Capitolo 12

Applicazioni armoniche

In questo capitolo vedremo che lo studio delle curve geodetiche fatto nella Sezione11.2 è un caso particolare di uno studio molto più generale, ovvero quello delle applicazioni armoniche. Tale studio ha avuto inizio con il famoso articolo di J. Eells e J.H. Sampson [34] del 1964.

Le applicazioni armoniche, di cui studieremo alcuni aspetti geometrici, sono soluzioni di un problema variazionale e appaiono in modo naturale, così come le curve geodetiche, in vari problemi di geometria riemanniana. Per ulteriori sviluppi e approfondimenti sulle applicazioni armoniche si rinvia a Urakawa [112] e Xin [124].

12.1 Il fibrato vettoriale $f^{-1}TM'$

Il fibrato vettoriale $f^{-1}TM'$ si rivelerà utile per lo studio delle applicazioni armoniche. Sia $f \in C^\infty(M, M')$ un'applicazione differenziabile tra le varietà differenziabili M ed M'. Poniamo $\dim M = n$ e $\dim M' = n'$. Sia TM' il fibrato tangente di M' con proiezione $\pi : TM' \to M'$. TM' è un fibrato vettoriale su M' di rango n' (cfr. Sezione 2.2).

Definizione 12.1. Un *campo di vettori lungo* f è un'applicazione differenziabile $u : M \longrightarrow TM'$ tale che $\pi \circ u = f$, quindi $u(p) \in T_{f(p)}M'$ per ogni $p \in M$.

L'insieme dei campi di vettori lungo f, con le usuali operazioni di somma e di prodotto per numeri reali, è uno spazio vettoriale reale (di dimensione infinita) che denotiamo con $\mathfrak{X}(f)$, esso è anche un $\mathcal{F}(M)$-modulo. Sia $(f^{-1}TM' = \dot{\bigcup}_{p\in M} T_{f(p)}M', \pi, M)$ il *pull back del fibrato tangente* TM' via f, dove

$$\pi : f^{-1}TM' \longrightarrow M\,, \quad X_{f(p)} \longmapsto p.$$

Tale fibrato, indicato anche con f^*TM', è un fibrato vettoriale su M di rango n'. L'insieme delle sezioni del fibrato vettoriale $f^{-1}TM'$ è esattamente $\mathfrak{X}(f)$. Una sezione X di TM', ovvero un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M')$, induce una sezione $\bar{X}$ di $f^{-1}TM'$, detto *sollevamento* di X. La sezione $\bar{X} \in \mathfrak{X}(f)$ è così definita:

$$\bar{X} : M \longrightarrow f^{-1}TM', \quad p \longmapsto \bar{X}_p = X_{f(p)} = (X \circ f)(p).$$

Se $a \in \mathcal{F}(M')$, il suo sollevamento è la funzione $\overline{a} = a \circ f \in \mathcal{F}(M)$. Se $Y = a\,X$, si ha $\overline{Y} = \overline{a}\,\bar{X}$. Se $\big(V, (y_\alpha)\big)$ è una carta locale di M', i sollevamenti dei campi di vettori coordinati $\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \in \mathfrak{X}(V)$ si indicano con

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \overline{y}_\alpha} :& f^{-1}(V) \longrightarrow f^{-1}TV \\ & p \longmapsto \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{y}_\alpha}\Big)_{f(p)} = \Big(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\Big)_{f(p)} = \Big(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ f\Big)(p). \end{aligned}$$

$\big(\frac{\partial}{\partial \overline{y}_\alpha}\big)_{\alpha=1,\dots,n'}$ è una base locale per $\mathfrak{X}(f)$. Sia $u \in \mathfrak{X}(f)$, usando coordinate locali, poiché il vettore $u(p) \in T_{f(p)}M'$, si ha

$$u(p) = \sum_{\alpha=1}^{n'} u^\alpha(p) \Big(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\Big)_{f(p)} = \Big(\sum_{\alpha=1}^{n'} u^\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ f\Big)(p) \quad \text{e quindi}$$

$$u = \sum_{\alpha=1}^{n'} u^\alpha \frac{\partial}{\partial \overline{y}_\alpha},$$

dove $u^\alpha \in \mathcal{F}(U)$ e U è un aperto di M con $f(U) \subset$V. In particolare, se $X \in \mathfrak{X}(M')$, localmente $X = \sum_{\alpha=1}^{n'} X^\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha}$, allora

$$\bar{X} = \sum_{\alpha=1}^{n'} (\bar{X}^\alpha \circ f) \frac{\partial}{\partial \overline{y}_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{n'} (X^\alpha \circ f)\, \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ f.$$

Sia ora $X \in \mathfrak{X}(M)$. Con f_*X denotiamo la seguente applicazione

$$f_*X : M \longrightarrow f^{-1}TM', \quad p \longmapsto (f_*X)(p) := f_{*p}(X_p) \in T_{f(p)}M',$$

quindi $\pi \circ (f_*X) = f$. Localmente, posto

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad f^\alpha = y_\alpha \circ f,$$

abbiamo

$$\begin{aligned} f_{*p}X_p &= \sum_{\alpha=1}^{n'} (f_{*p}X_p)(y_\alpha) \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(p)} = \sum_{\alpha=1}^{n'} X_p(f^\alpha) \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(p)} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n'} \left(\sum_{i=1}^{n} X^i(p) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i}(p)\right) \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ f\right)(p) = \sum_{\alpha=1}^{n'} u^\alpha(p) \left(\frac{\partial}{\partial \overline{y}_\alpha}\right)_p, \end{aligned}$$

dove le $u^\alpha = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i}$ sono differenziabili, quindi $f_*X \in \mathfrak{X}(f)$. Inoltre, se $\lambda \in \mathcal{F}(M)$, dalla formula precedente segue che $f_*(\lambda X) = \lambda f_*(X)$. Quindi, abbiamo la seguente proposizione.

Proposizione 12.2. *Per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ e per ogni $\lambda \in \mathcal{F}(M)$, si ha*
$$f_*X \in \mathfrak{X}(f) \ \text{ e } \ f_*(\lambda X) = \lambda f_* X.$$
Localmente:
$$f_*X = \sum_{\alpha=1}^{n'} \left(\sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial \overline{y}_\alpha}. \tag{12.1}$$

In particolare:
$$f_* \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{\alpha=1}^{n'} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \overline{y}_\alpha}.$$

Connessione e metrica indotte su $f^{-1}TM'$

Sia g' una metrica riemanniana su M'. La connessione di Levi-Civita ∇' di (M', g') induce in modo naturale una connessione $\bar{\nabla}$ sul fibrato $f^{-1}TM'$. Sia $\frac{D'}{\mathrm{d}t}$ l'operatore di derivazione covariante (indotto da ∇') per campi di vettori lungo curve differenziabili di M'.

Per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ e per ogni $u \in \mathfrak{X}(f)$, vogliamo definire $\bar{\nabla}_X u$. Consideriamo $\gamma(t)$ curva differenziabile di M con $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = X_p$. Allora, $\tilde{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$ è un curva differenziabile di M', $u(t) = u(\gamma(t)) \in T_{\tilde{\gamma}(t)}M'$ è un campo di vettori lungo $\tilde{\gamma}(t)$, cioè $u(t) \in \mathfrak{X}(\tilde{\gamma})$, e $f_{*p}X_p = f_{*p}\dot{\gamma}(0) = \dot{\tilde{\gamma}}(0)$. Dalla (6.4) si ha
$$\begin{aligned}\left(\frac{D'u(t)}{\mathrm{d}t}\right)(0) &= \sum_\alpha \left(\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}t}(0) + \sum_{\beta,\gamma} \frac{\mathrm{d}y_\beta}{\mathrm{d}t}(0)\, u^\gamma(0)\, {\Gamma'}^\alpha_{\beta\gamma}(0) \right) \left(\tfrac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)(\gamma(0)) \\ &= \sum_\alpha \left(X_p(u^\alpha) + \sum_{\beta,\gamma} X_p^\beta\, u^\gamma(p)\, {\Gamma'}^\alpha_{\beta\gamma}(f(p)) \right) \left(\tfrac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(p)},\end{aligned}$$

e quindi $\left(\dfrac{D'u(t)}{\mathrm{d}t}\right)(0)$ dipende solo da X_p e u. Pertanto, si pone:
$$\left(\bar{\nabla}_X u\right)_p = \bar{\nabla}_{X_p} u = {\nabla'}_{f_* X_p} u := \left(\frac{D'u(t)}{\mathrm{d}t}\right)(0) \in T_{f(p)}M'. \tag{12.2}$$

Nel caso in cui $f = \sigma : I \longrightarrow M'$ è una curva differenziabile, si vede facilmente che $\bar{\nabla}$ è l'usuale operatore di derivazione covariante $\frac{D'}{dt}$ su M' per campi di vettori definiti lungo σ. $\bar{\nabla}$ si può anche pensare come *l'operatore di derivazione covariante* su M' *per campi di vettori lungo* f. Se consideriamo

$u = \dfrac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} = \dfrac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ f$, allora $u(t) = \Big(\dfrac{\partial}{\partial y_\alpha}\Big)(\tilde{\gamma}(t))$ è indotto dal campo di vettori $\frac{\partial}{\partial y_\alpha}$ che è definito su un aperto di M', per cui

$$\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(o)} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} = \frac{D' u(t)}{\mathrm{d}t}(0) = \nabla'_{\dot{\tilde{\gamma}}(0)} \frac{\partial}{\partial y_\alpha}.$$

Di conseguenza, dalla (12.2) segue che

$$\big(\bar{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha}\big)_p = \nabla'_{\dot{\tilde{\gamma}}(0)} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \nabla'_{f_* X_p} \frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \quad \text{ossia} \quad \bar{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} = \nabla'_{f_* X} \frac{\partial}{\partial y_\alpha}.$$

Più in generale, per ogni $Y \in \mathfrak{X}(M')$ si ha

$$\big(\bar{\nabla}_X \bar{Y}\big)_p = \nabla'_{f_* X_p} Y = \big(\nabla'_{f_* X} Y\big)_p ,$$

ossia

$$\bar{\nabla}_X \bar{Y} = \nabla'_{f_* X} Y. \tag{12.3}$$

A volte, implicitamente, si usa la notazione

$$\nabla'_{f_* X} f_* Y = \bar{\nabla}_X f_* Y \qquad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Dalla (12.3) seguono

$$\bar{\nabla}_{X+Y} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} = \bar{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} + \bar{\nabla}_Y \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha}, \tag{12.4}$$

$$\bar{\nabla}_{\varphi X} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} = \varphi \bar{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha}, \tag{12.5}$$

per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e per ogni $\varphi \in \mathcal{F}(M)$. Usando le equazioni (12.2), (12.4), (12.5), si prova facilmente che

$$\bar{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(f) \longrightarrow \mathfrak{X}(f)\,, (X, u) \longmapsto \bar{\nabla}_X u,$$

definisce una connessione lineare sul fibrato $f^{-1}TM'$, ossia sono soddisfatte le seguenti proprietà:

(*a*) $\bar{\nabla}_{X+Y} u = \bar{\nabla}_X u + \bar{\nabla}_Y u, \quad \bar{\nabla}_{\varphi X} u = \varphi \bar{\nabla}_X u,$

(*b*) $\bar{\nabla}_X (u + v) = \bar{\nabla}_X u + \bar{\nabla}_X v, \quad \bar{\nabla}_X \varphi u = X(\varphi) u + \varphi \bar{\nabla}_X u,$

per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $u, v \in \mathfrak{X}(f)$ e $\varphi \in \mathcal{F}(M)$. In particolare, la seconda della (b) segue da:

$$\begin{aligned}\big(\bar{\nabla}_X \varphi u\big)_p = \bar{\nabla}_{X_p} \varphi u = \left(\frac{D'}{\mathrm{d}t}(\varphi u)(t)\right)(0) &= \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(0)\, u(0) + \varphi(0) \frac{D' u}{\mathrm{d}t}(0)\\ &= X_p(\varphi)\, u(p) + \varphi(p) \bar{\nabla}_{X_p} u = \big(X(\varphi)\, u + \varphi \bar{\nabla}_X u\big)_p.\end{aligned}$$

La differenziabilità di $\bar{\nabla}_X u$ segue dalle seguenti considerazioni locali.

Se $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ e $(y_\alpha)_{\alpha=1,\dots,n'}$ denotano coordinate locali definite rispettivamente in un aperto $U \subset M$ e in un aperto $V \subset M'$, con $f(U) \subset V$, allora per ogni $p \in U$:

$$\begin{aligned}\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha}\right)_p &= \bar{\nabla}_{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} = \nabla'_{f_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \\ &= \sum_\beta \left(\frac{\partial f^\beta}{\partial x_i}\right)_p \nabla'_{\left(\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)_{f(p)}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \\ &= \left(\sum_\beta \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \left(\nabla'_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right) \circ f\right)(p),\end{aligned}$$

ossia

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} = \sum_\beta \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \left(\nabla'_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right) \circ f = \sum_\beta \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \overline{\nabla'_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha}}\ .$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}\sum_\beta \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \left(\nabla'_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right) \circ f &= \sum_{\beta,\gamma} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \big(\Gamma'^{\gamma}_{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial y_\gamma}\big) \circ f \\ &= \sum_{\beta,\gamma} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \big(\Gamma'^{\gamma}_{\beta\alpha} \circ f\big)\big(\frac{\partial}{\partial y_\gamma} \circ f\big) \\ &= \sum_\gamma \left(\sum_\beta \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \bar{\Gamma}^\gamma_{\beta\alpha}\right) \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\gamma},\end{aligned}$$

dove $\Gamma'^{\gamma}_{\beta\alpha}$ sono i coefficienti della connessione di Levi-Civita ∇' di (M', g') e

$$\bar{\Gamma}^\gamma_{\beta\alpha} = \Gamma'^{\gamma}_{\beta\alpha} \circ f = \Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta} \circ f = \bar{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}.$$

Quindi i coefficienti $\tilde{\Gamma}^\gamma_{i\alpha}$ della connessione $\bar{\nabla}$ sono dati da:

$$\tilde{\Gamma}^\gamma_{i\alpha} = \sum_\beta \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \bar{\Gamma}^\gamma_{\beta\alpha} = \sum_\beta \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta} \circ f. \tag{12.6}$$

Scelti arbitrariamente i campi di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $u \in \mathfrak{X}(f)$, essi si esprimono localmente come

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad u = \sum_{\alpha=1}^{n'} u^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} \quad \text{con } X^i, u^\alpha \in \mathcal{F}(U).$$

Allora, usando le proprietà di $\bar{\nabla}$, si ha

$$\bar{\nabla}_X u = \sum_{\alpha=1}^{n'} \Big(u^\alpha\, \bar{\nabla}_X \tfrac{\partial}{\partial \overline{y}_\alpha} + X(u^\alpha)\, \frac{\partial}{\partial \overline{y}_\alpha} \Big) = \sum_{\alpha=1}^{n'} \Big(u^\alpha\, \nabla'_{f_* X} \tfrac{\partial}{\partial y_\alpha} + X(u^\alpha)\, \frac{\partial}{\partial \overline{y}_\alpha} \Big).$$

In particolare, per $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, posto $f_* Z = \sum_\alpha u^\alpha \frac{\partial}{\partial \overline{y}_\alpha}$ con $u^\alpha \in \mathcal{F}(U)$, si ha

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_Y f_* Z &= \sum_{\alpha=1}^{n'} \Big(u^\alpha \nabla'_{f_* Y} \tfrac{\partial}{\partial y_\alpha} + Y\big(u^\alpha\big) \tfrac{\partial}{\partial \overline{y}_\alpha} \Big), \\
\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y f_* Z &= \sum_{\alpha=1}^{n'} \Big(u^\alpha \nabla'_{f_* X} \nabla'_{f_* Y} \tfrac{\partial}{\partial y_\alpha} + X\big(u^\alpha\big) \nabla'_{f_* Y} \tfrac{\partial}{\partial y_\alpha} \Big) \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^{n'} \Big(X\big(Y(u^\alpha)\big) \tfrac{\partial}{\partial \overline{y}_\alpha} + Y\big(u^\alpha\big) \nabla'_{f_* X} \tfrac{\partial}{\partial y_\alpha} \Big).
\end{aligned}$$

Di conseguenza, per ogni $p \in M$, si ha

$$\Big(- \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y f_* Z + \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X f_* Z + \bar{\nabla}_{[X,Y]} f_* Z \Big)_p = R'\big(f_{*p} X_p, f_{*p} Y_p\big) f_{*p} Z_p,$$

dove R' denota il tensore di curvatura di (M', g'). Pertanto, otteniamo la seguente

Proposizione 12.3. *Se $\bar{R}$ è il tensore di curvatura associato alla connessione lineare $\bar{\nabla}$, allora per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:*

$$\bar{R}(X, Y) f_* Z = R'\big(f_* X, f_* Y\big) f_* Z.$$

Per ogni $u, v \in \mathfrak{X}(f)$, l'applicazione

$$\bar{g}(u, v) : M \to \mathbb{R},\ p \longmapsto g'_{f(p)}(u_p, v_p),$$

è differenziabile. Infatti, localmente

$$\bar{g}\big(\frac{\partial}{\partial \overline{y}_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \overline{y}_\beta}\big)(p) = g'_{f(p)}\big((\frac{\partial}{\partial y_\alpha})_{f(p)}, (\frac{\partial}{\partial y_\beta})_{f(p)}\big) = g'\big(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\beta}\big) \circ f(p),$$

ossia

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = (g'_{\alpha\beta} \circ f).$$

Quindi, la metrica g' di M' induce sul fibrato $f^{-1}TM'$ una *bundle-metric* $\bar{g}$, cioè una famiglia di prodotti scalari $\{\bar{g}_p = g'_{f(p)}\}_{p \in M}$ sulle fibre $T_{f(p)}M'$, che dipende differenziabilmente da p.

Proposizione 12.4. *Per ogni $u, v \in \mathfrak{X}(f)$ e per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$, sono verificate le seguenti proprietà:*

$$\bar\nabla\, \bar g = 0, \ \textit{cioè}\ X\,\bar g(u,v) = \bar g(\bar\nabla_X u, v) + \bar g(u, \bar\nabla_X v), \tag{12.7}$$

$$f_*[X,Y] = \bar\nabla_X f_* Y - \bar\nabla_Y f_* X. \tag{12.8}$$

In particolare, la (12.7) *ci dice che* $(f^{-1}TM', \bar\nabla, \bar g)$ *è un fibrato vettoriale riemanniano.*

Dimostrazione. Sia p un fissato punto di M. Sia $\gamma(t)$ una curva differenziabile di M con $\gamma(0) = p$ e $\dot\gamma(0) = X_p$. Allora:

$$\begin{aligned} X\big(\bar g(u,v)\big)(p) &= X_p\big(\bar g(u,v)\big) = \dot\gamma(0)\bar g(u,v) = \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar g(u,v)\gamma(t)\Big)_{|t=0} \\ &= \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g'\big(u(\gamma(t)), v(\gamma(t))\big)\Big)_{|t=0} \\ &= g'\Big(\frac{D'u(t)}{\mathrm{d}t}, v(\gamma(t))\Big)_{|t=0} + g'\Big(u(\gamma(t)), \frac{D'v(t)}{\mathrm{d}t}\Big)_{|t=0} \\ &= \bar g\big(\bar\nabla_{X_p} u, v(p)\big) + \bar g\big(u(p), \bar\nabla_{X_p} v\big) \\ &= \Big(\bar g\big(\bar\nabla_X u, v\big) + \bar g\big(u, \bar\nabla_X v\big)\Big)(p). \end{aligned}$$

Proviamo ora la (12.8). Poniamo

$$\bar T(X,Y) = f_*[X,Y] - \bar\nabla_X f_* Y + \bar\nabla_Y f_* X.$$

Siccome

$$[\varphi X, \psi Y] = \varphi\psi[X,Y] + \varphi X(\psi) Y - \psi Y(\varphi) X \ \text{ e }\ f_*(\varphi X) = \varphi f_* X,$$

si ottiene

$$\bar T(\varphi X, \psi Y) = \varphi\psi \bar T(X,Y) \ \ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \text{ e } \forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}(M).$$

Quindi, per provare la (12.8) è sufficiente provare che $\bar T(X,Y) = 0$ per $X = \partial/\partial x_i$ e $Y = \partial/\partial x_j$. D'altronde $[\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j] = 0$, perciò basta provare che

$$\bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f_* \frac{\partial}{\partial x_j} = \bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} f_* \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Siccome, come già osservato,

$$f_* \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{\beta=1}^{n'} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \overline{y}_\beta}, \quad \bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial \overline{y}_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{m} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \Big(\nabla'_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\Big) \circ f,$$

si ha

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f_* \tfrac{\partial}{\partial x_j} &= \sum_{\alpha=1}^{n'} \left(\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x_i\, \partial x_j} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} + \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \tfrac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n'} \left(\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x_i\, \partial x_j} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} + \sum_{\beta=1}^{n'} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \left(\nabla'_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}} \tfrac{\partial}{\partial y_\alpha} \right) \circ f \right),\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f_* \tfrac{\partial}{\partial x_j} - \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_j}} f_* \tfrac{\partial}{\partial x_i} &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n'} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \left(\nabla'_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}} \tfrac{\partial}{\partial y_\alpha} - \nabla'_{\frac{\partial}{\partial y_\alpha}} \tfrac{\partial}{\partial y_\beta} \right) \circ f \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n'} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} [\tfrac{\partial}{\partial y_\beta}, \tfrac{\partial}{\partial y_\alpha}] \circ f = 0.\end{aligned}$$

□

12.2 Energia di un'applicazione

La norma di Hilbert-Schmidt

Siano $(E, g), (F, g')$ due spazi vettoriali Euclidei di dimensione n e n' rispettivamente, e sia $Hom(E, F)$ lo spazio vettoriale reale di tutte le applicazioni lineari da E in F. Per ogni $\phi, \psi \in Hom(E, F) = E^* \otimes F$ poniamo

$$< \phi, \psi >_H := \textstyle\sum_{i=1}^n g'(\phi e_i, \psi e_i),$$

dove $(e_1, \dots, e_n)$ è una fissata base ortonormale di E. La precedente definizione non dipende dalla scelta della base ortonormale. Infatti, se $(v_1, \dots, v_n)$ è un'altra base ortonormale di E, allora $v_k = \sum_{j=1}^n a_{jk}\, e_j$, dove $A = (a_{jk}) \in O(n)$, e quindi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n g'(\phi v_k, \psi v_k) &= \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^n a_{ik}\, a_{jk}\, g'(\phi e_i, \psi e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}\, a^t_{kj}\, g'(\phi e_i, \psi e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij}\, g'(\phi e_i, \psi e_j) = \sum_{i=1}^n g'(\phi e_i, \psi e_i).\end{aligned}$$

Si dimostra facilmente che $<, >_H$ è un prodotto scalare su $Hom(E, F)$, e

$$\|\phi\| = (< \phi, \phi >_H)^{\frac{1}{2}}$$

è la *norma di Hilbert-Schmidt* dell'applicazione lineare ϕ .

Lemma 12.5. *Siano dati* $\phi \in Hom(E,F)$, $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ *una base ortonormale di* E *e* $\{\partial_r\}_{r=1,\dots,n}$ *un'arbitraria base di* E. *Poniamo* $h = \phi^* g'$, $e_i = \sum_{r=1}^n a_{ri}\,\partial_r$, $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$, $h_{ij} = h(\partial_i, \partial_j)$, $A = (a_{ij})$, $G = (g_{ij})$, $G^{-1} = (g^{ij})$ *e* $H = (h_{ij})$. *Allora:*

$$\text{(a)}\quad G^{-1} = A \cdot A^T\,, \quad \textit{cioè} \quad g^{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir}\, a^t_{rj} = \sum_{r=1}^n a_{ir}\, a_{jr};$$

$$\text{(b)}\quad \|\phi\|^2 = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\, g'(\phi\partial_i, \phi\partial_j) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\, h_{ij} = \mathrm{tr}\,(G^{-1}H) = \mathrm{tr}\, L_\phi,$$

dove L_ϕ *è l'endomorfismo di* E *definito da* $(\phi^* g')(v,w) = g(L_\phi v, w)$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\delta_{ij} = g(e_i, e_j) &= \sum_{k,h=1}^n a_{ki}\, a_{hj}\, g_{kh} = \sum_{h=1}^n \Big(\sum_{k=1}^n a^t_{ik}\, g_{kh}\Big) a_{hj} \\ &= \sum_{h=1}^n c_{ih}\, a_{hj}\,, \qquad (\text{dove } C = (c_{ih}) = A^T \cdot G).\end{aligned}$$

Dunque, $A^T \cdot G \cdot A = I_n$ da cui segue che $G = (A^T)^{-1} \cdot A^{-1} = (A \cdot A^T)^{-1}$ e quindi $G^{-1} = A \cdot A^T$. Di conseguenza, tenendo anche conto che h è la forma bilineare su E definita da $h(v,w) = g'(\phi v, \phi w)$, si ha

$$\begin{aligned}\|\phi\|^2 &= \sum_{i=1}^n g'(\phi e_i, \phi e_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{r,s=1}^n a_{ri}\, a_{si}\, g'(\phi\partial_r, \phi\partial_s) \\ &= \sum_{r,s=1}^n \Big(\sum_{i=1}^n a_{ri}\, a_{si}\Big) g'(\phi\partial_r, \phi\partial_s) = \sum_{k,h=1}^n g^{rs}\, g'(\phi\partial_r, \phi\partial_s) \\ &= \sum_{k,h=1}^n g^{rs}\, (\phi^* g')_{rs} = \mathrm{tr}\big(g^{-1}(\phi^* g')\big) = \mathrm{tr}(G^{-1}H).\end{aligned}$$

□

Energia di un'applicazione tra varietà riemanniane

Introduciamo ora il concetto di energia di un'applicazione differenziabile tra varietà riemanniane. Sia $f : M \longrightarrow M'$ un'applicazione differenziabile tra le varietà Riemanniane (M, g) e (M', g') con $\dim M = n$ e $\dim M' = n'$. Ricordiamo che la *prima forma fondamentale di* f è data dal tensore $f^* g'$, che è un tensore doppio covariante simmetrico semidefinito positivo su M. L'aggiunta del differenziale $f_{*p} : T_p M \to T_{f(p)} M'$ è l'applicazione lineare

$$f^t_{*p} : T_{f(p)} M' \to T_p M$$

definita da

$$g_p(v, f^t_{*p}v') = g'_{f(p)}(f_{*p}v, v') \quad \forall\ v \in T_pM \quad \text{e} \quad \forall\ v' \in T_{f(p)}M'.$$

Sia L_f il tensore simmetrico di tipo $(1,1)$ che corrisponde, rispetto a g, al tensore f^*g' di tipo$(0,2)$. Allora, per ogni $v, w \in T_pM$ si ha

$$g_p((L_f)_pv, w) = (f^*g')_p(v, w) = g'_{f(p)}(f_{*p}v, f_{*p}w) = g_p(f^t_{*p}\, f_{*p}\, v, w).$$

Quindi, L_f è definito dall'endomorfismo $f^t_{*p} \circ f_{*p} : T_pM \to T_pM$.

Definizione 12.6. *Densità di energia di* f è l'applicazione reale

$$e(f) : M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \longmapsto e(f)(p) := \tfrac{1}{2}\, \|f_{*p}\|^2,$$

dove $\|f_{*p}\|$ denota la norma di Hilbert-Schmidt del differenziale f_{*p}, a volte indicato anche con $(\mathrm{d}f)_p$.

Per quanto visto prima, la definizione di $\|f_{*p}\|^2$ non dipende dalla scelta della base ortonormale di T_pM. D'altronde, se $\{e_i\}$ è una base ortonormale locale di campi vettoriali su M, risulta

$$\begin{aligned}\|f_{*p}\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} g'_{f(p)}\big(f_{*p}(e_{ip}), f_{*p}(e_{ip})\big) = \sum_{i=1}^{n} (f^*g')(e_i, e_i)(p)\\ &= \mathrm{tr}(g^{-1}\, f^*g')(p).\end{aligned}$$

Quindi,

$$e(f) = \frac{1}{2}\, \|f_*\|^2 = \frac{1}{2}\, \mathrm{tr}(g^{-1}\, f^*g') = \frac{1}{2}\, \mathrm{tr}_g(f^*g') = \frac{1}{2}\, \mathrm{tr}L_f.$$

Consideriamo un sistema di coordinate locali $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$ definito in un aperto $U \subset M$, un sistema di coordinate locali $(y_\alpha)_{\alpha=1,\ldots,n'}$ definito in un aperto $V \subset N$, con $f(U) \subset V$, e una base ortonormale locale $\{e_i\}$ di campi di vettori definiti in U. Allora, tenendo presente la (b) del Lemma 12.5, si ottiene

$$\begin{aligned}e(f) = \frac{1}{2}\|f_*\|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} g'\big(f_*(e_k), f_*(e_k)\big)\\ &= \frac{1}{2}\, \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\, g'\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\, \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\, \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i}\, \frac{\partial f^\beta}{\partial x_j}\, (g'_{\alpha\beta} \circ f)\right).\end{aligned}$$

Pertanto, l'espressione locale di $e(f)$ è data da:

$$e(f) = \frac{1}{2}\, \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\, \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i}\, \frac{\partial f^\beta}{\partial x_j}\, (g'_{\alpha\beta} \circ f)\right). \tag{12.9}$$

In particolare, $e(f) \in \mathcal{F}(M)$.

Definizione 12.7. Siano $(M,g),(M',g')$ due varietà riemanniane, con M compatta, e sia $f \in C^\infty(M,M')$. *L'energia di* f è l'integrale di Dirichlet di f:

$$E(f) = \int_M e(f)\, v_g = \frac{1}{2}\int_M \|f_*\|^2\, v_g = \frac{1}{2}\int_M \mathrm{tr} L_f\, v_g, \tag{12.10}$$

dove v_g è l'elemento di volume standard di (M,g), espresso localmente dalla n-forma differenziale $v_g = \sqrt{\underline{g}}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, $\underline{g}$ =det(g_{ij}).

Si osservi che $E(f) \geq 0$ e

$$E(f) = 0 \iff \|f_*\| = 0 \iff f_* = 0 \iff f = \text{ cost.},$$

dove nell'ultima equivalenza si sfrutta il fatto che M è connessa.

Osservazione 12.8. Sia $f : (M,g) \to (M',g')$ un'applicazione differenziabile con M compatta, e sia $i : (M',g') \hookrightarrow (\bar{M},\bar{g})$ un'immersione isometrica. Se poniamo $\bar{f} := i \circ f : (M,g) \to (\bar{M},\bar{g})$, allora

$$\mathrm{tr}_g \bar{f}^*\, \bar{g} = \mathrm{tr}_g (i\circ f)^*\, \bar{g} = \mathrm{tr}_g f^*\,(i^*\bar{g}) = \mathrm{tr}_g f^*\, g'.$$

Quindi

$$E(f) = E(\bar{f}).$$

Osservazione 12.9. Sia $f : (M,g) \to (M',g')$ un'applicazione differenziabile con M compatta, e sia $\tilde{g}$ una metrica conforme a g: $\tilde{g} = \lambda\, g$ con $\lambda \in \mathcal{F}(M)$, $\lambda > 0$. Se $\{e_i\}$ è una base g-ortonormale locale di campi di vettori su M, $\{\tilde{e}_i = (1/\sqrt{\lambda})e_i\}$ è una base $\tilde{g}$-ortonormale e $v_{\tilde{g}} = \lambda^{\frac{n}{2}} v_g$. Allora,

$$\mathrm{tr}_{\tilde{g}} f^* g' = \sum_i g'(f_*\tilde{e}_i, f_*\tilde{e}_i) = \frac{1}{\lambda}\sum_i g'(f_* e_i, f_* e_i) = \frac{1}{\lambda}\mathrm{tr}_g f^* g', \quad \text{e}$$

$$E_{\tilde{g}}(f) = \frac{1}{2}\int_M \lambda^{(\frac{n}{2}-1)}\, \mathrm{tr}_g f^* g'\, v_g.$$

In particolare, se M è una superficie ($n = 2$), l'energia di f è un invariante conforme della metrica g:

$$E_{\tilde{g}}(f) = E_g(f).$$

Se $n \geq 2$ e $\tilde{g}$ è una metrica omotetica a g, cioè λ è una costante, allora

$$E_{\tilde{g}}(f) = \lambda^{\frac{n}{2}-1} E_g(f).$$

12.3 Applicazioni armoniche ed equazioni di Eulero-Lagrange

Siano ∇ e ∇' le connessioni di Levi-Civita di (M,g) e di (M',g') rispettivamente e sia $f \in C^\infty(M,M')$. Ricordiamo che $n = \dim M$ e $n' = \dim M'$. Il differenziale $\mathrm{d}f$ si può pensare come un tensore di tipo $(1,1)$ su M a valori in $f^{-1}TM'$:

$$\mathrm{d}f : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(f),\ X \mapsto \mathrm{d}f(X) = f_*X.$$

La *seconda forma fondamentale di* f è un tensore, che si denota con $\nabla \mathrm{d}f$, di tipo (1,2) su M a valori in $f^{-1}TM'$:

$$\nabla \mathrm{d}f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(f),\ (X,Y) \mapsto (\nabla_X \mathrm{d}f)(Y),$$
$$(\nabla_X \mathrm{d}f)(Y) := \bar{\nabla}_X f_*Y - f_*(\nabla_X Y) = \nabla'_{f_*X} f_*Y - f_*(\nabla_X Y).$$

La forma $\nabla \mathrm{d}f$ generalizza la nozione di seconda forma fondamentale per immersioni isometriche. Il valore di $\big(\nabla \mathrm{d}f\big)(X,Y)$ in un punto $p \in M$ dipende solo dai vettori $X_p, Y_p \in T_pM$. Inoltre, dalla (12.8) segue che $(\nabla \mathrm{d}f)(X,Y)$ è simmetrica e quindi l'applicazione

$$(\nabla \mathrm{d}f)_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow T_{f(p)}M'$$

è bilineare e simmetrica. L'applicazione f si dice *totalmente geodetica* se $\nabla \mathrm{d}f = 0$. Se $\gamma(t)$ è una curva differenziabile di M, posto $\tilde{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$, dalla definizione di $\nabla \mathrm{d}f$, si ha

$$\big(\nabla \mathrm{d}f\big)_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)) = \bar{\nabla}_{\dot\gamma(t)} f_*\dot\gamma(t) - f_*(\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t)) = \frac{D'\dot{\tilde{\gamma}}}{\mathrm{d}t} - f_*\Big(\frac{D\dot\gamma}{\mathrm{d}t}\Big).$$

Da questa formula segue che f è totalmente geodetica se, e solo se, f trasforma geodetiche di M in geodetiche di M'.

Consideriamo ora l'applicazione $\tau(f) : M \to f^{-1}TM'$ così definita

$$\tau(f)(p) := \mathrm{tr}\,(\nabla \mathrm{d}f)(p) = \sum_{i=1}^{n} (\nabla df)_p(e_i,e_i) \in T_{f(p)}M', \tag{12.11}$$

dove $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ è una base ortonormale di T_pM. Il campo di vettori $\tau(f) \in \mathfrak{X}(f)$, definito dalla (12.11), si dice *campo di tensione* di f.

Definizione 12.10. Un'applicazione differenziabile $f : (M,g) \to (M',g')$ si dice *applicazione armonica* se $\tau(f) = 0$.

Si noti che per i fisici un'applicazione armonica è un "σ-model" (cfr., ad esempio, [38]).

Esercizio 12.11. Sia $f : (M,g) \to (M',g')$ un'applicazione differenziabile e sia $\tilde{g}$ una metrica conforme a g: $\tilde{g} = \lambda\, g$ con $\lambda \in \mathcal{F}(M)$, $\lambda > 0$. Si determini la relazione tra il campo di tensione di $f : (M,\tilde{g}) \to (M',g')$ e quello di $f : (M,g) \to (M',g')$.

Espressione locale di $\tau(f)$

Consideriamo un sistema di coordinate locali $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ definito in un aperto $U \subset M$, un sistema di coordinate locali $(y_\alpha)_{\alpha=1,\dots,n'}$ definito in un aperto $V \subset M'$, con $f(U) \subset V$, e una base ortonormale locale $\{e_i\}$ di campi di vettori definiti in U. Poniamo $e_k = \sum_{i=1}^n a_{ik}(\partial/\partial x_i)$, $a_{ik} \in \mathcal{F}(U)$. Allora,

$$\begin{aligned}\tau(f) &= \sum_{k=1}^n (\nabla df)\,(e_k, e_k) = \sum_{i,j=1}^n \big(\sum_{k=1}^n a_{ik}a_{jk}\big)\,(\nabla df)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\\ &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\left(\bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f_* \frac{\partial}{\partial x_j} - f_*\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right).\end{aligned}$$

Usando le proprietà delle connessioni $\bar\nabla$, ∇ e la (12.6), si ha:

$$\begin{aligned}\bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f_* \frac{\partial}{\partial x_j} &= \bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\left(\sum_{\alpha=1}^{n'} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \bar y_\alpha}\right)\\ &= \sum_{\alpha=1}^{n'}\left(\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\circ f + \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j}\bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial \bar y_\alpha}\right)\\ &= \sum_{\gamma=1}^{n'} \frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\circ f + \sum_{\alpha,\gamma=1}^{n'} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j}\tilde\Gamma^\gamma_{i\alpha}\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\circ f\\ &= \sum_{\gamma=1}^{n'} \frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\circ f + \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{n'} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial f^\beta}{\partial x_i}(\Gamma'^\gamma_{\beta\alpha}\circ f)\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\circ f,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{*p}\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)_p &= f_{*p}\Big(\nabla_{(\frac{\partial}{\partial x_i})_p}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big) = f_{*p}\Big(\sum_{k=1}^n \Gamma^k_{ij}(p)\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)_p\Big)\\ &= \sum_{k=1}^n \Gamma^k_{ij}(p) f_{*p}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)_p = \sum_{k,\gamma}\Gamma^k_{ij}(p)\frac{\partial f^\gamma}{\partial x_k}(p)\Big(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\Big)_{f(p)}.\end{aligned}$$

Di conseguenza, otteniamo

$$\tau(f) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\Big(\bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f_*\frac{\partial}{\partial x_j} - f_*\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)\Big)$$

e quindi

$$\begin{aligned}\tau(f) &= \sum_{\gamma=1}^{n'}\sum_{i,j=1}^n g^{ij}\Big(\frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^n \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f^\gamma}{\partial x_k}\Big)\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\circ f\\ &\quad + \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{n'}\sum_{i,j=1}^n \Big(g^{ij}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial f^\beta}{\partial x_i}(\Gamma'^\gamma_{\beta\alpha}\circ f)\Big)\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\circ f. \qquad (12.12)\end{aligned}$$

Sia ora $\psi \in \mathcal{F}(M)$. Ricordiamo che se Δ è l'operatore di Laplace-Beltrami di (M, g), allora (cfr. Appendice B):

$$\Delta\psi = -\mathrm{tr}(\nabla d\psi) = -\mathrm{tr}\nabla^2\psi = -\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\Big(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\Big),$$

e quindi risulta

$$\tau(\psi) = \mathrm{tr}(\nabla d\psi) = -\triangle\psi.$$

Ricordiamo inoltre che il campo vettoriale $\nabla\psi = \mathrm{grad}\psi$, cioè il campo di vettori duale (rispetto alla metrica g di M) del differenziale di ψ, localmente è dato da:

$$\nabla\psi = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Pertanto, la formula (12.12) diventa

$$\begin{aligned}\tau(f) &= -\sum_{\gamma=1}^{n'}(\Delta f^{\gamma})\frac{\partial}{\partial y_{\gamma}}\circ f + \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial x_j}\frac{\partial f^{\beta}}{\partial x_i}(\Gamma'^{\gamma}_{\beta\alpha}\circ f)\frac{\partial}{\partial y_{\gamma}}\circ f \\ &= \sum_{\gamma=1}^{n'}\left(-\Delta f^{\gamma} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n'} g(\nabla f^{\alpha}, \nabla f^{\beta})(\Gamma'^{\gamma}_{\beta\alpha}\circ f)\right)\frac{\partial}{\partial y_{\gamma}}\circ f\end{aligned}$$

e quindi abbiamo il seguente teorema.

Teorema 12.12. *Un'applicazione differenziabile f tra le varietà riemanniane (M, g) e (M', g') è armonica se, e solo se, valgono, per ogni $\gamma = 1, ..., n'$, le seguenti equazioni di Eulero-Lagrange*

$$-\Delta f^{\gamma} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n'}\sum_{i,j=1}^{n}\left(g^{ij}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial x_j}\frac{\partial f^{\beta}}{\partial x_i}(\Gamma'^{\gamma}_{\beta\alpha}\circ f)\right) = 0. \qquad (12.13)$$

Questo è un sistema di n' equazioni differenziali ellittiche quasi lineari del secondo ordine nelle incognite $f^1, ..., f^{n'}$ (funzioni componenti locali di f). Quasi lineare significa che l'equazione differenziale è lineare nel termine contenente le derivate parziali del secondo ordine. La parte principale è l'operatore di Laplace-Beltrami (da cui l'ellitticità). La parte non lineare è costituita da polinomi di secondo grado nelle derivate parziali prime di f^{α}.

12.4 Esempi di applicazioni armoniche

Applicazioni armoniche appaiono in modo naturale in vari problemi di geometria riemanniana. Di seguito vediamo alcuni esempi.

Esempio 12.13. Applicazioni costanti
Il più semplice esempio di applicazione armonica è un'applicazione costante. Se $f : (M, g) \longrightarrow (M', g')$ è un'applicazione costante, allora $f_{*p} = 0$ per ogni p e quindi $\tau(f) = tr(\nabla df) = 0$. Si noti che nel caso compatto, le funzioni costanti danno il minimo assoluto per l'energia.

Esempio 12.14. Funzioni armoniche
Sia $f \in \mathcal{F}(M)$. In questo caso (M', g') è la retta euclidea, $f^\alpha = f$, $\Gamma'^\gamma_{\alpha\beta} = 0$ e quindi le equazioni di Eulero-Lagrange (12.13) danno $\Delta f = 0$. Oppure, si può notare che in tal caso risulta $\tau(f) = -\Delta f$. Quindi,

$$f \text{ è applicazione armonica } \Leftrightarrow \triangle f = 0,$$

dove $\triangle$ è l'operatore di Laplace-Beltrami. Se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$, allora $f = (f_1, \ldots, f_n)$ e quindi f è un'applicazione armonica se, e solo se, le funzioni componenti $f_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ sono applicazioni armoniche. Questo esempio giustifica il nome di applicazione armonica dato per un'applicazione $f : (M, g) \longrightarrow (M', g')$ con $\tau(f) = 0$.

Esempio 12.15. Curve geodetiche
Sia $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $f = \sigma : I \longrightarrow (M', g')$ una curva differenziabile di M'. In questo caso (M, g) è un segmento euclideo. $g^{ij} = g^{11} = 1$, $f^\alpha = y^\alpha(t)$ (funzioni componenti di σ), $(x_1, ..., x_n) = (t)$, $\Gamma^k_{ij} = 0$ e quindi le equazioni di Eulero-Lagrange (12.13) diventano:

$$\frac{d^2 y^\gamma}{dt^2} + \sum_{\alpha,\beta}^{n'} \Gamma'^\gamma_{\alpha\beta}(t) \frac{dy^\alpha}{dt} \frac{dy^\beta}{dt} = 0,$$

che sono le equazioni differenziali che definiscono le curve geodetiche di M'. Oppure, più geometricamente, basta osservare che

$$\tau(\sigma) = tr(\nabla d\sigma) = \big(\nabla \,\mathrm{d}\sigma\big)\Big(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}\Big) = \frac{D'\dot\sigma}{\mathrm{d}t} - \sigma_*\Big(\nabla_{\frac{d}{dt}} \tfrac{d}{dt}\Big) = \frac{D'\dot\sigma}{\mathrm{d}t},$$

dove $\dot\sigma(t) = \sigma_*\big(\frac{d}{dt}\big)$ è un campo di vettori lungo $f = \sigma$. Quindi,

$$\sigma(t) \text{ è una applicazione armonica } \Leftrightarrow \sigma(t) \text{ è curva geodetica di } M'.$$

Esempio 12.16. Isometrie e metriche armoniche
Sia $f : (M, g) \longrightarrow (M', g')$ un'isometria. Allora

$$(\nabla df)(X, Y) = \bar\nabla_X f_* Y - f_* \nabla_X Y = \nabla'_{f_* X} f_* Y - f_* \nabla_X Y = 0.$$

Pertanto, $\tau(f) = \mathrm{tr}\nabla df = 0$ e quindi f è armonica. In particolare l'identità $I : (M, g) \to (M, g)$ è un'applicazione armonica. Se $\tilde{g}$ è un'altra metrica riemanniana su M, l'identità $I : (M, g) \to (M, \tilde{g})$, in generale, non è un'applicazione armonica, se accade che anche in tal caso I è armonica, allora si dice che $\tilde{g}$ è una *metrica armonica* (cfr. [24]).

Se $\tilde{g}$ è conforme a g, $\tilde{g} = e^{2f}g$, $f \in \mathcal{F}(M)$, in tal caso il campo di tensione di $I : (M, g) \to (M, \tilde{g})$ è dato da

$$\tau(I_{g\tilde{g}}) = (2 - n)\nabla f,$$

dove ∇f è il gradiente di f. Per ottenere la suddetta formula, basta applicare la formula della connessione di Levi-Civita della metrica $\tilde{g} = e^{2f}g$ (cfr. Esercizio 6.50). In particolare, in dimensione 2 ogni metrica conforme è armonica. Se $n > 2$, una metrica conforme è armonica se, e solo se, è omotetica.

Esempio 12.17. Immersioni minimali
Sia (M, g) una sottovarietà riemanniana di (M', g') con immersione isometrica $f : M \to M'$ (quindi $f^*g' = g$). Poiché $f_{*p} : T_pM \to f_{*p}(T_pM) \subset T_{f(p)}M'$ è una isometria, $f_{*p}(T_pM)$ si può identificare con T_pM e $f_{*p}X_p$ con X_p. Più in generale, poiché un'immersione è localmente un imbedding, f_*X si può identificare localmente con X. Quindi, localmente $\mathfrak{X}(M') = \mathfrak{X}(M) \oplus (\mathfrak{X}(M))^\perp$ e

$$T_{f(p)}M' = T_pM \oplus (T_pM)^\perp.$$

In questo caso l'equazione $(\nabla df)(X, Y) = \nabla'_{f_*X} f_*Y - f_*(\nabla_X Y)$, che riscriviamo come

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + (\nabla df)(X, Y),$$

è esattamente l'equazione di Gauss per l'immersione f, dove $(\nabla_X Y)_p \in T_pM$ è la componente tangente e $(\nabla df)(X, Y)(p) \in (T_pM)^\perp$ è la componente normale di $\big(\nabla'_X Y\big)_p$. Pertanto, il *vettore curvatura media* dell'immersione è

$$H(p) = \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(\nabla df)(p) = \frac{1}{n}\tau(f)(p),$$

e quindi:

f è un'applicazione armonica $\iff$ f è un'immersione minimale.

In particolare se $(M', g') = (\mathbb{R}^m, g_0)$ ed $f = (f_1, ..., f_m) : (M, g) \to (R^m, g_0)$ è un'immersione isometrica, allora

$$\Delta f = (\Delta f_1, ..., \Delta f_m) = -(\tau(f_1), ...\tau(f_m)) = -\tau(f) = -nH$$

e quindi $\Delta f = -nH$.

Esempio 12.18. Sommersioni riemanniane
Sia $\pi : (M', g') \to (M, g)$ una sommersione riemanniana (suriettiva).

Proviamo che:

π è armonica se, e solo se, le fibre sono sottovarietà minimali di M'.

Poniamo $\dim M = n$ e $\dim M' = n' = n + k$. Ricordiamo (cfr. Sezione 4.3) che le fibre $M_p = \pi^{-1}(\pi(p))$ sono sottovarietà riemanniane di (M', g') con la metrica indotta e $\ker \pi_{*p} = T_p M_p = \mathcal{V}_p M'$ sottospazio verticale tangente alla fibra. Sia $\{e_1, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_{n'}\}$ una base ortonormale locale di $\mathfrak{X}(M')$, dove $\{e_1, ..., e_n\}$ è sollevamento orizzontale di una base ortonormale locale $\{v_1, ..., v_n\}$ di $\mathfrak{X}(M)$. Quindi, $\{e_1, ..., e_n\}_p$ è base del sottospazio orizzontale $\mathcal{H}_p M'$ e $\{e_{n+1}, ..., e_{n'}\}_p$ è base del sottospazio verticale $\mathcal{V}_p M'$, $T_p M' = \mathcal{H}_p M' \oplus \mathcal{V}_p M'$, $\mathcal{H}_p M' = (\mathcal{V}_p M')^{\perp}$. Siccome $\pi_* e_{n+1} = ... = \pi_* e_{n'} = 0$ e (cfr. Esercizio 6.62)

$$\pi_*\big(\nabla'_{e_i} e_i\big) = \nabla_{v_i} v_i = \nabla_{\pi_* e_i} \pi_* e_i \quad \text{per ogni} \quad i = 1, ..., n,$$

per il campo di tensione di π si ha

$$\tau(\pi) = \textstyle\sum_{i=1}^{n'} \big(\nabla_{\pi_* e_i} \pi_* e_i - \pi_* \nabla'_{e_i} e_i\big) = -\pi_*\big(\sum_{i=n+1}^{n'} \nabla'_{e_i} e_i\big).$$

Quindi $\tau(\pi) = 0$ se, e solo se, il vettore $\sum_{i=n+1}^{n'} \nabla'_{e_i} e_i$ è verticale, cioè la sua componente orizzontale è nulla. D'altronde (cfr. Sezione 6.8) il vettore curvatura media della fibra M_p è dato dalla proiezione di $(1/k) \sum_{i=n+1}^{n'} \nabla'_{e_i} e_i$ sul sottospazio orizzontale (cioè sull'ortogonle dello spazio tangente alla fibra che è verticale). Pertanto, π è un'applicazione armonica se, e solo se, le fibre sono sottovarietà minimali di (M', g').

La fibrazione di Hopf $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ è una sommersione riemanniana e il campo di Hopf ξ_0 è tangente alle fibre $\pi^{-1}(\pi(p))$ per ogni $p \in \mathbb{S}^{2n+1}$ (cfr. Sezioni 9.3, 9.5). D'altronde ξ_0 è unitario e di Killing, quindi geodetico. Di conseguenza le fibre sono curve geodetiche e quindi sottovarietà minimali di $\mathbb{S}^{2n+1}$. Pertanto, *la fibrazine di Hopf è un esempio di sommersione riemanniana armonica.*

Esempio 12.19. Applicazioni olomorfe

Sia M una varietà complessa di dimensione complessa n. Indichiamo con $(z_j = x_j + \sqrt{-1} y_j), j = 1, ..., n$, un sistema di coordinate locali complesse definite su un aperto di M. Il tensore $J : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ definito (in termini di coordinate locali) da

$$J \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad J \frac{\partial}{\partial y_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j},$$

è la struttura quasi complessa (naturale) di M. In generale, una struttura quasi complessa su una varietà differenziabile è un tensore J di tipo $(1,1)$ tale che $J^2 = -I$. Un'applicazione differenziabile f tra due varietà complesse (M, J) e (M', J') è olomorfa se, e solo se,

$$J' \circ f_* = f_* \circ J.$$

Ricordiamo (cfr. Sezione 4.5) che una metrica riemanniana g su una varietà complessa M è detta *hermitiana* se

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

In tal caso (M, J, g) è detta *varietà hermitiana*. Una varietà hermitiana (M, J, g) è detta di *Kähler* se la 2-forma fondamentale $\Omega = g(\cdot, J\cdot)$ è chiusa, cioè $\mathrm{d}\Omega = 0$. Inoltre, una varietà hermitiana (M, J, g) è kähleriana se, e solo se,
$$\nabla J = 0, \quad \text{ossia} \quad \nabla_X JY = J\nabla_X Y \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$
dove ∇ è la connessione di Levi-Civita di (M, g).

Teorema 12.20. *Ogni applicazione olomorfa $f : (M, J, g) \longrightarrow (M', J', g')$ tra due varietà kähleriane è un'applicazione armonica.*

Dimostrazione. Consideriamo su M una base ortonormale locale di campi vettoriali del tipo (e_j, Je_j), $j = 1, ..., n = \dim_{\mathbb{C}} M$. Allora,
$$\begin{aligned}\tau(f) &= \mathrm{tr}(\nabla \mathrm{d} f) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \big(\nabla \mathrm{d} f\big)(e_j, e_j) + \big(\nabla \mathrm{d} f\big)(Je_j, Je_j) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \bar{\nabla}_{e_j} f_* e_j - f_* \nabla_{e_j} e_j + \bar{\nabla}_{Je_j} f_* Je_j - f_* \nabla_{Je_j} Je_j \right\}.\end{aligned}$$

Applicando le proprietà indicate in parentesi, si ottiene
$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{Je_j} f_* Je_j &= \bar{\nabla}_{Je_j} J' f_* e_j \quad (f \text{ è olomorfa}) \\ &= J' \bar{\nabla}_{Je_j} f_* e_j \quad (M' \text{ è di Kähler}) \\ &= J' \left(\bar{\nabla}_{e_j} f_* Je_j + f_*[Je_j, e_j] \right) \quad (\text{vale la } (12.8)) \\ &= \bar{\nabla}_{e_j} J' f_* Je_j + J' f_*[Je_j, e_j] \quad (N \text{ è di Kähler}) \\ &= \bar{\nabla}_{e_j} f_* J^2 e_j + J' f_*[Je_j, e_j] \quad (f \text{ è olomorfa}) \\ &= -\bar{\nabla}_{e_j} f_* e_j + J' f_*[Je_j, e_j].\end{aligned}$$

Analogamente, si ottiene
$$\begin{aligned}f_* \nabla_{Je_j} Je_j &= f_* J \nabla_{Je_j} e_j \quad (M \text{ è di Kähler}) \\ &= f_* J \left(\nabla_{e_j} Je_j + [Je_j, e_j] \right) \quad (\nabla \text{ è simmetrica}) \\ &= f_* \nabla_{e_j} J^2 e_j + J' f_*[Je_j, e_j] \ (f \text{ è olomorfa}) \\ &= -f_* \nabla_{e_j} e_j + J' f_*[Je_j, e_j].\end{aligned}$$

Di conseguenza,
$$\bar{\nabla}_{Je_j} f_* Je_j - f_* \nabla_{Je_j} Je_j = f_* \nabla_{e_j} e_j - \bar{\nabla}_{e_j} f_* e_j$$
e quindi $\tau(f) = 0$. □

Esempio 12.21. Applicazione prodotto
Consideriamo la varietà riemanniana prodotto $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$, la varietà (M', g') e un'applicazione differenziabile

$$f : (M_1 \times M_2, g_1 \times g_2) \to (M', g'),\ (p, q) \mapsto f(p, q).$$

Assumiamo che f sia armonica rispetto a ogni singola variabile, cioè,

$f_1 : (M_1, g_1) \to (M', g'), p \mapsto f(p, \bar{q})$ e $f_2 : (M_2, g_2) \to (M', g'), q \mapsto f(\bar{p}, q)$ sono armoniche. Fissata una base ortonormale locale $\{e_j, e_\alpha\}$ di $\mathfrak{X}(M_1 \times M_2)$ con $\{e_j\}$ base locale di $\mathfrak{X}(M_1)$ e $\{e_\alpha\}$ base locale di $\mathfrak{X}(M_2)$, si ha

$$\tau(f) = \sum_j \big(\nabla \mathrm{d}f\big)(e_j, e_j) + \sum_\alpha \big(\nabla \mathrm{d}f\big)(e_\alpha, e_\alpha) = \tau(f_1) + \tau(f_2) = 0,$$

quindi f è armonica. Sia ora G un gruppo di Lie con una metrica riemanniana bi-invariante. Allora, le traslazioni $\phi_1 : G \to G, x \mapsto x \cdot \bar{y}$ e $\phi_2 : G \to G, y \mapsto \bar{x} \cdot y$ sono isometrie e quindi applicazioni armoniche. Di conseguenza, l'applicazione prodotto $\phi : G \times G \to G, (x, y) \mapsto x \cdot y$ è un'applicazione armonica.

12.5 Tensione di una composizione

Siano date le seguenti applicazioni differenziabili $f_1 : (M, g) \to (M', g')$, $f_2 : (M', g') \to (\tilde{M}, \tilde{g})$, $f_2 \circ f_1 : (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$. Per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned}
\big(\nabla_X \mathrm{d}(f_2 \circ f_1)\big)(Y) &= \bar{\nabla}_X f_{2*} f_{1*} Y - f_{2*} f_{1*}(\nabla_X Y) \\
&= \tilde{\nabla}_{f_{2*} f_{1*} X} f_{2*} f_{1*} Y - f_{2*} f_{1*}(\nabla_X Y) \\
&\quad + f_{2*} \bar{\nabla}_X f_{1*} Y - f_{2*} \bar{\nabla}_X f_{1*} Y \\
&= f_{2*}\big(\bar{\nabla}_X f_{1*} Y - f_{1*}(\nabla_X Y)\big) \\
&\quad + \tilde{\nabla}_{f_{2*} f_{1*} X} f_{2*} f_{1*} Y - f_{2*} \bar{\nabla}_X f_{1*} Y \\
&= f_{2*}\big(\nabla \mathrm{d} f_1\big)(X, Y) + \tilde{\nabla}_{f_{2*} f_{1*} X} f_{2*} f_{1*} Y \\
&\quad - f_{2*} {\nabla'}_{f_{1*} X} f_{1*} Y \\
&= f_{2*}\big(\nabla \mathrm{d} f_1\big)(X, Y) + \big(\nabla \mathrm{d} f_2\big)(f_{1*} X, f_{1*} Y).
\end{aligned}$$

Quindi, la seconda forma fondamentale della composizione è data dalla seguente formula

$$\nabla \mathrm{d}(f_2 \circ f_1) = \mathrm{d}f_2 \circ \nabla df_1 + (\nabla \mathrm{d}f_2)(\mathrm{d}f_1, \mathrm{d}f_1),$$

e facendo la traccia si ottiene :

$$\tau(f_2 \circ f_1) = (\mathrm{d}f_2)\tau(f_1) + \operatorname{tr}(\nabla \mathrm{d}f_2)(\mathrm{d}f_1, \mathrm{d}f_1). \tag{12.14}$$

Dalla (12.14) seguono le seguenti proprietà:

- Se f_2 è totalmente geodetica, $\tau(f_2 \circ f_1) = (\mathrm{d}f_2)\tau(f_1)$ e quindi

$$f_1 \text{ applicazione armonica} \Longrightarrow f_2 \circ f_1 \text{ applicazione armonica}.$$

In particolare, se f_2 è un'isometria:

$$f_1 \text{ applicazione armonica} \iff f_2 \circ f_1 \text{ applicazione armonica.}$$

• Se f_1 è un'isometria, allora $\tau(f_1) = 0$ e

$$\tau(f_2 \circ f_1) = \operatorname{tr}(\nabla df_2)(f_{1*}, f_{1*}).$$

Quindi,

$$f_2 \text{ applicazione armonica} \iff f_2 \circ f_1 \text{ applicazione armonica.}$$

• La composizione di due applicazioni armoniche non è, in generale, un'applicazione armonica. Infatti, se M è una superficie minimale di $\mathbb{R}^3$ e $\gamma : (-\epsilon, +\epsilon) \to M$ è una curva geodetica di M, allora l'immersione $f_2 = i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ e l'applicazione $f_1 = \gamma : (-\epsilon, +\epsilon) \to M$ sono entrambe applicazioni armoniche, tuttavia l'applicazione $f_2 \circ f_1 : (-\epsilon, +\epsilon) \to \mathbb{R}^3$ non è necessariamente un'applicazione armonica in quanto $\tilde{\gamma}(t) = f_2(\gamma(t)) = \gamma(t)$ non è necessariamente una curva geodetica di $\mathbb{R}^3$.

• Se $f_1 : (M, g) \to (M', g')$ è armonica e $f_2 : (M', g') \to \mathbb{R}$ è convessa (cioè, l'operatore hessiano $\big(\nabla \mathrm{d} f_2\big)_q : T_qM' \times T_qM' \to \mathbb{R}$ è semidefinito positivo), allora $f = f_2 \circ f_1 : (M, g) \to \mathbb{R}$ è subarmonica:$-\Delta f \geq 0$. Basta osservare che per $f : (M, g) \to \mathbb{R}$, $-\Delta f = \tau(f)$. Si noti che la definizione di $f : (M, g) \to \mathbb{R}$ convessa è giustificata dal seguente fatto: se $\gamma(t) : (-\epsilon, +\epsilon) \to M$ è una geodetica di M, posto $F = \sigma = f \circ \gamma : (-\epsilon, +\epsilon) \to \mathbb{R}$, si ha

$$\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\sigma}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_* \dot{\gamma}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_* \dot{\gamma}(t) - f_*\big(\frac{D\dot{\gamma}(t)}{\mathrm{d}t}\big) = \big(\nabla df\big)(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)).$$

• Se $f_1 : (M, g) \to (M', g')$ e $f_2 = i : (M', g') \hookrightarrow (M'', g'')$ è un'immersione isometrica, allora

$$\tau(i \circ f_1) = \tau(f_1) + \operatorname{tr} B(f_{1*}, f_{1*})$$

dove B è la seconda forma fondamentale $\nabla \mathrm{d} f_2$ e $\tau(f_1)$ è identificata con $i_* \tau(f_1)$ in quanto i è un'immersione isometrica. D'altronde $B(\,,\,)$, e quindi anche $\operatorname{tr} B(f_{1*}, f_{1*})$, definisce un vettore tangente a M'' e ortogonale a M', $\tau(f_1)$ è tangente a M' e $\tau(i \circ f_1)$ è tangente a M''. Pertanto:

$$\tau(f_1) \text{ è la proiezione ortogonale di } \tau(i \circ f_1) \text{ su } M'$$

(cioè, $\tau(f_1)$ è la componente di $\tau(i \circ f_1)$ tangente a M') e quindi

$$f_1 : M \to M' \text{ è applicazione armonica} \iff \tau(i \circ f_1) \text{ è ortogonale a } M'.$$

L'ultima affermazione significa che

$$\tau(i \circ f_1)_p \in (T_{f_1(p)}M')^\perp \subset T_{f_1(p)}M'' \quad \forall p \in M.$$

Si noti che, per M compatta, $E(f_1) = E(i \circ f_1)$ (cfr. Oss. 12.8).

• In particolare, dal punto precedente segue che se $f : M \to S^n$ e

$$F = i \circ f : M \to S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1},\ p \mapsto F(p) = f(p),$$

allora

$$\tau(F) = -\Delta F = -(\Delta F_1, ..., \Delta F_{n+1})$$

e quindi

$$\begin{aligned} f : M \to S^n \,\text{è armonica} &\Leftrightarrow \tau(F) = -\Delta F \,\text{è ortogonale a}\, S^n \\ &\Leftrightarrow (\Delta F)(p) \,\text{è ortogonale a}\, T_{F(p)}S^n \ \forall p \in M \\ &\Leftrightarrow (\Delta F)(p) \,\text{è parallelo a}\, F(p) \ \forall p \in M \\ &\Leftrightarrow (\Delta F) = \lambda F \,\text{per qualche}\, \lambda \in \mathcal{F}(M). \end{aligned}$$

D'altronde (cfr. Appendice B, Esercizio B.11), $\|F\|^2 = 1$ implica:

$$0 = \frac{1}{2}\Delta \|F\|^2 = g_0(F, \Delta F) - g_0(\mathrm{d}F, \mathrm{d}F) = \lambda - \|\mathrm{d}F\|^2 = \lambda - \|\nabla F\|^2,$$

dove ∇F è il gradiente di F. Pertanto,

$$f : M \to S^n \,\text{è armonica} \Leftrightarrow \Delta F = \|\nabla F\|^2 \, F,$$

dove $\|\nabla F\| = \|\mathrm{d}F\| = \|\mathrm{d}f\| = \|\nabla f\|$.

• Se $f_1 = i : (M, g) \hookrightarrow (M', g')$ è un'immersione isometrica e consideriamo $f_2 : (M', g') \to (M'', g'')$, dalla formula (12.14) si ottiene

$$\begin{aligned} \tau(f_2 \circ i)(p) &= (\mathrm{d}f_2)_p \tau(i) + \mathrm{tr}(\nabla \mathrm{d}f_2)_p(i_*, i_*) \\ &= n(\mathrm{d}f_2)_p(H_p) + \mathrm{tr}(\nabla \mathrm{d}f_2)_p(i_*, i_*) \end{aligned}$$

per ogni $p \in M$, dove H è il vettore curvatura media dell'immersione $i : M \hookrightarrow M'$.

• Se $\pi : (M', g') \to (M, g)$ è una sommersione riemanniana armonica e $f : (M, g) \to (N, h)$, allora (cfr. [103]):

$$f \,\text{è armonica} \iff f \circ \pi : (M', g') \to (N, h) \ \text{è armonica.}$$

12.6 La 1^a formula variazionale

In questa sezione studiamo le applicazioni armoniche come punti critici del funzionale energia.

Definizione 12.22. Sia $f \in C^\infty(M, M')$. Una *variazione di* f è un'applicazione differenziabile

$$\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \longrightarrow M', \ (t, p) \longmapsto \Phi(t, p) = f_t(p), \ \text{tale che}$$

$$\Phi(0, p) = f_0(p) = f(p).$$

Quindi $\{f_t : M \longrightarrow M'\}_{t\in I}$, $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, è una famiglia di applicazioni differenziabili da M in M', con $f_0 = f$. Per un fissato $p \in M$,
$$\gamma_p(t) : I \longrightarrow M',\ t \longmapsto f_t(p),$$
è una curva differenziabile di M'. Di conseguenza,

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} \,:\, p \longmapsto \frac{\partial f_t}{\partial t}(p) = \big(f_p(t)\big)_*\Big(\frac{\mathrm{d}}{dt}\Big)_t = \dot\gamma_p(t) \in T_{\gamma_p(t)}M' = T_{f_t(p)}M'$$

definisce un campo di vettori lungo f_t, cioè $\frac{\partial f_t}{\partial t} \in \mathfrak{X}(f_t)$. Il corrispondente *campo variazionale di* f è il campo di vettori

$$V : p \longmapsto \left(\frac{\partial f_t}{\partial t}\right)_0 (p) = \dot\gamma_p(0) \in T_{f(p)}M',\ \text{ quindi } V \in \mathfrak{X}(f).$$

Si noti che, identificato $T_{(t,p)}(I \times M)$ con $T_t\mathbb{R} \times T_pM$, il campo V è dato da
$$V(p) = (\Phi_*)_{(0,p)}\left(\left(\frac{d}{dt}\right)_0, 0_p\right) = (\Phi_*)_{(0,p)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(0,p)},$$
dove $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(t,p)}$ estende in modo canonico $\left(\frac{d}{dt}\right)_t$ su $I \times M$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(t,p)} = \left(\left(\frac{d}{dt}\right)_t, 0_p\right) = \left(\frac{d}{dt}\right)_t \oplus 0_p.$$

Analogamente, un campo (locale) di vettori su M si estende in modo canonico su $I \times M$.

Proposizione 12.23. *Sia $f \in C^\infty(M,N)$ con M compatta ed M' varietà riemanniana. Allora, per ogni $u \in \mathfrak{X}(f)$ esiste una variazione $\Phi(t,p) = f_t(p)$ di f il cui campo variazionale $V = u$.*

Dimostrazione. Fissato $p \in M$, consideriamo W_p intorno totalmente normale di $f(p)$, cioè W_p è intorno di $f(p)$ in M' ed esiste un $\delta_p > 0$ tale che $\exp_q : B(0,\delta_p) \to \exp_q(B(0,\delta_p))$ sia un diffeomorfismo e $W_p \subset \exp_q(B(0,\delta_p))$ per ogni $q \in W_p$, dove $B(0,\delta_p) = \{v \in T_qM' : \|v\| < \delta_p\}$. Poiché $\{W_p\}_{p\in M}$ è un ricoprimento del compatto $f(M)$ di M', esiste un sottoricoprimento finito $W_1, ..., W_r$ di $f(M)$. Posto $\delta = \min\{\delta_1, ..., \delta_r\}$, $\exp_{f(p)}v$ è definita per ogni $p \in M$ e per ogni $v \in T_{f(p)}M'$ con $\|v\| < \delta$. Siccome M è compatta, possiamo definire $k = \max_{p\in M}\|u_p\|$. Inoltre, considerato un $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon < \delta/k$, abbiamo
$$\forall\, t \in (-\varepsilon,\varepsilon) : \|t\,u_p\| = |t|\,\|u_p\| < \varepsilon\,\|u_p\| < \tfrac{\delta}{k}\,k = \delta$$
e quindi possiamo considerare l'applicazione

$$\begin{aligned} \Phi : (-\varepsilon,\varepsilon) \times M &\longrightarrow M', \\ (t,p) &\longmapsto \Phi(t,p) = f_t(p) = \exp_{f(p)}(t\,u_p). \end{aligned} \tag{12.15}$$

$\Phi(t,p)$ definisce una variazione di f : $f_0 = f$. Inoltre, per $p \in M$, la curva $\gamma_p : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M'$, $t \longmapsto f_t(p) = \exp_{f(p)}(t\, u_p) = \gamma_{tu_p}(1) = \gamma_{u_p}(t)$ è la geodetica di N determinata dalle condizioni iniziali $\gamma_{u_p}(0) = f_0(p) = f(p)$, $\dot\gamma_{u_p}(0) = u(p)$. Pertanto, per questa variazione il campo variazionale è

$$V(p) = \frac{\partial f(t,p)}{\partial t}(0) = \dot\gamma_{u_p}(0) = u(p).$$

□

Ora, sia $f : (M,g) \longrightarrow (M',g')$ un'applicazione differenziabile tra due varietà riemanniane con M compatta. Data una variazione $\Phi(t,p) = \left\{f_t\right\}_{t\in I}$ di $f \in C^\infty(M,M')$, con M compatta, l'energia E definisce un'applicazione differenziabile

$$E(t) : I = (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}\,, \;\; t \longmapsto E(t) = E(f_t) = \frac{1}{2}\int_M \|(f_t)_*\|^2\, v_g.$$

Definizione 12.24. L'applicazione f si dice *punto critico* dell'energia E se per ogni variazione $\{f_t\}$ di f :

$$\frac{dE(t)}{dt}(0) = 0.$$

Teorema 12.25. *Sia $f : (M,g) \longrightarrow (M',g')$ un'applicazione differenziabile con M compatta. Se $\Phi = \left\{f_t\right\}_{t\in I}$ è una variazione di f, allora la corrispondente prima formula variazionale è data da*

$$\left.\frac{dE(t)}{dt}\right|_{t=0} = -\int_M \bar g(V,\tau(f))\, v_g, \tag{12.16}$$

dove $\bar g$ è la bundle-metric su $f^{-1}TM'$ indotta da g' e V è il campo variazionale.

Dimostrazione. Sia $\{e_i\}$ una base ortonormle locale per $\mathfrak{X}(M)$. La funzione derivata $E'(t)$ è data da

$$E'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(f_t) = \frac{1}{2}\int_M \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|(f_t)_*\|^2\, v_g,$$

dove

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|(f_t)_*\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g'\left((f_t)_*(e_i),(f_t)_*(e_i)\right).$$

Siccome

$$g'\left((f_t)_*(e_i),(f_t)_*(e_i)\right)(p) = g'_{f_t(p)}\left(f_{t*}(e_{ip}),(f_{t*}(e_{ip})\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g'\left((f_t)_*(e_i), (f_t)_*(e_i)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g'\left(\Phi_* e_i, \Phi_* e_i\right) = \frac{\partial}{\partial t} \bar{g}\left(\Phi_* e_i, \Phi_* e_i\right),$$

e quindi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g'\left((f_t)_*(e_i), (f_t)_*(e_i)\right) = 2\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \Phi_* e_i, \Phi_* e_i\right). \tag{12.17}$$

In queste uguaglianze si è tenuto conto dei seguenti fatti: e_i si può pensare come un campo locale su $I \times M$, $\Phi_* e_i \in \mathfrak{X}(\Phi)$, $\frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(I \times M)$, $\bar{g}$ è la bundle-metric su $\Phi^{-1}(TM')$ indotta da g', $\bar{\nabla}$ è compatibile con $\bar{g}$ (cfr. (12.7)). Applicando la (12.8) ai campi $\frac{\partial}{\partial t}$, $e_i \in \mathfrak{X}(I \times M)$, tenendo conto che $[\frac{\partial}{\partial t}, e_i] = 0$, si ha:

$$\begin{aligned}
\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \Phi_* e_i, \Phi_* e_i\right) &= \bar{g}\left(\bar{\nabla}_{e_i} \Phi_* \frac{\partial}{\partial t}, \Phi_* e_i\right) \\
&= e_i\, \bar{g}\left(\Phi_* \frac{\partial}{\partial t}, \Phi_* e_i\right) - \bar{g}\left(\Phi_* \frac{\partial}{\partial t}, \bar{\nabla}_{e_i} \Phi_* e_i\right),
\end{aligned} \tag{12.18}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usata ancora la (12.7). Ora, sia $X_t \in \mathfrak{X}(M)$ il campo vettoriale definito da:

$$g(X_t, Y) = \bar{g}\left(\Phi_* \tfrac{\partial}{\partial t}, \Phi_* Y\right) \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M) \subset \mathfrak{X}(I \times M).$$

Allora,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} e_i\, \bar{g}\left(\Phi_* \tfrac{\partial}{\partial t}, \Phi_* e_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} e_i\, g(X_t, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g\big(\nabla_{e_i} X_t, e_i\big) + g\big(X_t, \nabla_{e_i} e_i\big) \\
&= \mathrm{div} X_t + \sum_{i=1}^{n} g\big(X_t, \nabla_{e_i} e_i\big),
\end{aligned}$$

ossia

$$\sum_{i=1}^{n} e_i\, \bar{g}\left(\Phi_* \tfrac{\partial}{\partial t}, \Phi_* e_i\right) = \mathrm{div} X_t + \sum_{i=1}^{n} \bar{g}\left(\Phi_* \tfrac{\partial}{\partial t}, \Phi_* \nabla_{e_i} e_i\right). \tag{12.19}$$

Quindi, (12.17),(12.18) e (12.19) implicano

$$E'(t) = \int_M (\mathrm{div} X_t)\, v_g - \int_M \sum_{i=1}^{n} \bar{g}\left(\Phi_* \tfrac{\partial}{\partial t}, \bar{\nabla}_{e_i} \Phi_* e_i - \Phi_* \nabla_{e_i} e_i\right)\, v_g.$$

Applicando il Teorema di Green (cfr. Appendice B), si ottiene

$$E'(t) = -\int_M \bar{g}\left(\Phi_* \tfrac{\partial}{\partial t}, \textstyle\sum_{i=1}^n \left(\bar{\nabla}_{e_i}\Phi_* e_i - \Phi_* \nabla_{e_i} e_i\right)\right) v_g. \tag{12.20}$$

Siccome

$$\left(\Phi_* \tfrac{\partial}{\partial t}\right)_{(0,p)} = V_p, \quad \left(\Phi_* e_i\right)(0,p) = f_* e_i(p), \quad \left(\Phi_* \nabla_{e_i} e_i\right)(0,p) = f_*\left(\nabla_{e_i} e_i\right)_p,$$

dalla (12.20), tenendo presente la definizione del campo di tensione $\tau(f)$, si ottiene

$$\begin{aligned} E'(0) = \frac{dE(t)}{dt}\Big|_{t=0} &= -\int_M \bar{g}\Big(V, \sum_{i=1}^n \left(\bar{\nabla}_{e_i} f_* e_i - f_* \nabla_{e_i} e_i\right)\Big) v_g \\ &= -\int_M \bar{g}\big(V, \tau(f)\big) v_g. \end{aligned}$$

□

Dal Teorema 12.25, segue il seguente Teorema di Eells-Sampson [34].

Teorema 12.26. *Sia $f : (M,g) \to (M',g')$ un'applicazione differenziabile, con M compatta. Allora:*

f è armonica se, e solo se, f è punto critico del funzionale energia.

Dimostrazione. Sia $f \in C^\infty(M,M')$ armonica, allora $\tau(f) = 0$ e dalla (12.16) segue che f è punto critico di E. Viceversa, se f è punto critico del funzionale E, allora $E'(t)_{|t=0} = 0$ per ogni variazione f_t di f. La (12.16), applicata alla variazione definita dalla (12.15), implica

$$\int_M \bar{g}(u, \tau(f))\, v_g = 0. \tag{12.21}$$

In particolare, se consideriamo la variazione di f data dalla (12.15) con $u = \tau(f)$, la (12.21) diventa

$$\int_M \bar{g}(\tau(f), \tau(f))\, v_g = 0$$

e quindi $\tau(f) = 0$, cioè f è armonica. □

Osservazione 12.27. Un risultato fondamentale nella teoria delle applicazioni armoniche è il seguente Teorema di Eells-Sampson [34]: Se (M,g) e (M',g') sono due varietà riemanniane entrambe compatte e con M' avente curvatura sezionale non positiva, allora ogni applicazione differenziabile $f : (M,g) \to (M',g')$ è omotopa a un'applicazione armonica la quale ha energia minima nella sua classe di omotopia.

12.7 Il rough laplaciano

Sia (M, g) una varietà riemanniana n-dimensionale. Indichiamo con ∇ la connessione di Levi-Civita di M. Se $V \in \mathfrak{X}(M)$, ∇V si può pensare come un tensore di tipo $(1, 1)$

$$\nabla V : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \quad X \longmapsto (\nabla V)(X) = \nabla_X V.$$

Se S è un tensore di tipo $(1, 1)$ su M, la sua derivata covariante è il tensore

$$\nabla S : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y) \longmapsto (\nabla S)(X, Y),$$

che è di tipo $(1, 2)$, definito da

$$(\nabla S)(X, Y) = (\nabla_X S)(Y) := \nabla_X S(Y) - S(\nabla_X Y).$$

Prendendo $S = \nabla V$, poniamo per definizione $\nabla^2 V := \nabla(\nabla V)$, e quindi

$$(\nabla^2 V)(X, Y) = \big\{\nabla_X(\nabla V)\big\}(Y) = \nabla_X \nabla_Y V - \nabla_{\nabla_X Y} V.$$

Di conseguenza, se $\{e_i\}$ è una base locale ortonormale di campi di vettori, si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\nabla^2 V &= \sum_{i=1}^{n} (\nabla^2 V)(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n} \big\{\nabla_{e_i}(\nabla V)\big\}(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big\{\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} V - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} V\big\}. \end{aligned}$$

Definizione 12.28. L'operatore

$$\bar{\Delta} : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \; V \longmapsto \bar{\Delta} V = -\mathrm{tr}\nabla^2 V,$$

è detto *rough laplaciano* su M.

La seguente Proposizione estende la Proposizione 9.10.

Proposizione 12.29. *Per ogni $V, W \in \mathfrak{X}(M)$:*

$$\Delta g(V, W) = g(\bar{\Delta} V, W) + g(V, \bar{\Delta} W) - 2g(\nabla V, \nabla W), \tag{12.22}$$

dove Δ è l'operatore di Laplace-Beltrami. In particolare, se $\|V\|$=cost., abbiamo

$$g(\bar{\Delta} V, V) = \|\nabla V\|^2.$$

Dimostrazione. Sia p un fissato punto di M. Sia $\{e_i\}$ una base ortonormale locale di campi vettoriali su M geodetica in p, quindi $(\nabla e_i)_p = 0$. Poniamo

$V = \sum_k V^k e_k$ e $W = \sum_k W^k e_k$. Allora, applicando un risultato dell'Esercizio B.11, si ottiene

$$\begin{aligned}\Delta g(V,W) &= \sum_k \Delta(V^k W^k) \\ &= \sum_k \Big\{ V^k \Delta W^k + W^k \Delta V^k - 2g(\operatorname{grad} V^k, \operatorname{grad} W^k \Big\}. \qquad (12.23)\end{aligned}$$

Siccome

$$\begin{aligned}\sum_k g\big(\operatorname{grad} V^k, \operatorname{grad} W^k\big) &= \sum_{i,j,k} g\big(e_i(V^k)e_i, e_j(W^k)e_j\big) \\ &= \sum_{i,k} e_i(V^k)\, e_i(W^k), \\ \nabla_{e_i} W &= \nabla_{e_i} \sum_k W^k e_k \\ &= \sum_k \Big\{ e_i(W^k)e_k + W^k \nabla_{e_i} e_k \Big\}, \\ \big(\nabla_{e_i} W\big)(p) &= \sum_k \Big(e_i(W^k)e_k \Big)(p),\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}g\big(\nabla V, \nabla W\big)(p) &= \sum_i g\big(\nabla_{e_i} V, \nabla_{e_i} W\big)(p) \qquad (12.24) \\ &= \sum_{i,h,k} g\big(e_i(V^k)e_k, e_i(W^h)e_h\big)(p) \\ &= \sum_{i,k} e_i(V^k)(p)\, e_i(W^k)(p) \\ &= \sum_k g\big(\operatorname{grad} V^k, \operatorname{grad} W^k\big)(p).\end{aligned}$$

Inoltre, dalle seguenti formule

$$\begin{aligned}\big(\Delta W^k\big)(p) &= -\big(\operatorname{tr} \nabla^2 W^k\big)(p) \\ &= -\sum_i \Big(e_i e_i(W^k) - \big(\nabla_{e_i} e_i\big)(W^k)\Big)(p) \\ &= -\sum_i \big(e_i e_i(W^k)\big)(p), \\ \sum_k \big(V^k\, \Delta W^k\big)(p) &= -\sum_{i,k} \Big\{ V^k\, e_i\big(e_i(W^k)\Big\}(p),\end{aligned}$$

$$\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}W = \textstyle\sum_k \Big\{ e_i\big(e_i(W^k)\big)e_k + 2e_i(W^k)\nabla_{e_i}e_k + W^k\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}e_k \Big\},$$

$$\big(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}W\big)(p) = \sum_k \Big\{ e_i\big(e_i(W^k)\big)e_k + W^k\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}e_k \Big\}(p),$$

$$\begin{aligned}
\sum_i g\big(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}W, V\big)(p) &= \sum_{i,j,k} \Big\{ g\big(e_i\big(e_i(W^k)\big)e_k, V^j e_j\big) \Big\}(p) \\
&\quad + \sum_{i,j,k} \Big\{ W^k V^j g\big(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}e_k, e_j\big) \Big\}(p) \\
&= \sum_{i,j,k} \Big\{ V^j\, e_i\big(e_i(W^k)\delta_{jk} \Big\}(p) \\
&\quad - \sum_{i,j,k} \Big\{ W^k V^j g\big(\nabla_{e_i}e_k, \nabla_{e_i}e_j\big) \Big\}(p) \\
&\quad + \sum_{i,j,k} \Big\{ W^k V^j e_i g\big(\nabla_{e_i}e_k, e_j\big) \Big\}(p) \\
&= \sum_{i,k} \Big\{ V^k\, e_i\big(e_i(W^k)\Big\}(p) \\
&\quad + \sum_{i,j,k} \Big\{ W^k V^j e_i g\big(\nabla_{e_i}e_k, e_j\big) \Big\}(p) \\
&= -\sum_k \big(V^k\, \Delta W^k\big)(p) \\
&\quad + \sum_{i,j,k} \Big\{ W^k V^j e_i g\big(\nabla_{e_i}e_k, e_j\big) \Big\}(p), \\
\sum_i g\big(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}V, W\big)(p) &= -\sum_k \big(W^k\, \Delta V^k\big)(p) \\
&\quad + \sum_{i,j,k} \Big\{ V^k W^j e_i g\big(\nabla_{e_i}e_k, e_j\big) \Big\}(p) \\
&= -\sum_k \big(W^k\, \Delta V^k\big)(p) \\
&\quad - \sum_{i,j,k} \Big\{ V^j W^k e_i g\big(\nabla_{e_i}e_k, e_j\big) \Big\}(p), \\
g\big(\bar{\Delta}W, V\big)(p) &= -\sum_i g\big(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}W - \nabla_{\nabla_{e_i}e_i}W, V\big)(p) \\
&= -\sum_i g\big(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}W, V\big)(p),
\end{aligned}$$

si ha

$$g\big(\bar{\Delta}W, V\big)(p) + g\big(\bar{\Delta}V, W\big)(p) = \sum_k \big(V^k \,\Delta W^k\big)(p) + \sum_k \big(W^k \,\Delta V^k\big)(p). \tag{12.25}$$

La (12.22) segue da (12.23), (12.24) e (12.25). □

Sia $f : (M, g) \to (M', g')$ un'applicazione differenziabile tra due varietà riemanniane. Indichiamo con $\{e_i\}$ una base ortonormale locale di campi vettoriali su M. Sia $\bar{\nabla}$ la connessione indotta su $f^{-1}TM'$ dalla connessione di Levi-Civita di (M', g'). Se $V \in \mathfrak{X}(f)$, $\bar{\nabla}V$ è un tensore di tipo (1,1) su M a valori in $f^{-1}TM'$:

$$\bar{\nabla}V : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(f), X \mapsto \bar{\nabla}_X V.$$

$\bar{\nabla}^2 V$ è un tensore di tipo (1,2) su M a valori in $f^{-1}TM'$:

$$\bar{\nabla}^2 V = \bar{\nabla}(\bar{\nabla}V) : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(f), (X, Y) \mapsto (\bar{\nabla}^2 V)(X, Y),$$

dove

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}^2 V)(X, Y) &= \big(\bar{\nabla}_X(\bar{\nabla}V)\big)(Y) = \bar{\nabla}_X(\bar{\nabla}V)(Y) - (\bar{\nabla}V)(\nabla_X Y)\\ &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y V - \bar{\nabla}_{\nabla_X Y} V.\end{aligned}$$

$\mathrm{tr}\bar{\nabla}^2 V$ è un elemento di $\mathfrak{X}(f)$,

$$\mathrm{tr}\bar{\nabla}^2 V : M \to f^{-1}TM',\ p \mapsto \mathrm{tr}(\bar{\nabla}^2 V)_p,$$

dove

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\bar{\nabla}^2 V)_p &= \sum_i \left(\bar{\nabla}_{e_i}\bar{\nabla}_{e_i} V - \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} V\right)_p\\ &= \sum_i \left(\bar{\nabla}_{e_{ip}}\bar{\nabla}_{e_i} V - \bar{\nabla}_{\nabla_{e_{ip}} e_i} V\right)_p \in T_{f(p)}N.\end{aligned}$$

L'operatore $\bar{\Delta}_f : \mathfrak{X}(f) \longrightarrow \mathfrak{X}(f)$ definito da

$$V \longmapsto \bar{\Delta}_f V = -\mathrm{tr}\bar{\nabla}^2 V = -\textstyle\sum_i \left(\bar{\nabla}_{e_i}\bar{\nabla}_{e_i} V - \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} V\right),$$

è detto *rough laplaciano lungo l'applicazione f*. Se $f = I : (M, g) \to (M, g)$, $\mathfrak{X}(f) = \mathfrak{X}(M)$ e $\bar{\Delta}_f$ è l'usuale rough laplaciano $\bar{\Delta}$ su M. Più in generale, sia E un fibrato vettoriale riemanniano su (M, g) con bundle-metric $\bar{g}$ e connessione metrica $D : \mathfrak{X}(M) \times S(E) \to S(E)$, dove $S(E)$ è lo spazio delle sezioni di E. Si può definire il rough laplaciano

$$\bar{D} : S(E) \to S(E),\ \sigma \mapsto \bar{D}\sigma = -\mathrm{tr}D^2\sigma,$$

dove

$$\mathrm{tr}D^2\sigma = \sum_i \big(D^2\sigma\big)(e_i, e_i) = \sum_i \left(D_{e_i}D_{e_i}\sigma - D_{\nabla_{e_i} e_i}\sigma\right).$$

Proposizione 12.30. *Sia $f : (M,g) \to (M',g')$ un'applicazione differenziabile con M compatta. Per ogni $V,W \in \mathfrak{X}(f)$ il rough laplaciano $\bar{\Delta}_f$ soddisfa:*

$$\int_M \bar{g}(\bar{\Delta}_f V, W)v_g = \int_M \bar{g}(\bar{\nabla}V, \bar{\nabla}W)v_g = \int_M \bar{g}(V, \bar{\Delta}_f W)v_g, \qquad (12.26)$$

dove

$$\bar{g}(\bar{\nabla}V, \bar{\nabla}W) = \textstyle\sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i}V, \bar{\nabla}_{e_i}W), \quad n = \dim M.$$

Quindi, $\bar{\Delta}_f$ è un operatore simmetrico semi-definito positivo.

Dimostrazione. É sufficiente provare la prima uguaglianza della (12.26). Applicando la compatibilità di $\bar{\nabla}$ con $\bar{g}$, si ottiene

$$\bar{g}(\bar{\Delta}_f V, W) = -\sum_{i=1}^n \left\{\bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i}\bar{\nabla}_{e_i}V, W) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i}V, W)\right\}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\bar{g}(\bar{\Delta}_f V, W) = &-\sum_{i=1}^n \left\{e_i\ \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i}V, W) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i}V, W)\right\} \\ &+\sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i}V, \bar{\nabla}_{e_i}W).\end{aligned} \qquad (12.27)$$

Sia $\alpha \in \Lambda^1(M)$ la 1-forma definita da

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M),\ Y \longmapsto \bar{g}(\bar{\nabla}_Y V, W).$$

Sia X il campo vettoriale g-duale di α, quindi

$$g(X,Y) = \alpha(Y) = \bar{g}(\bar{\nabla}_Y V, W).$$

Di conseguenza, applicando la (12.27), si ottiene

$$\begin{aligned}\mathrm{div}X &= \sum_{i=1}^n g(e_i, \nabla_{e_i}X) = \sum_{i=1}^n \{e_i\, g(e_i, X) - g(X, \nabla_{e_i}e_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{e_i\ \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i}V, W) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i}V, W)\right\} \\ &= -\bar{g}(\bar{\Delta}_f V, W) + \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i}V, \bar{\nabla}_{e_i}W).\end{aligned}$$

D'altronde per il Teorema di Green: $\int_M(\mathrm{div}X)v_g = 0$, per cui dalla formula precedente segue il risultato. □

Il rough laplaciano $\bar{\Delta}$ è un operatore differenziale ellittico del secondo ordine. Questo fatto e il risultato della proposizione precedente valgono anche nel caso del rough laplaciano $\bar{D}$ definito su un fibrato vettoriale riemanniano E su M, dove M è una varietà riemanniana compatta (cfr. [114], p. 153; [124], p. 9). Infine, ricordiamo (cfr. (9.9)) che il rough laplaciano $\bar{\Delta} : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ è legato al laplaciano Δ_1 (detto anche operatore di Hodge-de Rham) operante sulle 1-forme (e quindi sui campi di vettori) dalla seguente formula

$$\Delta_1 = \bar{\Delta} + Q, \text{ dove } Q \text{ è l'operatore di Ricci.}$$

12.8 Sezioni armoniche

Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta e sia X un campo di vettori su M. X è una sezione di TM e quindi si può pensare come un'applicazione tra (M, g) e (TM, G_s), dove G_s denota la metrica di Sasaki su TM. L'*energia di un campo di vettori* $X \in \mathfrak{X}(M)$ è l'energia della corrispondente applicazione $X : (M, g) \to (TM, G_s)$. Quindi, la densità di energia di X è data da

$$e(X)(p) = \frac{1}{2} \|X_{*p}\|^2 = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(X^* G_s)(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} L_X \quad \forall\, p \in M.$$

Sia $\{E_{ip}\}_{i=1,\dots,n}$ una base ortonormale di T_pM. Poiché il differenziale $X_* : T_pM \to T_zTM$, $z = (p, X_p)$, soddisfa

$$X_*(E_{ip}) = (E_{ip})^H_z + (\nabla_{E_{ip}} X)^V_z\,,$$

dalla definizione di metrica di Sasaki, si ha

$$\begin{aligned} 2\, e(X)(p) &= \sum_{i=1}^{n} (X^* G_s)_p(E_{ip}, E_{ip}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(g_p(E_{ip}, E_{ip}) + g_p(\nabla_{E_{ip}} X, \nabla_{E_{ip}} X) \big) \\ &= n + \sum_{i=1}^{n} \|\nabla_{E_i} X\|^2_p = n + \|\nabla X\|^2_p\,. \end{aligned}$$

Oppure, determinando L_X si trova $L_X = I + (\nabla X)^T (\nabla X)$. Quindi,

$$E(X) = \int_M e(X)\; v_g = \frac{1}{2}\, n \operatorname{vol}(M, g) + \frac{1}{2} \int_M \|\nabla X\|^2\, v_g\,. \tag{12.28}$$

Definizione 12.31. Un campo di vettori X si dice che è una *sezione armonica* se $X : (M, g) \to (TM, G_s)$ è un'applicazione armonica.

Teorema 12.32. (di Ishihara [49]) *Sia* (M, g) *una varietà Riemanniana compatta e sia* $X \in \mathfrak{X}(M)$*. Allora* X *è una sezione armonica se, e solo se,* X *è parallelo (cioè* $\nabla X = 0$*).*

Dimostrazione. L'applicazione $X : M \to TM$ è un'applicazione armonica se, e solo se, X è un punto critico del funzionale energia $E : C^\infty(M, TM) \to \mathbb{R}$, cioè, $\big(\mathrm{d}E(X_t)/\mathrm{d}t\big)(0) = 0$ per ogni variazione $X_t(p) = X(t, p)$ di X in $C^\infty(M, TM)$, quindi con $X_0 = X$. Sia, dunque, X un punto critico di E. Consideriamo la seguente variazione (di X)

$$X(t, p) : (-\epsilon, +\epsilon) \times M \to TM \ , \quad (t, p) \mapsto X(t, p) = (1 + t)X_p \, .$$

Applicando la (12.28), abbiamo

$$E(X_t) = \frac{1}{2} n\mathrm{vol}(M, g) + \frac{1}{2} (1 + t)^2 \int_M \|\nabla X\|^2 \, v_g \, ,$$

da cui ricaviamo

$$\frac{dE(X_t)}{dt} = (1 + t) \int_M \|\nabla X\|^2 \, v_g \, .$$

Quindi

$$0 = \frac{\mathrm{d}E(X_t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \int_M \|\nabla X\|^2 \, v_g \qquad \text{implica} \quad \nabla X = 0 \, .$$

Viceversa, assumiamo che $\nabla X = 0$ e proviamo che il campo di tensione di X è nullo. Il campo di tensione $\tau(X)$ è un campo di vettori lungo X, perciò $\tau(X)_p \in T_z(TM)$, $z = (p, X_p)$. Separando la componente orizzontale e quella verticale di $\tau(X)$ si trova (cfr. [49])

$$\tau(X) = \{\mathrm{tr} R(\nabla_{.} X, X) \cdot\}^H + \{-\bar{\Delta} X\}^V ,$$

dove $\bar{\Delta} X = -\mathrm{tr} \nabla^2 X$ è il rough laplaciano di X. Se X è parallelo, cioè $\nabla X = 0$, allora $\mathrm{tr} R(\nabla_{.} X, X) \cdot = 0$ e $\nabla^2 X = \nabla(\nabla X) = 0$. Pertanto, $\tau(X) = 0$ e X è un'applicazione armonica. $\square$

In particolare, un campo di vettori unitario U è una sezione di $T_1 M$ e quindi si può pensare anche come un'applicazione tra (M, g) e $(T_1 M, G_s)$. In questo caso risulta che $U : (M, g) \to (T_1 M, G_s)$ è un'applicazione armonica se, e solo se, $\bar{\Delta} U = \|\nabla U\|^2 U$ e $\mathrm{tr} R(\nabla_{.} U, U) \cdot = 0$ (cfr. [47]). Ad esempio, il campo di Hopf ξ definisce un'applicazione armonica tra la sfera canonica e il fibrato sferico unitario tangente $T_1 S^{2n+1}$ (cfr. [47] ed anche [90],[91]). La condizione $\bar{\Delta} U = \|\nabla U\|^2 U$ caratterizza i campi di vettori unitari come punti critici del funzionale energia E ristretto allo spazio $\mathfrak{X}^1(M)$, quando non vuoto, di tutti i campi vettoriali unitari su M (cfr. [121]). L'articolo [121] è il primo di una lunga lista di articoli nell'ambito di questa teoria (cfr., ad esempio, la monografia [33]).

12.9 La 2^a formula variazionale e stabilità

12.9.1 Forma hessiana dell'energia e l'operatore di Jacobi

Preliminarmente introduciamo alcune notazioni che ci saranno utili nella formula della variazione seconda di un'applicazione armonica. Tale formula è dovuta a Smith [102] e Mazet [66].

Sia $f : (M, g) \to (M', g')$ un'applicazione differenziabile. Indichiamo con R' il tensore di curvatura di (M', g') definito da

$$R'(X, Y)Z = -\nabla'_X \nabla'_Y Z + \nabla'_Y \nabla'_X Z + \nabla'_{[X,Y]} Z.$$

$R' \circ f_* = R'(f_*, f_*)f_*$ è un tensore di tipo (1,3) su M a valori in $f^{-1}TN$. Per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$: $R'(f_*X, f_*Y)f_*Z \in \mathfrak{X}(f)$, dove

$$\left(R'(f_*X, f_*Y)f_*Z\right)(p) = R'_{f(p)}(f_{*p}X_p, f_{*p}Y_p)f_{*p}Z_p \in T_{f(p)}M'.$$

Inoltre, dalla Proposizione 12.3, si ha

$$R'\big(f_*X, f_*Y\big)f_*Z = -\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y f_*Z + \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y f_*Z + \bar{\nabla}_{[X,Y]} f_*Z.$$

Consideriamo l'operatore

$$Ric_f : \mathfrak{X}(f) \longrightarrow \mathfrak{X}(f),\ V \longmapsto Ric_f V = -\mathrm{tr} R'(V, f_*)f_*.$$

Se $\{e_i\}$ è una base ortonormale locale di campi vettoriali su M,

$$\mathrm{tr} R'(V, f_*)f_* : M \to f^{-1}TM', p \mapsto \mathrm{tr}\left(R'(V, f_*)f_*\right)_p,$$

dove

$$\mathrm{tr}\left(R'(V, f_*)f_*\right)_p = \sum_{i=1}^{n} R'_{f(p)}(V_p, f_{*p}e_{ip})f_{*p}e_{ip}.$$

Per ogni $V, W \in \mathfrak{X}(f)$ e per ogni $\varphi \in \mathcal{F}(M)$, l'operatore Ric_f soddisfa:

$$Ric_f(\varphi V) = \varphi Ric_f V, \quad Ric_f(V + W) = Ric_f V + Ric_f W,$$

$$\bar{g}\left(Ric_f V, W\right) = \bar{g}\left(V, Ric_f W\right).$$

Teorema 12.33. (formula della variazione seconda)
Sia $f : (M, g) \longrightarrow (M', g')$ un'applicazione armonica con M compatta. Se $\{f_t\}_{t \in I}$ è una variazione di f, allora

$$\begin{aligned} \frac{d^2E(t)}{dt^2}(0) &= -\int_M \bar{g}\left(V, tr\left(\bar{\nabla}^2 V - R'(V, f_*)f_*\right)\right) v_g \qquad (12.29) \\ &= \int_M \bar{g}\left(V, \bar{\Delta}_f V - Ric_f V\right) v_g, \end{aligned}$$

dove V è il campo variazionale.

Dimostrazione. Sia $\Phi = \big(f_t\big)_{t\in I}$, $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, una variazione dell'applicazione armonica $f : (M, g) \longrightarrow (M', g')$. La derivata prima $E'(t)$ è data dalla (12.20):

$$E'(t) = -\int_M \bar g\Big(\Phi_* \tfrac{\partial}{\partial t}, \textstyle\sum_{i=1}^n \big(\bar\nabla_{e_i}\Phi_* e_i - \Phi_* \nabla_{e_i} e_i\big)\Big)\, v_g.$$

Derivando questa equazione, e applicando la compatibilità di $\bar\nabla$ con $\bar g$, otteniamo

$$\begin{aligned} E''(t) &= -\int_M \tfrac{\partial}{\partial t}\bar g\Big(\Phi_* \tfrac{\partial}{\partial t}, \textstyle\sum_{i=1}^n \big(\bar\nabla_{e_i}\Phi_* e_i - \Phi_* \nabla_{e_i} e_i\big)\Big)\, v_g \\ &= -\int_M \bar g\Big(\bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\Phi_* \tfrac{\partial}{\partial t}, \textstyle\sum_{i=1}^n \big(\bar\nabla_{e_i}\Phi_* e_i - \Phi_* \nabla_{e_i} e_i\big)\Big)\, v_g \\ &\quad -\int_M \bar g\Big(\Phi_* \tfrac{\partial}{\partial t}, \textstyle\sum_{i=1}^n \bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \big(\bar\nabla_{e_i}\Phi_* e_i - \Phi_* \nabla_{e_i} e_i\big)\Big)\, v_g. \end{aligned} \tag{12.30}$$

Il primo termine della (12.30), per $t = 0$, si annulla. Infatti, essendo f applicazione armonica, si ha:

$$\Big(\sum_{i=1}^n \big(\bar\nabla_{e_i}\Phi_* e_i - \Phi_* \nabla_{e_i} e_i\big)\Big)_{|t=0} = \sum_{i=1}^n \big(\bar\nabla_{e_i} f_* e_i - f_* \nabla_{e_i} e_i\big) = \tau(f) = 0.$$

Applicando la definizione di $R' \circ f_*$, la (12.8), e tenendo conto che $[\frac{\partial}{\partial t}, e_i] = 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} \bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\bar\nabla_{e_i}\Phi_* e_i &= \bar\nabla_{e_i}\bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\Phi_* e_i + \bar\nabla_{[\frac{\partial}{\partial t}, e_i]}\Phi_* e_i - R'\Big(\Phi_* \tfrac{\partial}{\partial t}, \Phi_* e_i\Big)\Phi_* e_i \\ &= \bar\nabla_{e_i}\bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\Phi_* e_i - R'\Big(\Phi_* \tfrac{\partial}{\partial t}, \Phi_* e_i\Big)\Phi_* e_i \\ &= \bar\nabla_{e_i}\Big(\bar\nabla_{e_i}\Phi_* \tfrac{\partial}{\partial t} + \Phi_*[\tfrac{\partial}{\partial t}, e_i]\Big) - R'\Big(\Phi_* \tfrac{\partial}{\partial t}, \Phi_* e_i\Big)\Phi_* e_i \\ &= \bar\nabla_{e_i}\bar\nabla_{e_i}\Phi_* \tfrac{\partial}{\partial t} - R'\Big(\Phi_* \tfrac{\partial}{\partial t}, \Phi_* e_i\Big)\Phi_* e_i. \end{aligned}$$

Inoltre, tenendo conto che $[\frac{\partial}{\partial t}, \nabla_{e_i} e_i] = 0$, applicando la (12.8), otteniamo

$$\bar\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\Phi_* \nabla_{e_i} e_i = \Phi_*[\tfrac{\partial}{\partial t}, \nabla_{e_i} e_i] + \bar\nabla_{\nabla_{e_i} e_i}\Phi_* \tfrac{\partial}{\partial t} = \bar\nabla_{\nabla_{e_i} e_i}\Phi_* \tfrac{\partial}{\partial t}.$$

Pertanto, dalla (12.30), per $t = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} E''(0) &= \int_M \bar g\Big(V, \sum_{i=1}^n \big(-\bar\nabla_{e_i}\bar\nabla_{e_i} V + \bar\nabla_{\nabla_{e_i} e_i} V\big) \\ &\qquad + \sum_{i=1}^n R'(V, f_* e_i) f_* e_i\Big) v_g \\ &= \int_M \bar g\big(V, \bar\Delta_f V - Ric_f\, V\big) v_g. \end{aligned}$$

□

Il teorema precedente ci dice che la variazione seconda dell'energia è determinata dal campo variazionale V lungo l'applicazione armonica e dal tensore di curvatura di (M', g'). Per $V \in \mathfrak{X}(f)$, la forma hessiana dell'energia nel punto critico f (applicazione armonica) è la forma quadratica $(\mathrm{Hess}\, E)_f$ su $\mathfrak{X}(f)$ data da

$$(\mathrm{Hess}\, E)_f(V,V) = \big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}E(f_t)\big)_{|t=0} = \int_M \bar{g}\big(V, \bar{\Delta}_f V - \; Ric_f\, V\big) v_g,$$

dove f_t, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, è una variazione di f il cui campo variazionale è V. Hessiano dell'energia nel punto critico f è l'applicazione bilineare simmetrica $(\mathrm{Hess}\, E)_f$ definita, per ogni $V, W \in \mathfrak{X}(f)$, da :

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hess}\, E)_f(V,W) &= \int_M \bar{g}\left(V, \bar{\Delta}_f W - Ric_f\, W\right)\, v_g \\ &= \int_M \bar{g}\,(V, J_f W)\, v_g\ .\end{aligned} \tag{12.31}$$

La bilinearità di H_f è riferita alla struttura vettoriale reale di $\mathfrak{X}(f)$.

Definizione 12.34. L'operatore

$$J_f : \mathfrak{X}(f) \longrightarrow \mathfrak{X}(f),\ V \longmapsto J_f V = (\bar{\Delta}_f - Ric_f)V,$$

è detto *operatore di Jacobi di f*.

J_f è un operatore differenziale ellittico autoaggiunto del secondo ordine con parte principale $\bar{\Delta}_f$. Si possono quindi introdurre le nozioni di nullità, indice, e stabilità per applicazioni armoniche:

$$\text{nullity(f)} := \dim\left\{V \in \mathfrak{X}(f) : (\mathrm{Hess}\, E)_f(V,\cdot) = 0,\right\},$$

$$\text{index(f)} := s,$$

dove

$$s = \mathrm{Sup}\left\{\dim S, S \text{ sottospazio di } \mathfrak{X}(f) : (\mathrm{Hess}\, E)_f(V,V) < 0,\ \forall V \in S\right\}.$$

Si noti che indice e nullità sono finiti quando M è compatta (cfr. [66]).

Definizione 12.35. Un'applicazione armonica f è detta *applicazione armonica stabile* se $\mathrm{index}(f) = 0$, cioè

$$(\mathrm{Hess}\, E)_f(V,V) \geq 0 \quad \forall V \in \mathfrak{X}(f),$$

equivalentemente

$$\frac{\mathrm{d}^2 E(t)}{dt^2}(0) \geq 0 \quad \text{per ogni variazione } \left\{f_t\right\}_{t\in I} \text{ di } f.$$

Di coseguenza, un'applicazione armonica f è *instabile* se $\text{index}(f) > 0$, cioè

$$\text{se esiste } V \in \mathfrak{X}(f) \text{ tale che } (Hess\,E)_f(V,V) < 0.$$

Spettro dell'operatore di Jacobi

Poiché J_f è un operatore differenziale del secondo ordine ellittico e autoaggiunto, con M compatta, il suo spettro, denotato con $\text{Spec}(J_f)$, consiste di un insieme discreto (infinito) di autovalori con molteplicità finita:

$$\text{Spec}(J_f) = \{\lambda_1(f) \leq \lambda_2(f) \leq ..... \leq \lambda_i(f) \leq ..... \uparrow \infty\}. \tag{12.32}$$

Ricordiamo che λ è un autovalore di J_f se

$$V_\lambda(J_f) := \{V \in \mathfrak{X}(f) : J_f V = \lambda V\} \neq \{0\}.$$

$V_\lambda(J_f)$ è l'autospazio relativo a λ, la sua dimensione è detta molteplicità di λ. Nella (12.32) ogni autovalore compare un numero di volte uguale alla sua molteplicità. In termini di autovalori di J_f, risulta:

$$\text{index}(f) = \textstyle\sum_{\lambda<0} \dim V_\lambda(f),$$

$$\text{nullity}(f) = \dim V_0(f) = \dim\text{Ker} J_f,$$

$$f \text{ è stabile } \iff \lambda_i \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, ...$$

$$f \text{ è instabile } \iff \lambda_1 < 0\,.$$

Nel seguito di questa sezione viene studiato lo spettro dell'operatore di Jacobi J_f per un'applicazione costante e per un'applicazione a valori in un toro.

L'operatore di Jacobi di un'applicazione costante

Sia $f : (M, g) \longrightarrow (M', g')$ un'applicazione costante: $f(p) = q$, $\forall\, p \in M$. In tal caso f è un'applicazione armonica e

$$\mathfrak{X}(f) = \{V : V(p) \in T_q M', \ \forall p \in M\}.$$

Quindi, se $\{v_1, ..., v_m\}$ è una base di $T_q M'$, possiamo definire $V_i \in \mathfrak{X}(f)$, $1 \leq i \leq m = \dim M'$, ponendo

$$V_i(p) = v_i, \ \forall p \in M.$$

Siccome ogni vettore di $T_q M'$ si può esprimere come combinazione lineare di $v_1, ..., v_m$, si ottiene

$$\mathfrak{X}(f) = \{V = \textstyle\sum_{i=1}^m \varphi_i V_i, \ \varphi_i \in \mathcal{F}(M)\}.$$

Calcoliamo ora $J_f V = \bar{\Delta}_f V - Ric_f\, V$ per un arbitrario $V \in \mathfrak{X}(f)$. Siccome f è costante, $f_* = 0$ e quindi

$$Ric_f\, V = -\text{tr}\, R'(V, f_*) f_* = 0.$$

Sia $V \in \mathfrak{X}(f)$, $V = \sum_{\alpha=1}^m \varphi_\alpha V_\alpha$. Siccome f =cost. e V_α ha funzioni componenti costanti, dalla (12.2) segue che $\bar{\nabla}_X V_\alpha = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ e quindi

$$\bar{\nabla}_X V = \sum_{\alpha=1}^m \left(X(\varphi_\alpha)V_\alpha + \varphi_\alpha \bar{\nabla}_X V_\alpha \right) = \sum_{\alpha=1}^m X(\varphi_\alpha)V_\alpha.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} J_f V &= \bar{\Delta}_f V = -\sum_{i=1}^n \left(\bar{\nabla}_{e_i}\bar{\nabla}_{e_i} V - \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i} V \right) \\ &= -\sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^m \Big(e_i e_i(\varphi_\alpha) - (\nabla_{e_i}e_i)\varphi_\alpha \Big) V_\alpha \\ &= -\sum_{\alpha=1}^m \sum_{i=1}^n \Big(e_i e_i(\varphi_\alpha) - (\nabla_{e_i}e_i)\varphi_\alpha \Big) V_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \left(\Delta_g \varphi_\alpha \right) V_\alpha, \end{aligned}$$

dove e_i è una base ortonormale locale di campi vettoriali su M e Δ_g è l'operatore di Laplace-Beltrami di (M, g). Pertanto, abbiamo la seguente

Proposizione 12.36. *Se $f : (M, g) \longrightarrow (M', g')$, con M compatta, è un'applicazione costante, allora lo spettro del suo operatore di Jacobi è l'insieme degli autovalori dell'operatore di Laplace-Beltrami di (M, g) contati m volte, $m = \dim M'$, ossia:*

$$\text{Spec } (J_f) = m \times \text{Spec } (\Delta_g).$$

In particolare, Spec(J_f) non dipende dal punto $q = f(M) \in M'$. Inoltre, se consideriamo due applicazioni costanti $f_1 : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_1, g_1')$ e $f_2 : (M_2, g_2) \longrightarrow (M_2', g_2')$, allora:

$$\text{Spec } (J_{f_1}) = \text{Spec } (J_{f_2}) \Leftrightarrow \text{dim} M_1' = \text{dim} M_2' \text{ e } \text{Spec}\, \Delta_{g_1} = \text{Spec}\, \Delta_{g_2}.$$

Siccome

$$\text{Spec } \Delta_g = \{0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots.. \leq \lambda_i \leq \ldots.. \uparrow \infty\},$$

dove la molteplicita di λ_0 è 1 (le funzioni armoniche su una varietà riemanniana compatta sono le costanti), segue il seguente

Corollario 12.37. *Se $f : (M, g) \longrightarrow (M', g')$, con M compatta, è un'applicazione costante, allora*

$$\text{index}(f) = 0 \quad (\text{quindi } \ f \text{ è stabile}),$$
$$\text{nullity}(f) = \dim\, V_0(f) = \dim\, \text{Ker} J_f = m = \dim\, M'.$$

La Proposizione 12.36 ci dice che la teoria della variazione seconda di un'applicazione costante è non banale. Inoltre, l'operatore di Jacobi si può pensare anche come una naturale generalizzazione dell'operatore di Laplace-Beltrami Δ_g: quest'ultimo si può identificare con l'operatore di Jacobi di un'applicazione costante $f : (M, g) \to \mathbb{R}$.

L'operatore di Jacobi di un'applicazione a valori in un toro.

Siano (M, g) una varietà riemanniana compatta, $(\mathbb{T}^m, g_0)$ un toro piatto e $\phi : (M, g) \longrightarrow (\mathbb{T}^m, g_0)$ un'applicazione armonica. Intanto, ϕ è stabile (cfr. Proposizione 12.40). Poiché $\mathbb{T}^m$ è parallelizzabile, esistono $Y_1, ..., Y_m \in \mathfrak{X}(\mathbb{T}^m)$ linearmente indipendenti e paralleli. Ponendo $\tilde{Y}_\alpha = Y_\alpha \circ \phi$ otteniamo m-elementi di $\mathfrak{X}(\phi)$ che risultano ancora linearmente indipendenti. Quindi,

$$\mathfrak{X}(\phi) = \big\{V = \textstyle\sum_{\alpha=1}^m \varphi_\alpha \tilde{Y}_\alpha, \ \varphi_\alpha \in \mathcal{F}(M)\big\}.$$

Inoltre, siccome $\mathbb{T}^m$ è piatto, i coefficienti della connessione di Levi-Civita di $\mathbb{T}^m$ sono nulli e quindi (cfr. (12.6)):

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} = 0.$$

D'altronde, si può prendere un sistema di coordinate locali (y_α) per cui localmente $Y_\alpha = \frac{\partial}{\partial y_\alpha}$. Quindi,

$$\bar{\nabla}_X \tilde{Y}_\alpha = 0.$$

Da questa condizione, per $X \in \mathfrak{X}(M)$ e per $V = \sum_{\alpha=1}^m \varphi_\alpha \tilde{Y}_\alpha \in \mathfrak{X}(\phi)$, segue che

$$\bar{\nabla}_X V = \textstyle\sum_{\alpha=1}^m X(\varphi_\alpha)\tilde{Y}_\alpha.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_\phi V &= -\sum_{i=1}^n \big(\bar{\nabla}_{e_i}\bar{\nabla}_{e_i}V - \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i}V\big) \\ &= -\sum_{\alpha=1}^m \sum_{i=1}^n \Big(e_i e_i(\varphi_\alpha) - (\nabla_{e_i}e_i)\varphi_\alpha\Big)\tilde{Y}_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \big(\Delta_g \varphi_\alpha\big)\tilde{Y}_\alpha, \end{aligned}$$

dove Δ_g è l'operatore di Laplace-Beltrami di (M, g). D'altronde,

$$J_\phi V = \bar{\Delta}_\phi V - Ric_\phi\, V = \bar{\Delta}_\phi V.$$

Pertanto abbiamo la seguente

Proposizione 12.38. (Urakawa [113]) *Se $\phi : (M, g) \longrightarrow (\mathbb{T}^m, g_0)$, con M compatta, è un'applicazione armonica, allora*

$$\text{Spec } (J_\phi) = m \times \text{Spec } (\Delta_g).$$

In particolare, se $\phi' : (M', g') \longrightarrow (\mathbb{T}^p, g_0)$, con M' compatta, è un'altra applicazione armonica, risulta

$$\text{Spec } (J_\phi) = \text{Spec } (J'_\phi) \iff m = p \quad \text{e} \quad \text{Spec}(\Delta_g) = \text{Spec } (\Delta_{g'}).$$

Dalle Proposizioni 12.36 e 12.38, segue la seguente

Proposizione 12.39. *Se $\phi : (M, g) \longrightarrow (\mathbb{T}^m, g_0)$, con M compatta, è un'applicazione armonica e $f_0 : (M, g) \longrightarrow (\mathbb{T}^m, g_0)$ è un'applicazione costante, allora*

$$\text{Spec } (J_\phi) = \text{Spec } (J_{f_0}).$$

Quindi, lo spettro di J_ϕ non determina, in generale, l'applicazione armonica ϕ.

Un esempio di applicazione armonica a valori in un toro piatto è dato dalla cosiddetta applicazione di Albenese $\phi : (M, g) \longrightarrow (\mathbb{T}^p, g_0)$, dove p è dato dal primo numero di Betti b_1 di M che si assume positivo (cfr. J. Jost, [53] p. 87-88). Si noti che una varietà riemanniana compatta (M, g) con tensore di Ricci definito positivo ha $b_1 = 0$.

12.9.2 Il Teorema di Xin

Il Teorema di Xin riguarda l'instabilità di applicazioni armoniche sulla sfera. Intanto, diamo il seguente risultato di stabilità.

Proposizione 12.40. *Se (M, g) è compatta e (M', g') ha curvatura sezionale non positiva, allora ogni applicazione armonica $f : (M, g) \longrightarrow (M', g')$ è stabile. In particolare, si ottiene che ogni applicazione armonica $f : (M, g) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, g_0)$ è stabile.*

Dimostrazione. Se (M', g') ha curvatura sezionale non positiva, allora per ogni $u, v \in T_q M'$:

$$R'(u, v, u, v) = g'(R'(u, v)u, v) \leq 0.$$

Quindi, per ogni $V \in \mathfrak{X}(f)$ e per ogni $p \in M$, si ha

$$\begin{aligned} \bar{g}\,(Ric_f\, V, V)\,(p) &= \sum_{i=1}^{n} g' \left(R'(V_p, f_* e_{i_p}) f_* e_{i_p}, V_p \right) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} R' \left(V_p, f_* e_{i_p}, V_p, f_* e_{i_p} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

D'altronde

$$\int_M \bar{g}(\bar{\Delta}_f V, V) v_g = \int_M \bar{g}(\bar{\nabla} V, \bar{\nabla} V) v_g \geq 0.$$

Pertanto, dalla (12.31), segue che $(Hess\, E)_f(V, V) \geq 0$ per ogni $V \in \mathfrak{X}(f)$. □

Per applicazioni armoniche definite sulla sfera canonica abbiamo il seguente risultato di instabilità di Xin [123].

Teorema 12.41. *Sia $\mathbb{S}^n$ la sfera canonica di curvatura sezionale costante $+1$, $n \geq 3$. Allora ogni applicazione armonica $f : \mathbb{S}^n \to (M', g')$, non costante, è instabile;*

Dimostrazione. Sia $f : \mathbb{S}^n \to (M', g')$, $n \geq 3$, un'applicazione armonica. Per provare il teorema basta provare che se f è stabile allora f è costante. Per ogni $p \in \mathbb{S}^n$: $T_p\mathbb{R}^{n+1} = T_p\mathbb{S}^n \oplus (T_p\mathbb{S}^n)^\perp$ e quindi per ogni $V \in T_p\mathbb{R}^{n+1}$, $V \equiv a \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$V = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad V = V^\top + V^\perp,$$

$$V^\top = a - g_0(a,p)p \quad \text{e} \quad V^\perp = g_0(a,p)p\,,$$

dove g_0 denota il prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^{n+1}$. Pertanto

$$T_p\mathbb{S}^n = \left\{ a - g_0(a,p)p, \ \ a \in \mathbb{R}^{n+1} \right\}, \tag{12.33}$$

e per ogni $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ si definisce il campo vettoriale $W_a \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$ ponendo:

$$W_a(p) := a - g_0(a,p)p\,.$$

Si noti che $W_a = \operatorname{grad} h_a$, dove $h_a(p) = g_0(a,p)$ per ogni $p \in \mathbb{S}^n$. Questi campi vettoriali soddisfano le seguenti proprietà:

$$\nabla_{X_p} W_a = -g_0(a,p)X_p \quad \forall X_p \in T_p\mathbb{S}^n, \quad \bar{\Delta} W_a = W_a.$$

Usando queste formule, si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_f f_* W_a &= -\sum_{i=1}^{n} R'(f_*W_a, f_*e_i)f_*e_i + (2-n)f_*W_a \\ &= Ric_f\, f_*W_a + (2-n)f_*W_a, \end{aligned} \tag{12.34}$$

dove $f_*W_a \in \mathfrak{X}(f)$ ed $\{e_i\}$ è una base ortonormale locale di campi di vettori su $\mathbb{S}^n$. Allora, la (12.34) e la (12.31) implicano

$$(\mathrm{Hess} E)_f(f_*W_a, f_*W_a) = (2-n) \int_{\mathbb{S}^n} \bar{g}(f_*W_a, f_*W_a) v_{g_0}. \tag{12.35}$$

Siccome stiamo assumendo f stabile ed $n \geq 3$, dalla (12.35) si ottiene

$f_*W_a = 0$, cioè $f_{*p}W_a(p) = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ e per ogni $p \in \mathbb{S}^n$.

Pertanto, tenendo conto della (12.33), otteniamo che $f_* = 0$ e quindi f è costante. □

Osservazione 12.42. Come già osservato, se $f : (M, g) \to (M', g')$ è un'immersione isometrica, allora f è applicazione armonica se, e solo se, f è un'immersione minimale. La Proposizione 12.40 e il Teorema 12.41 ci dicono in particolare che, *c'è differenza tra stabilità di f pensata come applicazione armonica* (*cioè rispetto al funzionale energia*) *oppure come immersione minimale* (*cioè rispetto al funzionale volume*). Infatti, se $(M', g') = (\mathbb{R}^m, g_0)$, f come applicazione armonica è sempre stabile (cfr. Proposizione 12.40), tuttavia se (M, g) è il catenoide di $(\mathbb{R}^3, g_0)$ è noto che tale superficie è una superficie minimale completa non stabile (cfr. [31]). Al contrario, se (M', g') è il cilindro $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$, è noto che l'imbedding standard $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ è un imbedding minimale stabile, mentre come applicazione armonica è instabile (cfr. Teorema 12.41).

Corollario 12.43. *Siano date la sfera canonica $\mathbb{S}^n$ di curvatura sezionale costante $+1$, $n \geq 3$, e una varietà riemanniana (M', g') di curvatura sezionale non positiva. Allora, ogni applicazione armonica $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow (M', g')$ è costante.*

Dimostrazione. Se f fosse non costante, dal Teorema 12.41 si avrebbe f instabile. D'altronde, siccome M' ha curvatura sezionale non positiva, per la Proposizione 12.40 si avrebbe che f è stabile. □

In particolare, se esiste $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow (M', g')$ applicazione armonica non costante, $n \geq 3$, (M', g') ha necessariamente qualche curvatura sezionale positiva. Con un metodo simile a quello usato per dimostrare il Teorema di Xin, si dimostra il seguente risultato di Leung [63].

Teorema 12.44. *0gni applicazione armonica* (*non costante*) *$f : (M, g) \to \mathbb{S}^n$, con M compatta e $n > 2$, è instabile.*

12.9.3 Stabilità dell'identità e il Teorema di Smith

L'applicazione identità $I : (M, g) \longrightarrow (M, g)$, M compatta, è un altro esempio banale di applicazione armonica, tuttavia la corrispondente teoria della variazione seconda è più complicata rispetto al caso di un'applicazione costante. In questo caso: $\mathfrak{X}(f) = \mathfrak{X}(I) = \mathfrak{X}(M)$, $\bar{\Delta}_I$ è l'usuale rough laplaciano $\bar{\Delta}$ di (M, g) e Ric_I è l'operatore di Ricci Q di (M, g) :

$$Ric_I X = -\operatorname{tr} R(X, \cdot)\cdot = \operatorname{tr} R(\cdot, X)\cdot = QX.$$

Pertanto, l'operatore di Jacobi è dato da:

$$J_I : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \ X \longmapsto J_I X = (\bar{\Delta} - Q)X.$$

Usando la formula di Weitzenböck :

$$\Delta_1 = \bar{\Delta} + Q,$$

si ottiene che J_I è legato a Δ_1 (laplaciano operante sui campi di vettori) da

$$J_I = \bar{\Delta} - Q = \Delta_1 - 2Q = 2\bar{\Delta} - \Delta_1. \tag{12.36}$$

Proposizione 12.45. *Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta. Allora,*

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hess}\, E)_I(X,X) &= \int_M \big(\|\nabla X\|^2 - Ric(X,X)\big)\, v_g \\ &= \int_M \big(g(\Delta_1 X, X) - 2Ric(X,X)\big) v_g \\ &= \int_M \left(\frac{1}{2}\|\mathcal{L}_X g\|^2 - (\mathrm{div} X)^2\right) v_g\end{aligned}$$

per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$, dove $\mathcal{L}_X$ è la derivata di Lie. In particolare, se la curvatura di Ricci di (M, g) è semi-definita negativa, l'identità I è stabile.

Dimostrazione. La prima uguaglianza segue dalla (12.26) e dalla (12.31). Inoltre, usando la (12.36), si ottiene

$$\begin{aligned}(Hess\, E)_I(X,X) &= \int_M g\,(J_I X, X)\, v_g \\ &= 2\int_M g\left(\bar{\Delta} X, X\right) v_g - \int_M g\,(\Delta_1 X, X)\, v_g \\ &= 2\int_M \|\nabla X\|^2 v_g - \int_M g\,(\Delta_1 X, X)\, v_g.\end{aligned} \tag{12.37}$$

Posto $\omega = g(X, \cdot)$, si ha

$$\begin{aligned}\|\nabla X\|^2 &= \sum_{i=1}^n g\big(\nabla_{e_i} X, \nabla_{e_i} X\big) = ... = \sum_{i,j=1}^n \big(\nabla_{e_i}\omega\big)(e_j) \\ &= \|\nabla\omega\|^2,\end{aligned} \tag{12.38}$$

dove (cfr. [114], p. 238)

$$\|\nabla\omega\|^2 = \frac{1}{2}\|\mathrm{d}\ \omega\|^2 + \frac{1}{4}\|\mathcal{L}_X g\|^2.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}\int_M g\,(\Delta_1 X, X)\, v_g &= \int_M g\,(\Delta_1\omega, \omega)\, v_g \\ &= \int_M \big(\|\mathrm{d}\ \omega\|^2 + \|\delta\omega\|^2\big) v_g \\ &= \int_M \big(\|\mathrm{d}\ \omega\|^2 + (\mathrm{div} X)^2\big) v_g.\end{aligned} \tag{12.39}$$

Sostituendo la (12.39) e la (12.38) nella (12.37), si ottiene la formula enunciata. □

Dalla Proposizione 12.45 segue la formula di Bochner-Yano:

$$\int_M \big(\|\nabla X\|^2 - Ric(X,X)\big)\, v_g = \int_M \left(\frac{1}{2}\|\mathcal{L}_X g\|^2 - (\mathrm{div}X)^2\right) v_g.$$

Il seguente risultato sulla stabilità dell'identità è dovuto a R.T. Smith [102].

Teorema 12.46. *Sia (M,g) una varietà riemanniana compatta di Einstein: $Ric = cg$, dove $c = cost$. Sia λ_1 il primo autovalore positivo dell'operatore di Laplace-Beltrami. Allora:*

(i) l'identità I è stabile $\Leftrightarrow \lambda_1 \geq 2c$, quindi I è instabile $\Leftrightarrow \lambda_1 < 2c$;

(ii) $\mathrm{nullity}(I) = \dim Iso(M,g) + \dim\{f \in \mathcal{F}(M) : \Delta f = 2c\, f\}$.

Dimostrazione. Dalla decomposizione di Hodge-de Rham:

$$\Lambda^1(M) = \big\{\alpha \in \Lambda^1(M) : \delta\alpha = 0\big\} \oplus \{\mathrm{d}f : f \in \mathcal{F}(M)\},$$

che è ortogonale rispetto al prodotto scalare integrale, segue la decomposizione ortogonale

$$\mathfrak{X}(M) = \{X \in \mathfrak{X}(M) : \mathrm{div}X = 0\} \oplus \{\mathrm{grad}f : f \in \mathcal{F}(M)\}.$$

Questa decomposizione di $\mathfrak{X}(M)$ è invariante per l'operatore Δ_1. Se $\mathrm{div}X = 0$, posto $\omega = g(X,\cdot)$, si ha $\delta\omega = -\mathrm{div}X = 0$. Inoltre, siccome $g(\Delta_1 X,\cdot) := \Delta_1\omega$, si ha

$$\mathrm{div}(\Delta_1 X) = -\delta\Delta_1\omega = -\delta(\mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d})\omega = -\delta\mathrm{d}\delta\omega = 0.$$

Se $X = \mathrm{grad}f$, si ha

$$g\big(\Delta_1(\mathrm{grad}f),\cdot\big) = \Delta_1(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}\delta\mathrm{d}f = \mathrm{d}(\Delta f),$$

e quindi

$$\Delta_1(\mathrm{grad}f) = \mathrm{grad}(\Delta f).$$

Poiché per ipotesi la varietà è di Einstein, quindi $Q = cI$, allora l'equazione (12.36) diventa

$$J_I = \Delta_1 - 2Q = \Delta_1 - 2c\, I,$$

e quindi la decomposizione di $\mathfrak{X}(M)$ è invariante anche per l'operatore di Jacobi J_I.

(i) Per $X \in \mathfrak{X}(M)$ con $\mathrm{div}X = 0$, applicando la formula della Proposizione 12.45, si ha

$$\int_M g\,(J_I X, X)\, v_g = \frac{1}{2}\int_M \|\mathcal{L}_X g\|^2 v_g \geq 0,$$

e quindi gli autovalori dell'operatore di Jacobi di J_I sono non negativi sul sottospazio $\{X \in \mathfrak{X}(M) : \mathrm{div}X = 0\}$.

Sul sottospazio $\{\mathrm{grad}f : f \in \mathcal{F}(M)\}$, abbiamo

$$J_I(\mathrm{grad}f) = \Delta_1(\mathrm{grad}f) - 2c\ \mathrm{grad}f = \mathrm{grad}(\Delta f) - 2c\ \mathrm{grad}f.$$

Esprimendo $f \in \mathcal{F}(M)$ in termini di autofunzioni di Δ, si ha

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i, \quad \Delta f_0 = 0, \quad \Delta f_i = \lambda_i f_i, \ i \geq 1.$$

Da

$$J_I(\mathrm{grad} f_i) = (\lambda_i - 2c)\mathrm{grad} f_i, \ i \geq 1,$$

segue che gli autovalori di J_I sul sottospazio $\{\mathrm{grad} f : f \in \mathcal{F}(M)\}$ sono

$$\{\lambda_i - 2c, \ i \geq 1\}.$$

Mettendo assieme i due casi, otteniamo che

$$I \text{ è stabile } \iff \lambda_1 \geq 2c.$$

(ii) Segue dalla decomposizione ortogonale di $\mathfrak{X}(M)$, osservando i seguenti fatti:

- per $X \in \mathfrak{X}(M)$ con div X=0, si ha: $J_I X = 0 \Leftrightarrow X$ è di Killing;
- per f_i autofunzione di Δ, $\Delta f_i = \lambda_i f_i$, si ha: $J_I(\mathrm{grad} f_i) = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 2c$;
- quando M è completa (in particolare compatta), l'algebra di Lie del gruppo delle isometrie di (M, g) è isomorfo all'algebra di Lie delle isometrie infinitesimali, cioè, dei campi di Killing di M (cfr. Osservazione 9.8). □

La sfera canonica $\mathbb{S}^n$ ha curvatura sezionale costante $k_0 > 0$, tensore di Ricci $Ric_0 = (n-1)k_0 \, g_0 = c \, g_0$ e $\lambda_1 = k_0 n = \dfrac{n}{n-1}c$. Poiché $\dfrac{n}{n-1} \leq 2$ e $\dfrac{n}{n-1} = 2 \Leftrightarrow n = 2$, abbiamo il seguente

Corollario 12.47. *Per la sfera canonica* $\mathbb{S}^n$:

$$I_{\mathbb{S}^2} \textit{ è stabile e } I_{\mathbb{S}^n}, \ n \geq 3, \textit{ è instabile.}$$

Osservazione 12.48. Per $n \geq 3$, i campi di vettori $W_a \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$ introdotti nella dimostrazione del Teorema 12.41 (di Xin) formano un sottospazio $(n+1)$-dimensionale su cui l'hessiano è definito negativo. Una base per tale sottospazio è data dai campi di vettori W_i definiti dai vettori $\{e_i\}$ della base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$. Quindi index$(I_{\mathbb{S}^n}) \geq n+1$. In effetti index$(I_{\mathbb{S}^n})$ è esattamente $n+1$ (cfr. [102]).

Piú in generale, in dimensione 2, possiamo dare il seguente risultato di stabilità dell'identità.

Proposizione 12.49. *Sia* (M, g) *una varietà riemanniana compatta di dimensione* 2. *Allora,*
(i) l'identità $I : (M, g) \to (M, g)$ *è stabile;*
(j) per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$: $(\mathrm{Hess} E)_I(X, X) = 0$ *se, e solo se,* X *è un campo di vettori conformemente di Killing* (*cioè,* $\mathcal{L}_X g = (2/n)(\mathrm{div} X) g$).

Dimostrazione. Dalla Proposizione 12.45, per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$:

$$(\mathrm{Hess}\, E)_I(X,X) = \int_M \left(\frac{1}{2}\|\mathcal{L}_X g\|^2 - (\mathrm{div}X)^2\right) v_g. \tag{12.40}$$

Posto $h := \mathcal{L}_X g$ e $S := h - (\mathrm{tr}\, h/n)g$, $n = \dim M$, abbiamo

$$\begin{aligned}\|S\|^2 &= < S,S > = < h,h > -2\frac{\mathrm{tr}h}{n} < h,g > + \frac{(\mathrm{tr}h)^2}{n^2} < g,g > \\ &= \|h\|^2 - \frac{(\mathrm{tr}h)^2}{n}.\end{aligned}$$

Quindi

$$\|h\|^2 \geq \frac{(\mathrm{tr}h)^2}{n}, \quad \|h\|^2 = \frac{(\mathrm{tr}h)^2}{n} \iff h = \frac{\mathrm{tr}h}{n} g.$$

D'altronde,

$$\mathrm{divX} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\mathcal{L}_{\mathrm{X}}\mathrm{g} = \frac{1}{2}\mathrm{tr\, h}.$$

Pertanto dalla (12.40), si ottiene

$$(\mathrm{Hess}\, E)_I(X,X) \geq \big(\frac{2}{n} - 1\big) \int_M (\mathrm{div}X)^2) v_g \quad \forall\, X \in \mathfrak{X}(M). \tag{12.41}$$

Per $n = 2$, risulta

$$(\mathrm{Hess}\, E)_I(X,X) \geq 0 \quad \forall\, X \in \mathfrak{X}(M),$$

e quindi I è stabile; inoltre,

$$(\mathrm{Hess}\, E)_I(X,X) = 0 \iff \mathcal{L}_X g = (\mathrm{div}X) g.$$

Quest'ultima condizione ci dice che X è conformemente di Killing. □

Sempre nel caso 2-dimensionale, si può provare che I è un minimo assoluto per l'energia (cfr. [5] p. 99).

Osservazione 12.50. Dalla Proposizione 12.45, abbiamo

$$(\mathrm{Hess}\, E)_I(X,X) = \int_M \big(\|\nabla X\|^2 - Ric(X,X)\big) v_g$$

Per cui, assumendo I stabile e usando la (12.41), si ottiene

$$\int_M \big(\|\nabla X\|^2 - Ric(X,X) + \frac{n-2}{n}(\mathrm{div}X)^2\big) v_g \geq 0, \tag{12.42}$$

dove l'uguaglianza vale se, e solo se, X è conformemente di Killing. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ è conformemente di Killing e $Ric(X,X) \leq 0$, dalla (12.42) segue che $\nabla X = 0$ e quindi M è localmente riducibile. In particolare: *su una varietà riemanniana compatta con tensore di Ricci definito negativo non esistono campi di vettori conformemente di Killing.*

Proposizione 12.51. *Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta. Se λ_1^1 è il primo autovalore non nullo di Δ_1 e λ_1 è il primo autovalore non nullo di Δ, allora $\lambda_1^1 \leq \lambda_1$.*

Dimostrazione. Sia $f \in \mathcal{F}(M)$ tale che $\Delta f = \lambda_1 f$. Poniamo $\alpha = \mathrm{d}f \neq 0$, allora

$$\Delta_1 \alpha = (\mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d})\mathrm{d}f = \mathrm{d}\delta\mathrm{d}f = \mathrm{d}\Delta f = \lambda_1 \alpha$$

implica $\lambda_1^1 \leq \lambda_1$. □

Proposizione 12.52. *Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta. Poniamo*

$$c := \inf \{Ric(u, u) : u \in T_p M, \|u\| = 1, p \in M\}.$$

Se I è stabile, allora

$$2\,c \leq \lambda_1^1 \leq \lambda_1.$$

Quindi, $\lambda_1^1 < 2\,c$ implica che I è instabile.

Dimostrazione. Poiché I è stabile:

$$\int_M g(J_I X, X) v_g \geq 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Dalla definizione di c, si ha $Ric(X, X) \geq c\,g(X, X)$. Quindi, applicando la Proposizione 12.45, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_M g(J_I X, X) v_g &= \int_M g(\Delta_1 X, X) v_g - 2 \int_M Ric(X, X) v_g \\ &\leq \int_M g(\Delta_1 X, X) v_g - 2\,c \int_M g(X, X) v_g. \end{aligned}$$

Pertanto, prendendo X autovettore di Δ_1 relativo all'autovalore λ_1^1, si ottiene $\lambda_1^1 - 2\,c \geq 0$. □

Osservazione 12.53. Un ben noto Teorema di Lichnerowicz-Obata stabilisce che se il tensore di Ricci di una varietà riemanniana compatta (M, g) soddisfa $Ric \geq c\,g$, con $c =$cost.> 0, allora il primo autovalore non nullo del laplaciano (operante sulle funzioni) soddisfa:

$$\lambda_1 \geq (n/(n-1))c, \quad n = \dim M,$$

dove l'uguaglianza vale se, e solo se, (M, g) è isometrica alla sfera canonica $\mathbb{S}^n$ di curvatura sezionale costante $\kappa_0 = c/(n-1)$.

La stima $\lambda_1 \geq 2c$, che segue dalla Proposizione 12.52, è più fine della stima di Lichnerowicz-Obata, ciò è dovuto alla condizione di stabilità per I che per $\mathbb{S}^n$ è soddisfatta solo per $n = 2$. In particolare, se (M, g) è di Einstein ($Ric = c\,g$, $c > 0$) con $\dim M \geq 3$ e I instabile, allora

$$(n/(n-1))c \leq \lambda_1 < 2c.$$

Osservazione 12.54. Un risultato del tipo Lichnerowicz-Obata (come ricordato nella precedente Osservazione 12.53) che riguarda il primo autovalore non nullo del laplaciano Δ_r (detto anche operatore di Hodge-de Rham) operante sulle r-forme è dato in [85]. Più precisamente in [85], come conseguenza di un risultato più generale, è provato quanto segue. Se (M,g) è una varietà riemanniana compatta orientabile conformemente piatta e con tensore di Ricci che soddisfa $Ric \geq cg$ per qualche costante $c > 0$, allora

$$^r\lambda_1 \geq \frac{r(n-r+1)c}{n-1}, \; 1 \leq r \leq n/2, \; n = \dim M,$$

dove $^r\lambda_1$ è il primo autovalore non nullo del laplaciano Δ_r. Inoltre, se l'uguaglianza vale per qualche r, $1 \leq r \leq n/2$, allora (M,g) ha curvatura sezionale costante $\kappa = c/(n-1)$. Analogo risultato vale per $^r\lambda_1$, $n/2 \leq r \leq n-1$.

12.9.4 Stabilità di applicazioni olomorfe

Enunciamo il seguente risultato di Urakawa (cfr. [114], p. 172) che riguarda la stabilità di applicazioni olomorfe tra varietà di Kähler.

Teorema 12.55. *Siano (M,J,g) e (M',J',g') due varietà di Kähler compatte, ed $f : M \longrightarrow M'$ un'applicazione olomorfa. Allora*

$$\int_M \bar{g}(J_f V, V)\; v_g = \int_M \bar{g}(DV, DV)\; v_g \geq 0 \quad \forall V \in \mathfrak{X}(f),$$

dove DV è il tensore di tipo $(1,1)$ su M a valori in $f^{-1}TN$ definito da:

$$DV : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(f), X \longmapsto (DV)(X) := \bar{\nabla}_{JX}V - J'\bar{\nabla}_X V.$$

In particolare :

(1) *f è stabile (ossia, gli autovalori di J_f sono non negativi);*

(2) $\mathrm{Ker} J_f = \{V \in \mathfrak{X}(f) : DV = 0\}$.

Un campo vettoriale $V \in \mathfrak{X}(f)$ che soddisfa $DV = 0$ è detto *campo di vettori analitico lungo f.* Nel seguito spieghiamo il significato di questa nozione. Sulla varietà complessa M consideriamo il complessificato T_p^cM di T_pM. La struttura complessa J di M si estende in modo naturale al complessificato T_p^cM :

$$J(u + \sqrt{-1}v) := Ju + \sqrt{-1}Jv, \quad u, v \in T_pM.$$

Gli autovalori di J sono $\pm\sqrt{-1}$, perciò T_p^cM si decompone in somma diretta:

$$T_p^cM = T_p^{1,0}M \oplus T_p^{0,1}M, \qquad \text{dove}$$

$$\begin{aligned} T_p^{1,0}M &= \left\{Z \in T_p^cM : JZ = +\sqrt{-1}Z\right\} \\ &= \left\{Z \in T_p^cM : Z = u - \sqrt{-1}Ju,\; u \in T_pM\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_p^{0,1}M &= \{Z \in T_p^c M : JZ = -\sqrt{-1}Z\} \\ &= \{Z \in T_p^c M : Z = u + \sqrt{-1}Ju,\ u \in T_pM\}. \end{aligned}$$

I vettori di T_p^cM appartenenti a $T_p^{1,0}M$ si dicono di tipo olomorfo, mentre quelli appartenenti a $T_p^{0,1}M$ si dicono di tipo antiolomorfo. Poniamo

$$T^{1,0}M = \bigcup_{p\in M} T_p^{1,0}M.$$

$T^{1,0}M$ è un fibrato vettoriale complesso che è anche olomorfo, esso è detto *fibrato tangente olomorfo*. Il fibrato tangente TM è spesso identificato con il fibrato tangente olomorfo $T^{1,0}M$ mediante l'isomorfismo

$$T_pM \ni u \longmapsto \tilde{u} = \frac{1}{2}(u - \sqrt{-1}Ju) \in T_p^{1,0}M. \tag{12.43}$$

Le sezioni olomorfe di $T^{1,0}M$ sono dette *campi vettoriali olomorfi* su M. Se $(z_1, ..., z_n)$ è un sistema di coordiante locali complesse su M, poniamo

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_j}\Big), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_j}\Big).$$

Allora $\{\big(\frac{\partial}{\partial z_j}\big)_p\}_{j=1,...n}$ è base per $T_p^{1,0}M$, e $\{\big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\big)_p\}_{j=1,...n}$ è base per $T_p^{0,1}M$. Siccome $J\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}$ e $J\frac{\partial}{\partial y_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}$, la corrispondenza (12.43) diventa

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \longmapsto \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad \frac{\partial}{\partial y_j} \longmapsto \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Un campo di vettori $Z = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\partial/\partial z_j)$, è olomorfo se, e solo se, le funzioni componenti φ_j sono funzioni olomorfe nelle variabili $(z_1, ..., z_n)$. Se $f : (M, J) \longrightarrow (M', J')$ è un'applicazione olomorfa tra due varietà complesse ed E è un fibrato vettoriale olomorfo su M', allora $f^{-1}E$ è un fibrato vettoriale olomorfo su M. In particolare, $f^{-1}T^{1,0}M'$ è un fibrato vettoriale olomorfo su M. Le sezioni olomorfe di $f^{-1}T^{1,0}M'$ sono dette *campi vettoriali olomorfi lungo* f. Se f è un'applicazione olomorfa tra due varietà kähleriane (M, J, g) e (M', J', g'), allora esiste un isomorfismo tra lo spazio $\{V \in \mathfrak{X}(f) : DV = 0\}$ dei campi vettoriali analitici lungo f e lo spazio dei campi vettoriali olomorfi lungo f, l'isomorfismo è definito dalla corrispondenza:

$$V \longmapsto \bar{V} := \frac{1}{2}\big(V - \sqrt{-1}J'V\big).$$

Conseguenza del Teorema 12.55, è il seguente

Corollario 12.56. *L'identità I su una varietà kähleriana compatta (M, J, g) è stabile, inoltre* $\ker J_I$ *è lo spazio dei campi vettoriali olomorfi su M.*

Si noti che l'analogo di questo corollario in dimensione dispari, ossia per le varietà sasakiane, in generale, non vale. Infatti, l'identità I sulla sfera unitaria $\mathbb{S}^{2n+1}$ è instabile e la stessa sfera unitaria $\mathbb{S}^{2n+1}$ è il classico esempio di varietà sasakiana.

Come applicazione del Corollario 12.56 dimostriamo il seguente Teorema di Urakawa [112] che è la versione kähleriana del Teorema di Lichnerowicz-Obata.

Teorema 12.57. *Sia (M, J, g) una varietà kähleriana compatta con tensore di Ricci definito positivo: $Ric(u, u) \geq c = \mathrm{cost} > 0$ per ogni $u \in T_pM$, $\|u\| = 1$, e per ogni $p \in M$. Allora, il primo autovalore non nullo λ_1 dell'operatore di Laplace-Beltrami soddisfa:*

$$\lambda_1 \geq 2\ c.$$

Se $\lambda_1 = 2\ c$, allora M ammette un campo vettoriale olomorfo non nullo.

Dimostrazione. Dal Corolario 12.56, segue che I è stabile, di conseguenza applicando la Proposizione 12.52 si ottiene $\lambda_1 \geq 2c$.
Viceversa, assumiamo che $\lambda_1 = 2c$. Sia quindi $f \in \mathcal{F}(M)$ tale che $\Delta f = 2cf$. Poniamo $V := \mathrm{grad} f \neq 0$. Allora

$$\Delta_1 \mathrm{d}f = (\mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d})\mathrm{d}f = \mathrm{d}\delta\mathrm{d}f = \mathrm{d}\Delta f = 2c\,\mathrm{d}f,$$

e quindi

$$\Delta_1 V = 2c\,V.$$

Di conseguenza, siccome $\Delta_1 = J_I + 2Q$, otteniamo

$$\begin{aligned} 2c \int_M g(V, V)\ v_g &= \int_M g(\Delta_1 V, V)\ v_g \\ &= \int_M g(J_I V, V)\ v_g + 2\int_M g(QV, V)\ v_g. \end{aligned} \tag{12.44}$$

Siccome I è stabile, J_I è un operatore semi definito positivo e quindi

$$\int_M g(J_I V, V)\ v_g \geq 0.$$

Inoltre, per ipotesi abbiamo

$$2\int_M g(QV, V)\ v_g \geq 2c \int_M g(V, V)\ v_g.$$

Pertanto la (12.44) implica

$$\int_M g(J_I V, V)\ v_g = 0.$$

Da quest'ultima equazione segue che $J_I V = 0$. Infatti, esprimendo V come somma infinita di autovettori di J_I :

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} V_i \ , \quad J_I V_i = \tilde{\lambda}_i V_i, \quad \int_M g(J_I V_i, V_j) \ v_g = 0, \ i \neq j.$$

Inoltre, se $r =$dim kerJ_I, allora

$$J_I V = \sum_{i=r+1}^{\infty} \tilde{\lambda}_i V_i, \quad \tilde{\lambda}_i > 0 \ \ \forall i \geq r+1.$$

Di conseguenza, otteniamo

$$0 = \int_M g(J_I V, V) \ v_g = \sum_{i=r+1}^{\infty} \tilde{\lambda}_i \int_M g(V_i, V_i) v_g$$

da cui segue che $V_i = 0$ per ogni $i \geq r+1$ e quindi $J_I V = 0$. Pertanto, esiste $V \neq 0$, $V \in \ker J_I$, e dal Corollario 12.56 segue che V è un campo vettoriale olomorfo. $\square$

La stima di λ_1 data dal Teorema 12.57 è più fine di quella data dal Teorema di Lichnerowicz-Obata (cfr. Osservazione 12.53), ciò è dovuto alla condizione di K*ä*hler che abbiamo nel Teorema 12.57. Se (M, g) è uno spazio simmetrico hermitiano irriducibile, allora esso è di Einstein, $Ric = cg$ e $\lambda_1 = 2c$ (cfr. [114], p. 183).