \mathbb{R}$

Consideriamo il gruppo di Lie riemanniano $\mathcal{G}_H = H^2(-k^2) \times \mathbb{R}$ con la metrica riemanniana prodotto g come metrica invariante a sinistra. Come visto nell'Esempio 4.52, \mathcal{G}_H è il gruppo di Lie riemanniano non unimodulare definito dal prodotto semidiretto $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$, dove A è la matrice $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, quindi con l'invariante di Milnor $\mathcal{D} = 0$. In questo caso, siccome g è la metrica prodotto, la base ortonormale $(e_1, e_2, e_3) = (V_1, V_2, V_3)$ (considerata nell'Esempio 4.52) diagonalizza il tensore di Ricci con $Ric_{22} = 0$, $Ric_{11} = Ric_{33} = -k^2$. Inoltre, la curvatura scalare $r = -2k^2 < 0$.

Consideriamo ora un arbitrario gruppo di Lie semplicemente connesso \mathcal{G} non-unimodulare $3D$. Dalla Sottosezione 3.6.2 segue che esiste una base di campi vettoriali invarianti a sinistra (e_1, e_2, e_3) tale che

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_3, e_1] = ae_1 + ce_2, \quad [e_3, e_2] = be_1 + de_2, \quad a + d \neq 0. \quad (8.30)$$

La metrica riemanniana invariante a sinistra g definita da $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ si dice *metrica canonica invariante a sinistra* su \mathcal{G} .

La connessione di Levi-Civita ∇ associata a questa metrica riemanniana g , usando la (8.30) e la formula di Koszul (6.8), è data da

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{e_1} e_1 = ae_3, \quad \nabla_{e_1} e_2 = \frac{b+c}{2} e_3, \quad \nabla_{e_1} e_3 = -ae_1 - \frac{b+c}{2} e_2, \\ \nabla_{e_2} e_1 = \frac{b+c}{2} e_3, \quad \nabla_{e_2} e_2 = de_3, \quad \nabla_{e_2} e_3 = -\frac{b+c}{2} e_1 - de_2, \\ \nabla_{e_3} e_1 = \frac{c-b}{2} e_2, \quad \nabla_{e_3} e_2 = \frac{b-c}{2} e_1, \quad \nabla_{e_3} e_3 = 0. \end{array} \right. \quad (8.31)$$

Di conseguenza, si può determinare il tensore di curvatura:

$$R(e_1, e_2)e_3 = \dots = 0; \quad R(e_1, e_2)e_2 = \dots = \left(ad - \frac{(b+c)^2}{4} \right) e_1;$$

$$R(e_1, e_3)e_3 = \dots = \left(a^2 + \frac{(b+c)c}{2} + \frac{c^2 - b^2}{2} \right) e_1 + (ab + cd)e_2;$$

$$R(e_2, e_3)e_3 = \dots = (ab + cd)e_1 + \left(d^2 + \frac{(b+c)c}{2} - \frac{c^2 - b^2}{2} \right) e_2.$$

Pertanto, le componenti $Ric_{ij} = Ric(e_i, e_j)$ del tensore di Ricci sono date da:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ric_{11} = -R_{1221} - R_{1331} = -a(a+d) + (b^2 - c^2)/2, \\ \quad \quad \quad Ric_{12} = R_{1323} = -(ab + cd), \\ \quad \quad \quad Ric_{13} = R_{1232} = 0, \quad Ric_{23} = R_{2131} = 0, \\ Ric_{22} = -R_{1221} - R_{2332} = -d(a+d) - (b^2 - c^2)/2, \\ Ric_{33} = -R_{2332} - R_{1331} = -(a^2 + d^2) - (b+c)^2/2, \end{array} \right. \quad (8.32)$$

e la curvatura scalare

$$r = Ric_{11} + Ric_{22} + Ric_{33} = -(a+d)^2 - (a^2 + d^2) - (b+c)^2/2 < 0.$$

Se $(ab + cd) \neq 0$, mediante un'opportuna rotazione nel nucleo unimodulare $\mathfrak{u} = \text{span}(e_1, e_2)$, possiamo sostituire la base ortonormale (e_1, e_2) con una nuova base ortonormale di \mathfrak{u} in corrispondenza della quale si ha $(ab + cd) = 0$. Pertanto, senza perdere in generalità, possiamo assumere che la base (e_1, e_2, e_3) diagonalizzi il tensore di Ricci. Allora, (\mathcal{G}, g) è a curvatura sezionale costante se e solo se $Ric_{11} = Ric_{22} = Ric_{33}$, ossia

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = ad - bc. \quad (8.33)$$

Esaminando le condizioni (8.33), insieme alle condizioni $ab + cd = 0$ e $a + d \neq 0$, si ottiene che necessariamente $a \neq 0$. Inoltre, distinguendo i casi $b = 0$ e $b \neq 0$ si ha quanto segue.

- Se $b = 0$, si ottiene $c = b = 0$ e $d = a \neq 0$, e quindi

$$Ric_{11} = Ric_{22} = Ric_{33} = -2a^2.$$

In questo caso la metrica g ha curvatura sezionale costante $-a^2$, l'invariante di Milnor $\mathcal{D} = 1$ e (\mathcal{G}, g) è isomorfo e isometrico al gruppo di Lie dell'Esempio 8.71 con $k = a$. Sostituendo e_3 con $-e_3$, se necessario, possiamo assumere $a > 0$. Di conseguenza, al variare di $a > 0$, si ottengono gruppi di Lie riemanniani isomorfi con metriche omotetiche (ma non isometriche).

- Se $b \neq 0$, si ottiene facilmente $c = -b \neq 0$ e $d = a \neq 0$. Anche in questo caso, la metrica g ha curvatura sezionale costante negativa $-a^2$ e la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ con l'invariante di Milnor $\mathcal{D} = (a^2 + b^2)/a^2 > 1$.

Sostituendo e_3 con $-e_3$, se necessario, possiamo assumere $a, b > 0$. Fissato $a > 0$, al variare di $b > 0$, si hanno infiniti gruppi di Lie riemanniani non isomorfi ma con metriche isometriche.

Pertanto, tenendo anche conto della classificazione dei gruppi Lie non-unimodulari 3D (cfr. Sottosezione 3.6.2), si ha il seguente

Teorema 8.73. *Sia (\mathcal{G}, g) un gruppo di Lie riemanniano non-unimodulare semplicemente connesso 3D. Allora, g ha curvatura scalare costante negativa. Inoltre, g ha curvatura sezionale costante se, e solo se, tale costante è negativa e (\mathcal{G}, g) è un prodotto semidiretto, con g metrica canonica invariante a sinistra, definito da uno dei seguenti casi:*

- 1) $\mathcal{G} = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ con $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a > 0$, ossia $\mathcal{G} = H^3(-a^2)$ e g

è una metrica iperbolica. In questo caso $\mathcal{D} = 1$ ed esistono infiniti gruppi di Lie riemanniani, isomorfi come gruppi di Lie e con metriche invarianti a sinistra omotetiche (ma non isometriche).

2) $\mathcal{G} = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ con $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b > 0$. In questo caso $\mathcal{D} > 1$ e, fissato $a > 0$, esistono infiniti gruppi di Lie riemanniani, non isomorfi come gruppi di Lie e con metriche invarianti a sinistra isometriche.

Osservazione 8.74. Consideriamo il gruppo di Lie semplicemente connesso non-unimodulare \mathcal{G} definito dal prodotto semidiretto $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ dove $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$. Nella Proposizione 4.49 abbiamo visto che tale gruppo di Lie ammette una struttura riemanniana di contatto invariante a sinistra (η, g) con campo vettoriale di Reeb $\xi = e_2$, e con il tensore h che soddisfa

$$2he_1 = be_1, \quad 2he_3 = -be_3,$$

e quindi $\text{tr}h^2 = -b^2/2$. D'altronde, dalla (8.32) segue che

$$\begin{aligned} Ric(\xi, \xi) = Ric_{22} &= -d(a+d) - (b^2 - c^2)/2 = 2 - b^2/2 = 2 - \text{tr}h^2 \leq 2, \quad e \\ Ric(\xi, \xi) &= 2 \text{ se, e solo se, } h = 0 \text{ (ovvero, la struttura è sasakiana)}. \end{aligned}$$

Quando la struttura è sasakiana, ossia quando $b = 0$, dalla (8.32) segue che il gruppo di Lie in esame ha curvatura scalare

$$r = Ric_{11} + Ric_{22} + Ric_{33} = 2 - a^2 - 2 - a^2 - 2 = -2a^2 - 2 < -2.$$

Inoltre, in tal caso, il gruppo di Lie non-unimodulare \mathcal{G} è isomorfo al gruppo di Lie $H^2(-a^2) \times \mathbb{R}$ (cfr. Proposizione 3.33). Tuttavia, il gruppo di Lie riemanniano (\mathcal{G}, g) non è isometrico al prodotto riemanniano $H^2(-a^2) \times \mathbb{R}$. Infatti, la metrica canonica g di \mathcal{G} ha curvatura scalare $r = -2a^2 - 2$, mentre la metrica prodotto ha curvatura scalare $r = -2a^2$.

Osservazione 8.75. Nel caso dei gruppi di Lie unimodulari $3D$, abbiamo osservato che ogni campo vettoriale invariante a sinistra ha divergenza nulla. Nel caso dei gruppi di Lie non-unimodulari $3D$, dalla (8.31) segue che

$$\text{dive}_3 = g(\nabla_{e_1} e_3, e_1) + g(\nabla_{e_2} e_3, e_2) + g(\nabla_{e_3} e_3, e_3) = -(a+d) \neq 0.$$

Pertanto, nel caso dei gruppi di Lie non-unimodulari $3D$, *esistono campi vettoriali invarianti a sinistra con divergenza non nulla.*

8.10 Solitoni di Ricci

I solitoni di Ricci sono importanti per il loro legame con il flusso di Ricci e la comprensione delle sue singolarità. Iniziamo con una breve presentazione del flusso di Ricci introdotto da Hamilton [45].

Flusso di Ricci

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n e sia $g(t)$ una famiglia differenziabile di metriche riemanniane su M con $g(0) = g_0$ e t variabile in

qualche intervallo di \mathbb{R} . La curva di metriche $g(t)$ si dice flusso di Ricci se soddisfa l'equazione tensoriale

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric(t) \quad (8.34)$$

dove $Ric(t)$ è il tensore di Ricci che corrisponde alla metrica $g(t)$. L'equazione (8.34) è detta *equazione del flusso di Ricci* e descrive l'evoluzione nel tempo della metrica $g(t)$. In coordinate locali, l'equazione (8.34) corrisponde a un sistema non lineare di $n(n-1)/2$ equazioni differenziali (alle derivate parziali):

$$\frac{\partial g_{ij}(t)}{\partial t} = -2Ric_{ij}(t) \quad (8.35)$$

dove $g_{ij}(t) = g(t)(\partial_i, \partial_j)$ e $Ric_{ij}(t) = Ric(t)(\partial_i, \partial_j)$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $i = 1, \dots, n$.

Hamilton [45] provò esistenza e unicità del flusso di Ricci:

se (M, g_0) è una varietà riemanniana compatta, allora esiste un'unica soluzione $g(t)$, $t \in [0, T_{max})$, con $g(0) = g_0$, dell'equazione (8.34).

Un'importante osservazione sull'equazione (8.34) del flusso di Ricci è la seguente e riguarda la sua presentazione in termini di coordinate armoniche. Ricordiamo che le componenti del tensore di Ricci di una metrica riemanniana g , rispetto a un sistema di coordinate locali, sono date da (cfr. [10] p.144):

$$Ric_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{r,s} g^{rs} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_r \partial x_s} + \frac{1}{2} \sum_r \left(g^{ri} \frac{\partial \Gamma^r}{\partial x_j} + g^{rj} \frac{\partial \Gamma^r}{\partial x_i} \right) + \mathcal{Q}(g, \partial g),$$

dove

$$\Gamma^r := \sum_{i,j} g^{ij} \Gamma_{ij}^r = \Delta x_r \quad (\Delta \text{ è il laplaciano})$$

e $\mathcal{Q}(g, \partial g)$ è un termine quadratico in g e nelle sue derivate parziali prime (quindi di ordine inferiore rispetto al laplaciano). In particolare, rispetto a coordinate armoniche (cfr. Osservazione B.3), $\Gamma^r = \Delta x_r = 0$, e quindi l'equazione precedente diventa

$$Ric_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{r,s} g^{rs} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_r \partial x_s} + \mathcal{Q}(g, \partial g). \quad (8.36)$$

D'altronde, rispetto a coordinate armoniche, il laplaciano è dato dalla (2.8) dell'Appendice B e quindi

$$\Delta g_{ij} = - \sum_{r,s} g^{rs} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_r \partial x_s}. \quad (8.37)$$

Tenendo conto della (8.36) e della (8.37), il sistema (8.35) di equazioni alle derivate parziali del flusso di Ricci, rispetto a un sistema di coordinate locali armoniche, è dato da

$$\frac{\partial g_{ij}(t)}{\partial t} = -\Delta g_{ij} - 2\mathcal{Q}_{ij}(g, \partial g).$$

Pertanto, l'equazione del flusso di Ricci è formalmente simile all'*equazione del calore* (a meno del termine $\mathcal{Q}(g, \partial g)$ di ordine inferiore rispetto al laplaciano). Questa osservazione in qualche modo è una giustificazione per la scelta della (8.34) come evoluzione della g .

Esempio 8.76. Sia (M, g_0) una varietà riemanniana compatta di Einstein, $Ric(g_0) = \lambda_0 g_0$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Sapendo che si ha esistenza e unicità del flusso, possiamo considerare metriche omotetiche e trovare una soluzione per questa curva di metriche. Sia quindi $g(t) = \lambda(t)g_0$ una curva differenziabile di metriche riemanniane su M con $\lambda(0) = 1$, quindi $\lambda(t)$ è differenziabile e $\lambda(t) > 0$. Assumiamo che $g(t)$ sia soluzione dell'equazione (8.34), quindi:

$$-2Ric(t) = \frac{\partial g(t)}{\partial t} = \lambda'(t)g_0.$$

D'altronde sappiamo che metriche omotetiche, come sono $g(t)$ e g_0 , hanno stesso tensore di Ricci: $Ric(t) = Ric(0) = \lambda_0 g_0$, per cui l'equazione precedente diventa

$$\lambda'(t) = -2\lambda_0.$$

Pertanto, si ha $\lambda(t) = 1 - 2\lambda_0 t$, e quindi

$$g(t) = (1 - 2\lambda_0 t)g_0$$

è soluzione dell'equazione del flusso di Ricci. Tale soluzione presenta una singolarità per $t = 1/2\lambda_0$, ed è definita:

per $t \in [0, 1/2\lambda_0)$ se $\lambda_0 > 0$ e per $t \in [0, +\infty)$ se $\lambda_0 < 0$.

Esaminiamo ora i seguenti casi particolari.

- Se (M, g_0) è Ricci piatta, e in particolare se (M, g_0) è piatta, il flusso di Ricci è stazionario : $g(t) = g_0$.
- Se (M, g_0) è la sfera canonica $\mathbb{S}^n(1)$ di raggio $R = 1$, $Ric(g_0) = (n-1)g_0$, e lungo il flusso

$$g(t) = (1 - 2(n-1)t)g_0, \quad t \in [0, \frac{1}{2(n-1)}),$$

$\lambda(t) = (1 - 2(n-1)t) \leq 1$. Quindi durante il flusso la metrica $g(t)$ contrae il raggio $R(t) = \sqrt{\lambda(t)}$, la curvatura $K(t) = 1/R^2(t)$ aumenta, e il volume decresce. Al tempo finale $T_{max} = 1/2(n-1)$ il flusso si estingue, ossia si ha una singolarità, e per $t \rightarrow T_{max}$ raggio e volume vanno a zero, e la curvatura va all'infinito, in ogni punto.

• Se (M, g_0) è una varietà riemanniana iperbolica compatta con curvatura sezionale $K = -1$, $Ric(g_0) = -(n-1)g_0$, e lungo il flusso

$$g(t) = (1 + 2(n-1)t)g_0, \quad t \in [0, +\infty).$$

In questo caso il flusso esiste indefinitamente ossia per ogni $t \geq 0$, e per $t \rightarrow +\infty$ la curvatura tende a zero e il volume tende all'infinito.

R. S. Hamilton, usando il flusso di Ricci, dimostrò il seguente risultato.

Teorema 8.77. ([45]) *Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta di dimensione 3. Se il tensore di Ricci è definito positivo, ossia $Ric(X, X) > 0$ per ogni $X \neq 0$, allora la metrica g si può deformare a una metrica riemanniana a curvatura sezionale costante > 0 . In particolare, se M è anche semplicemente connessa, allora M è omeomorfa alla sfera \mathbb{S}^3 .*

Questo risultato di Hamilton portava credibilità alla *congettura di Poincaré* formulata nel 1904: “ogni varietà compatta semplicemente connessa di dimensione 3 è omeomorfa alla sfera \mathbb{S}^3 ”. In effetti, come accennato all'inizio della Sezione 8.7, Grigori Perelman usando e sviluppando la teoria del flusso di Ricci introdotta da Hamilton [45], è riuscito a dimostrare la congettura di Poincaré. Più precisamente, Perelman usando la teoria del flusso di Ricci ha dimostrato la congettura di geometrizzazione di Thurston (formulata dallo stesso Thurston nel 1982) che è un pò più complicata da enunciare rispetto a quella di Poincaré, e che contiene come caso particolare la stessa congettura di Poincaré.

Osservazione 8.78. È ben noto che una varietà M , compatta orientabile e di dimensione 3, ammette una 1-forma di contatto η , e quindi ammette una struttura riemanniana di contatto (ξ, η, g, φ) . Se la metrica associata g ha curvatura scalare r sufficientemente grande, allora g ha curvatura di Ricci positiva (cfr. [41]). Pertanto, applicando il Teorema 8.77 di Hamilton, g si può deformare a una metrica di curvatura sezionale costante positiva. Inoltre, se il campo vettoriale di Reeb ξ è di Killing e la curvatura scalare $r > -2$, M ammette una struttura riemanniana di contatto con curvatura sezionale positiva.

Per una presentazione di tecniche e idee che si sono sviluppate intorno alla risoluzione della congettura di Poincaré si possono vedere gli articoli [4], [6] e [70].

Solitoni di Ricci

Il concetto di solitone di Ricci fu introdotto da Hamilton [46] come una naturale generalizzazione delle metriche di Einstein. Per uno studio approfondito sui solitoni di Ricci si può consultare, ad esempio, [27], [109].

Definizione 8.79. Siano (M, g) una varietà riemanniana e X un campo vettoriale su M . La terna (M, g, X) si dice *solitone di Ricci* se esiste una costante λ tale che :

$$(1/2)\mathcal{L}_X g + Ric = \lambda g, \quad (8.38)$$

dove \mathcal{L}_X denota la derivata di Lie (cfr. Sezione 2.7).

Un solitone di Ricci si dice *expanding, steady o shrinking*, a seconda che sia $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ oppure $\lambda > 0$ rispettivamente. Se il campo vettoriale X è nullo oppure è di Killing, e quindi la metrica è di Einstein, il *solitone di Ricci* si dice *banale*.

I solitoni di Ricci si possono anche definire come soluzioni auto-similari del flusso di Ricci. Abbiamo visto che per una metrica di Einstein il flusso di Ricci è definito da metriche omotetiche. Generalizzando il comportamento delle metriche di Einstein, diamo la seguente definizione senza assumere M compatta. Data una varietà riemanniana (M, g_0) , una soluzione $g(t)$ con $g(0) = g_0$, dell'equazione del flusso di Ricci, si dice *autosimilare* se esiste una funzione positiva $\sigma(t)$ e una famiglia a un parametro ψ_t di diffeomorfismi di M , con $\sigma(0) = 1$ e $\psi_0 = I_d$, tali che:

$$g(t) = \sigma(t)\psi_t^* g_0.$$

In altre parole, tale metrica rappresenta un punto fisso del flusso di Ricci nel quoziente dello spazio delle metriche su M rispetto alla relazione di equivalenza che abbiamo descritta.

Dato un solitone di Ricci (M, g_0, X) , quindi con X (che assumiamo completo) e g_0 che soddisfano la (8.38), consideriamo una famiglia a un parametro di diffeomorfismi ψ_t di M , con $\psi_0 = I_d$, indotta dal campo vettoriale tempo-dipendente $Y_t = \sigma^{-1}(t)X$, dove $\sigma(t) = (1 - 2\lambda t) > 0$, ossia

$$Y_t(\psi_t(p)) = \partial_t \psi_t(p).$$

Allora

$$g(t) = \sigma(t)\psi_t^* g_0$$

è un flusso di Ricci con $g(0) = g_0$. Infatti, derivando si ha (cfr. anche [109], p.9):

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = \sigma'(t)\psi_t^* g_0 + \sigma(t)\psi_t^*(\mathcal{L}_{Y_t} g_0),$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(t)}{\partial t} &= \psi_t^*(-2\lambda g_0 + \mathcal{L}_X g_0) = -2\psi_t^* Ric(g_0) \\ &= -2Ric(\psi_t^* g_0) = -2Ric(\sigma(t)\psi_t^* g_0) \\ &= -2Ric(g(t)). \end{aligned}$$

Pertanto: *i solitoni di Ricci sono soluzioni autosimilari del flusso di Ricci.* Il procedimento precedente si può invertire, ossia *una soluzione autosimilare del flusso di Ricci definisce un solitone di Ricci.* Per verificare ciò, data una soluzione autosimilare $g(t) = \sigma(t)\psi_t^*g_0$, consideriamo il campo vettoriale tempo-dipendente $Y_t = Y(t)$ definito dalla famiglia a un parametro di diffeomorfismi ψ_t . Derivando si ha

$$\begin{aligned} -2Ric(g(t)) &= \frac{\partial g(t)}{\partial t} = \sigma'(t)\psi_t^*g_0 + \sigma(t)\psi_t^*(\mathcal{L}_Y g_0) \\ &= \sigma'(t)\psi_t^*g_0 + \psi_t^*(\mathcal{L}_X g_0), \quad X = X(t) = \sigma(t)Y(t). \end{aligned}$$

Siccome $Ric(g(t)) = Ric(\sigma(t)\psi_t^*g_0) = Ric(\psi_t^*g_0) = \psi_t^*Ric(g_0)$, la precedente equazione implica

$$-2Ric(g_0) = \sigma'(t)g_0 + (\mathcal{L}_{X_t}g_0),$$

e quindi per $t = 0$, posto $2\lambda = -\sigma'(0)$ e $X_0 = X(0)$, si ottiene

$$Ric(g_0) + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{X_0}g_0) = \lambda g_0.$$

Quindi (M, g_0, X_0) è un solitone di Ricci.

Osservazione 8.80. Sia (M, g, X) un solitone di Ricci con costante λ : $(1/2)L_X g + Ric = \lambda g$. Siccome metriche omotetiche hanno lo stesso tensore di Ricci, allora

$$(M, \tilde{g} = \mu g, \tilde{X} = (1/\mu)X), \quad \mu > 0,$$

è un solitone di Ricci con costante $\tilde{\lambda} = \lambda/\mu$.

Osservazione 8.81. Siano (M, g, X_1) , (M, g, X_2) due solitoni di Ricci con costanti $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Allora, il campo vettoriale $X = X_2 - X_1$ è omotetico:

$$L_X g = 2(\lambda_2 - \lambda_1)g.$$

Osservazione 8.82. Il prodotto riemanniano di due solitoni di Ricci che hanno la stessa costante, (M_1, g_1, X_1, λ) , (M_2, g_2, X_2, λ) , è ancora un solitone di Ricci. Basta tener presente la connessione di Levi-Civita e il tensore di Ricci di un prodotto riemanniano.

Solitoni di Ricci tipo gradiente

Un *solitone di Ricci* (M, g, X) è detto di *tipo gradiente* se il campo vettoriale X è il gradiente di qualche funzione $f \in \mathcal{F}(M)$: $X = \nabla f$, dove ∇ è la connessione di Levi-Civita. Dall'Osservazione 9.3 :

$$(1/2)(\mathcal{L}_{\nabla f}g) = Hess f \quad (\text{hessiano di } f).$$

Pertanto, un solitone di Ricci tipo gradiente si può esprimere con l'equazione

$$Ric + Hessf = \lambda g.$$

G. Perelman [82] provò che: *ogni solitone di Ricci compatto è di tipo gradiente.*

Infine, osserviamo che nelle dimensioni $n = 2, 3$, ogni solitone di Ricci compatto è di Einstein, e quindi a curvatura sezionale costante. Questo risultato è dovuto a Hamilton [46] per $n = 2$ e a Ivey [50] per $n = 3$. Inoltre, è noto che non esistono solitoni di Ricci compatti tipo expanding e steady [27]. Di seguito esaminiamo alcuni classici esempi di solitoni di Ricci non compatti.

Esempio 8.83. Il solitone gaussiano

Consideriamo lo spazio euclideo (\mathbb{R}^n, g_0) e la funzione $f(x) = (\lambda/2)\|x\|^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Allora, il campo vettoriale $V = \nabla^0 f = \lambda(x_1, \dots, x_n)$ e il suo derivato $\nabla_X^0 V = \lambda X$, dove ∇^0 è la connessione euclidea. Di conseguenza,

$$(\mathcal{L}_V g_0)(X, Y) = g_0(\nabla_X^0 V, Y) + g_0(X, \nabla_Y^0 V) = 2\lambda g_0(X, Y),$$

ossia

$$\mathcal{L}_V g_0 = 2\lambda g_0.$$

Pertanto, siccome il tensore di Ricci della metrica euclidea è nullo, (\mathbb{R}^n, g_0, V) è un non-steady solitone di Ricci tipo gradiente, detto *solitone gaussiano*.

Esempio 8.84. Cylinder shrinking soliton

Sia (M, g) la varietà riemanniana prodotto $\mathbb{S}_R^{n-1} \times \mathbb{R}$, $n \geq 3$, dove \mathbb{S}_R^{n-1} è la sfera di raggio $R = \sqrt{2(n-1)}$. Quindi,

$$g = g_0 + dt \otimes dt \quad \text{con } g_0 \text{ metrica canonica di } \mathbb{S}_R^{n-1}.$$

La g è una metrica riemanniana prodotto, per cui il suo tensore di Ricci

$$Ric(g) = Ric(g_0) = (1/2)g_0.$$

Consideriamo la funzione f definita da

$$f(x, t) = t^2/4 \quad \forall (x, t) \in \mathbb{S}_R^{n-1} \times \mathbb{R}.$$

$Hessf$ è dato da (cfr. Appendice B.1)

$$(Hessf)(X, Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y).$$

Tenendo conto di come è definita la connessione di Levi-Civita di una metrica prodotto (cfr. Esercizio 6.52), si ha che il gradiente $\nabla f = (1/2)t\partial_t$ e

$$(Hessf)(X, Y) = (1/2)(dt \otimes dt)(X, Y).$$

Allora,

$$\text{Ric}(g) + \text{Hess}f = \frac{1}{2}(g_0 + dt \otimes dt) = \frac{1}{2}g.$$

Pertanto, (M, g, f) è un solitone di Ricci tipo gradiente con la costante $\lambda > 0$, che viene detto *cylinder shrinking soliton*.

Esempio 8.85. Hamilton's cigar soliton

Questo esempio, anche noto in Fisica come **Witten's black hole**, è dovuto a Hamilton. Consideriamo \mathbb{R}^2 con la metrica riemanniana (*the cigar metric*)

$$g = f(dx^2 + dy^2), \text{ dove } f(x, y) = 1/(1 + x^2 + y^2),$$

e la funzione

$$F(x, y) = -\log(1 + x^2 + y^2).$$

Facciamo vedere che (\mathbb{R}^2, g, F) è un steady solitone di Ricci di tipo gradiente con funzione potenziale F .

- La curvatura gaussiana.

Dall'Esercizio 6.54 sappiamo che

$$(E_1 = (1/\sqrt{f})\partial_x, E_2 = (1/\sqrt{f})\partial_y)$$

è una base g -ortonormale di campi vettoriali e la connessione di Levi-Civita ∇ soddisfa:

$$\nabla_{E_1}E_1 = (y/\sqrt{(1+x^2+y^2)})E_2, \quad \nabla_{E_1}E_2 = (-y/\sqrt{(1+x^2+y^2)})E_1.$$

$$\nabla_{E_2}E_1 = (-x/\sqrt{(1+x^2+y^2)})E_2, \quad \nabla_{E_2}E_2 = (x/\sqrt{(1+x^2+y^2)})E_1.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} R(E_1, E_2)E_1 &= -\nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_1 + \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_1 + \nabla_{[E_1, E_2]}E_1 \\ &= E_1\left(\frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)}}\right)E_2 + \frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)}}\nabla_{E_1}E_2 \\ &\quad + E_2\left(\frac{y}{\sqrt{(1+x^2+y^2)}}\right)E_2 + \frac{y}{\sqrt{(1+x^2+y^2)}}\nabla_{E_2}E_2 \\ &\quad - \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}E_2, \end{aligned}$$

e quindi la curvatura gaussiana

$$K = g(R(E_1, E_2)E_1, E_2) = 2/(1 + x^2 + y^2).$$

Poiché la varietà è 2-dimensionale, abbiamo $\text{Ric} = Kg$, ossia

$$\text{Ric} = \frac{2}{(1 + x^2 + y^2)}g.$$

- La derivata di Lie $\mathcal{L}_V g$, $V = \nabla F$.

Consideriamo la funzione $F(x, y) = -\log(1 + x^2 + y^2)$ è il campo vettoriale $V = \nabla F$. Rispetto alla base ortonormale E_1, E_2 , il campo vettoriale gradiente è definito da

$$\begin{aligned}\nabla F &= E_1(F)E_1 + E_2(F)E_2 = \frac{1}{f} \left(\partial_x(F)\partial_x + \partial_y(F)\partial_y \right) \\ &= (1 + x^2 + y^2) \left(\partial_x(F)\partial_x + \partial_y(F)\partial_y \right) \\ &= -2(x\partial_x + y\partial_y).\end{aligned}$$

Quindi

$$V = -2(x\partial_x + y\partial_y) = -2W,$$

dove W è il campo vettoriale radiale che si può anche esprimere con

$$W = \frac{x}{\sqrt{(1 + x^2 + y^2)}} E_1 + \frac{y}{\sqrt{(1 + x^2 + y^2)}} E_2.$$

Ora, preso $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, $X = X^1 E_1 + X^2 E_2$, calcoliamo $\nabla_X V$. Usando proprietà di ∇ e la tabella delle derivate covarianti $\nabla_{E_i} E_j$, con facili calcoli si ottiene

$$\nabla_X V = -2\nabla_X W = \frac{-2}{(1 + x^2 + y^2)} X.$$

D'altronde

$$(\mathcal{L}_V g)(X, Y) = g(\nabla_X V, Y) + g(X, \nabla_Y V) = -\frac{4}{1 + x^2 + y^2} g.$$

Pertanto, possiamo concludere che

$$(1/2)\mathcal{L}_V g + Ric = 0$$

e quindi (\mathbb{R}^2, g, V) è un steady solitone di Ricci tipo gradiente.

Osservazione 8.86. Questo solitone, introdotto da Hamilton in [46], è il primo esempio di solitone di Kähler-Ricci su varietà non compatte. Usando la coordinata complessa $z = x + iy$, la cigar metric su \mathbb{C} è $g = dzd\bar{z}/(1 + |z|^2)$.