# Appendice

## A.1 Proprietà differenziali metriche di una superficie.

Sia $M \subset \mathbb{R}^3$ una porzione di superficie regolare, che assumeremo rappresentata in un riferimento cartesiano dall'equazione vettoriale

$$P = P(u,v) = O + x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}.$$

Segue che

$$\overrightarrow{dP} = \overrightarrow{P_u}du + \overrightarrow{P_v}dv$$

dove $\overrightarrow{P_u} = (x_u, y_u, z_u)$ e $\overrightarrow{P_v} = (x_v, y_v, z_v)$.

Indicando con $ds = |\overrightarrow{dP}|$ l'elemento lineare si ottiene

$$ds^2 = |\overrightarrow{dP}|^2 = \overrightarrow{P_u} \cdot \overrightarrow{P_u}du^2 + 2\overrightarrow{P_u} \cdot \overrightarrow{P_v}dudv + \overrightarrow{P_v} \cdot \overrightarrow{P_v}dv^2$$

dove $\cdot$ indica il prodotto scalare usuale di $\mathbb{R}^3$. Ponendo

$$\begin{aligned} E &= \overrightarrow{P_u} \cdot \overrightarrow{P_u} = {x_u}^2 + {y_u}^2 + {z_u}^2; \\ F &= \overrightarrow{P_u} \cdot \overrightarrow{P_v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v; \\ G &= \overrightarrow{P_v} \cdot \overrightarrow{P_v} = {x_v}^2 + {y_v}^2 + {z_v}^2 \end{aligned}$$

si ha

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

detta *prima forma quadratica fondamentale* (I FQF).

Se $\gamma : [t_1, t_2] \longrightarrow M$ è una curva differenziabile a tratti, allora la lunghezza di $\gamma$ è

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}dt.$$

Siano $P$ e $Q$ due punti di $M$. Indicato con $\Omega(P,Q)$ l'insieme di tutte le curve congiungenti $P$ con $Q$, poniamo

$$d(P,Q) = \inf\{\mathcal{L}(\gamma) : \gamma \in \Omega(P,Q)\};$$

$d$ risulta essere una distanza su $M$ detta *distanza intrinseca*. Se $\eta \in \Omega(P, Q)$ è tale che $d(P, Q) = \mathcal{L}(\eta)$, allora $\eta$ è detta *geodetica minimale*; una *geodetica* è una curva localmente minimale. Si può provare che le geodetiche sono le linee della superficie per le quali in ogni punto il piano osculatore è ortogonale al piano tangente alla superficie (ovvero per le quali la normale principale coincide con la normale alla superficie).

Da qui segue facilmente che se $M$ è una superficie (regolare) simmetrica rispetto ad un piano $\alpha$, allora la curva $\gamma = M \cap \alpha$ è una geodetica. Quindi tutti i meridiani di una superficie di rotazione sono geodetiche; invece un parallelo è una geodetica se la tangente, alla curva che genera la superficie nel punto considerato, è parallela all'asse di rotazione.

Siano ora $\gamma$ e $\overline{\gamma}$ due curve di $M$ passanti per uno stesso punto $P$. Siano $\overrightarrow{dP}(du, dv)$ e $\overrightarrow{\widetilde{d}P}(\widetilde{d}u, \widetilde{d}v)$ i vettori tangenti in $P$ alle curve. Allora per l'angolo $\phi$ tra le due curve si ha

$$\cos\phi = \frac{\overrightarrow{dP} \cdot \overrightarrow{\widetilde{d}P}}{|\overrightarrow{dP}||\overrightarrow{\widetilde{d}P}|}$$

Se consideriamo le linee $u$=cost e $v$=cost si ha per i vettori tangenti

$$\overrightarrow{dP} = \overrightarrow{P_u}du, \quad \overrightarrow{\widetilde{d}P} = \overrightarrow{P_v}dv$$

e quindi

$$\cos\phi = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Parimenti per l'elemento di area si ha

$$d\sigma = |\overrightarrow{dP} \wedge \overrightarrow{\widetilde{d}P}| = |\overrightarrow{P_u} \wedge \overrightarrow{P_v}|dudv.$$

Ma

$$|\overrightarrow{P_u} \wedge \overrightarrow{P_v}|^2 = |\overrightarrow{P_u}|^2|\overrightarrow{P_v}|^2 \sin\phi^2 = EG\left(1 - \frac{F^2}{EG}\right) = EG - F^2$$

dunque

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}dudv.$$

**Nota.** I parametri $u$ e $v$ sono detti *isotermi* per $M$ se per ogni $(u, v)$ si ha

$$|\overrightarrow{P_u}| = |\overrightarrow{P_v}| = \lambda(u, v) > 0 \quad \text{e} \quad \overrightarrow{P_u} \cdot \overrightarrow{P_v} = 0.$$

Si può dimostrare che su *ogni* superficie si possono trovare parametri isotermi, quindi l'elemento di lunghezza si può scrivere sempre nella forma

$$ds^2 = \lambda^2(u, v)(du^2 + dv^2).$$

Inoltre ogni cambiamento di coordinate tra parametri isotermi $f : (u, v) \longmapsto (\widetilde{u}, \widetilde{v})$ è una funzione olomorfa. Quindi ogni superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ diventa una superficie di Riemann nel senso dell'Analisi complessa.

## A.2 Curvatura gaussiana

Per capire la genesi intuitiva del concetto partiamo dalle curve.

Una circonferenza di raggio $r$ ha curvatura costante $k = 1/r$; una curva qualsiasi $\gamma$ ha curvatura $k(P)$, in un punto $P$, se $k(P)$ è la curvatura della circonferenza che meglio approssima la curva nell'intorno di $P$.

Una retta (che può considerarsi una circonferenza di raggio infinito) ha curvatura nulla. La curvatura dà una stima di quanto la curva si allontani dall'essere una retta in quel punto.

Se $M$ è una superficie di $\mathbb{R}^3$ ed $n$ è la retta perpendicolare in $P$ al piano tangente $T_P(M)$, allora nel fascio di piani di asse $n$ esistono due piani $\alpha_1$ e $\alpha_2$ tali che le loro sezioni $\gamma_1$ e $\gamma_2$ hanno in $P$ rispettivamente curvatura (orientata) massima $k_1(P)$ e minima $k_2(P)$. Si chiama curvatura (estrinseca) in $P$

$$K(P) = k_1(P) \cdot k_2(P).$$

Se $K(P) > 0$ il punto si dice *ellittico*, se $K(P) < 0$ si dice *iperbolico*, se $K(P) = 0$ si dice *parabolico*.

Ora il celebre "Theorema egregium" di C.F.Gauss[3] (1825) afferma che se una superficie (considerata come un velo flessibile ed inestensibile) viene realizzata in modo diverso nello spazio, la sua curvatura non cambia.

Ciò è reso chiaro dal fatto che vale

$$K(P) = \lim_{T \to P} \frac{\varepsilon(T)}{\mathcal{A}(T)}$$

dove il secondo membro (la curvatura intrinseca) è espressa con quantità dipendenti soltanto dalla metrica interna della superficie (individuata dai coefficienti della I FQF).

## A.3 Corrispondenze tra superficie di $\mathbb{R}^3$.

Siano $M$ e $\overline{M}$ due superficie di $\mathbb{R}^3$. Un'applicazione $f : M \longrightarrow \overline{M}$ è un'*isometria locale* se per ogni $P \in M$ esiste un intorno coordinato $U$ tale che $f : U \longrightarrow f(U)$ sia un diffeomorfismo che conservi la I FQF, cioè se $(u, v)$ sono le coordinate in $U$ e $(\overline{u}, \overline{v})$ sono quelle indotte su $f(U)$ da $f$ allora

$$ds^2 = d\overline{s}^2.$$

Da qui segue che se $\gamma : I \longrightarrow M$ è una curva di $M$, per la curva $f \circ \gamma$ di $\overline{M}$ si ha

$$\mathcal{L}(f \circ \gamma) = \mathcal{L}(\gamma).$$

[3]Si superficies curva in quamcumque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.

Nel secolo XIX le isometrie locali venivano chiamate *applicabilità*: intuitivamente si tratta di una deformazione che non altera le lunghezze delle linee su di essa tracciate.

Il theorema egregium di Gauss mostra che se $f$ è un'isometria locale e $\overline{P} = f(P)$, allora

$$K(\overline{P}) = K(P)$$

dove $K$ è la curvatura gaussiana della superficie. Questa condizione è solo necessaria. Si può dimostrare che essa è anche sufficiente se le due superfici hanno curvatura costante, cioè vale

**Teorema A.3.1** *Se $M$ e $\overline{M}$ hanno la stessa curvatura gaussiana costante, allora sono applicabili.*

Una superficie applicabile su un piano è detta *sviluppabile* (su di un piano). Dunque le superfici sviluppabili sono quelle per cui $K(P) = 0$ per ogni $P \in M$, cioè le superfici aventi tutti i punti parabolici (e.g. piano, cono, cilindro).

Da ciò segue che una figura sferica non può essere applicabile su di un piano, poiché la curvatura di una sfera di raggio $r$ è $K = 1/r^2$.

Siano $M$ e $\overline{M}$ due superficie di $\mathbb{R}^3$. Un diffeomorfismo $f : M \longrightarrow \overline{M}$ che non alteri le misure angolari si chiama applicazione *conforme*. Si ha che $f$ è conforme se e solo se

$$E : \overline{E} = F : \overline{F} = G : \overline{G}$$

o equivalentemente se e solo se

$$d\overline{s}^2 = \lambda(u, v) ds^2$$

con $\lambda(u, v) > 0$. Quindi un'applicazione conforme si comporta nell'infinitesimo come una similitudine di rapporto $\lambda(u, v)$; ciò è naturale intuitivamente perché due triangoli infinitesimi corrispondenti tramite $f$ risultano simili avendo angoli omologhi uguali. Naturalmente $\lambda(u, v)$ può considerarsi come la scala *infinitesimale* nel punto $(u, v) \in M$. Essa non dipende dalla direzione, ma solo dalla posizione del punto. Alla parola *conforme* i cartografi preferiscono il termine "ortomorfica".

A causa dell'esistenza di parametri isotermi segue che esiste sempre un'applicazione conforme tra una porzione di $M$ e una porzione di piano (con la metrica euclidea).

Un diffeomorfismo $f : M \longrightarrow \overline{M}$ che non alteri le misure areali è un'applicazione *equivalente*. Si ha che $f$ è equivalente se e solo se

$$d\sigma = d\overline{\sigma}$$

cioè

$$EG - F^2 = \overline{EG} - \overline{F}^2.$$

## A.4 Ancora sulla curvatura gaussiana

Se siamo su una superficie $M$ è possibile scoprire il valore di $K$ in un punto $P$, tenendo conto di un teorema dovuto a Diquet.

Sia $P \in M$ e $T_P(M)$ il piano tangente in $P$ a $M$. La circonferenza di $T_P(M)$ di centro $P$ e raggio $\varepsilon$, $C_E(P,\varepsilon)$, ha lunghezza

$$\mathcal{L}(C_E(P,\varepsilon)) = 2\pi\varepsilon.$$

Consideriamo ora la circonferenza di $M$ di centro $P$ e raggio $\varepsilon$, cioè

$$C_M(P,\varepsilon) = \{Q \in M : \; d(P,Q) = \varepsilon\}$$

essendo $d$ la distanza intrinseca di $M$. Ebbene Diquet ha provato che

$$\mathcal{L}(C_M(P,\varepsilon)) = \mathcal{L}(C_E(P,\varepsilon)) \left[1 - \frac{K(P)}{3!}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)\right] = 2\pi\varepsilon - \frac{2\pi}{6}K(P)\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3)$$

da cui

$$K(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{\pi} \left[\frac{2\pi\varepsilon - \mathcal{L}(C_M(P,\varepsilon))}{\varepsilon^3}\right].$$

Questa formula (detta anche di Bertrand-Puiseux) mostra che la metrica di curvatura costante $K(P)$ (definita sul piano tangente) è la migliore approssimazione della geometria locale della varietà.

Quindi una buona approssimazione di $\mathcal{L}(C_M(P,r))$ è $2\pi r - K\pi r^3/3$.

Se $M = \mathbb{S}(r)$, allora il raggio della circonferenza $C_M(P,\varepsilon)$ è $r \sin \frac{\varepsilon}{r}$, quindi

$$\mathcal{L}(C_M(P,\varepsilon)) = 2\pi r \sin \frac{\varepsilon}{r} = 2\pi\varepsilon - \frac{2\pi\varepsilon^3}{6r^2} + o\left((\frac{\varepsilon}{r})^3\right)$$

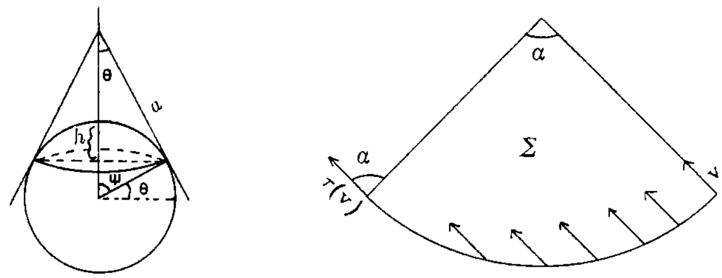
da cui $K(P) = 1/r^2$.

Altro modo di scoprire il valore di $K$ in un punto $P$ di $M$ può essere ottenuto usando il *parallelismo di Levi - Civita*.

Illustriamo il procedimento (in modo intuitivo e non formale) nel caso di una sfera $\mathbb{S}(r)$.

Sia come al solito $D_\psi$ la calotta sferica, di centro $P$, avente come bordo il parallelo $C$ di colatitudine $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta > 0$. Indichiamo inoltre con $\Sigma$ il cono circoscritto a $\mathbb{S}(r)$ lungo $C$ e con $f : \Sigma \longrightarrow E$ l'isometria locale corrispondente tra $\Sigma$ ed un piano euclideo $E$.

Due vettori $\mathbf{v}(Q)$ e $\mathbf{w}(Q')$ applicati in punti di $C$ si diranno *paralleli* rispetto alla geometria di $\mathbb{S}(r)$ se $f(\mathbf{v}(Q))$ e $f(\mathbf{w}(Q'))$ sono paralleli nel senso usuale sul piano $E$. Così, fissato un vettore $\mathbf{v}$, si definisce un *trasporto parallelo* $\tau$ lungo $C$: i vettori $\mathbf{v}$ e $\tau(\mathbf{v})$ saranno paralleli rispetto alla geometria di $\mathbb{S}(r)$, ma non rispetto a quella dell'ambiente. Se per esempio $\mathbf{v}(Q)$ ha la direzione della generatrice di $\Sigma$, dopo aver percorso $C$, il vettore $\tau(\mathbf{v}(Q))$ formerà con $\mathbf{v}(Q)$ un angolo $\alpha$, uguale all'angolo dello sviluppo del cono.




Si chiama *deviazione* di $\mathbf{v}$ l'angolo

$$\delta = 2\pi - \alpha = 2\pi(1 - \sin\theta)$$

(cioè la rotazione di $\mathbf{v}$ come appare ad un osservatore di $\mathbb{S}(r)$ in $Q$).
Infatti, osservando la figura, si vede facilmente che

$$\alpha = 2\pi\frac{\rho}{a} = 2\pi\sin\theta$$

poiché $\alpha : 2\pi = 2\pi\rho : 2\pi a$. Inoltre per l'applicazione di Archimede, $\mathcal{A}(D_\psi) = 2\pi rh$ con $h = r - r\cos\psi = r(1 - \sin\theta)$. Poiché $K(P) = 1/r^2$ segue

$$K(P) = \frac{\delta}{\mathcal{A}(D_\psi)} \quad \text{se} \quad \psi \neq 0.$$

Se $\psi = 0$, allora $\Sigma$ diviene $T_P(\mathbb{S}(r))$ e non c'è alcuna deviazione, ma in quel caso anche $\mathcal{A}(D_\psi) = 0$.
Rimanendo fermi in un punto non è possibile accorgersi della curvatura della terra: la geometria sul piano tangente è quella euclidea!