Le definizioni e le convenzioni, un problema didattico.(*)

Carlo Marchini (**)

Introduzione. Il tema prescelto può sembrare poco stimolante, ma a mio parere è assai profondo ed ha notevoli influenze sulla didattica in quanto la comprensione delle definizioni e delle convenzioni influisce fortemente sull'apprendimento. Scrivendo queste note ho pensato ad una loro fruizione per docenti di Scuola Secondaria Superiore, però le riflessioni sull'argomento possono essere utili anche ad insegnanti di altri tipi di scuola.

Inizio traendo spunto dalla conversazione con una collega [1]; secondo la sua esperienza, che per altro credo condivisa da chi insegna Matematica nei primi anni di Facoltà scientifiche. Alcuni studenti pur esperti risolutori di esercizi, si trovano imbarazzati nel "gestire" i concetti mediante definizioni ed i simboli usando le notazioni, senza giungere a comprendere cosa farne, come giustificarne la presenza e l'uso, talvolta confondendo definizioni con dimostrazioni [2]. E' troppo facile darne colpa all'insegnamento pre-universitario: il problema ha radici profonde e non ne esiste un rimedio semplice.

La mia tesi è che le difficoltà palesate dagli studenti nascano da ostacoli epistemologici. Senza dubbio una maggiore attenzione al tema eviterebbe gli errori più grossolani. Ma c'è da chiedersi se, come e quanto è utile che i docenti "perdano tempo" per fare riflettere gli allievi sull'argomento, vista anche la quantità di nozioni previste dai programmi e soprattutto, la sventurata articolazione *sperimentale* dell'esame di maturità. Certo, un'analisi delle notazioni e delle definizioni, delle modalità

(*) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività di ricerca finanziate con contributi MURST 40% e 60%.

(**) Indirizzo: Carlo Marchini, Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, Strada D'Azeglio 85/A - 43100 - PARMA

[1] La Prof. D. Monteverdi, Docente di Istitutioni di Matematica per Scienze Biologiche a Parma, che qui ringrazio per le fruttuose discussioni sul tema.

[2] Questa confusione purtroppo non è solo degli studenti. Si pensi ai manuali che per *definire* la potenza con esponente zero, a^0, fanno una piccola "dimostrazione" osservando che $1 = a^2 : a^2 = a^{2-2} = a^0$.

di introduzione e dei loro usi può avvenire solo al termine del corso di scuola superiore, in quanto è un tipico esempio di quella richiesta, prevista dai nuovi programmi, di riesame critico su quanto si è appreso. Per svolgere questa attività dai forti connotati filosofici è indispensabile un'intensa sinergia tra docenti di Matematica, Lingua, Storia e di Filosofia. Mi rendo conto che si tratta di un'utopia che si scontra con le difficoltà di linguaggio tra insegnanti di formazione diversa. Temo però che l'ostacolo maggiore sia la disattenzione, su temi di vasto respiro, di una scuola i cui ultimi tre anni sembrano finalizzati al superamento della prova di Maturità divenuta insufficiente per i collegi professionali e le Università, vista la richiesta sempre più diffusa di esami di ammissione.

Ciononostante il mio lavoro ha la presunzione di fornire qualche indicazione didatticamente utile e stimolante. Esso è articolato in quattro sezioni: nella prima introduco gli aspetti logici ed epistemologici delle definizioni, nella seconda approfondisco la differenza tra definizioni e notazioni, nel terzo paragrafo tratto alcuni aspetti più didattici, il quarto è dedicato ad alcune considerazioni conclusive. L'argomento delle definizioni viene qui trattato da un punto di vista generale. Non mi soffermo sui vari tipi di definizione che potrebbero da soli essere argomento di un altro articolo.

1. Aspetti logici ed epistemologici delle definizioni. Lo stile con cui oggi si parla di Matematica è quello di matrice euclidea (e quindi aristotelica) in cui il linguaggio si articola utilizzando termini definiti a partire da termini primitivi. L'origine e le motivazioni possono essere ritrovate nel testo degli Analitici Secondi di Aristotele [3]: una *Scienza deduttiva* è costituita da un insieme S di enunciati tale che:

I) POSTULATO DI REALTÀ. Ogni enunciato di S deve riferirsi ad uno specifico dominio di enti reali.
II) POSTULATO DI VERITÀ. Ogni enunciato deve essere vero.
III) POSTULATO DI DEDUTTIVITÀ. Se certi enunciati appartengono ad S, ogni conseguenza logica di questi enunciati deve appartenere a S.
IV) POSTULATO DI EVIDENZA (per termini). Ci sono in S un numero (finito) di termini tali che

[3] Tratto da E.W. Beth, **The foundations of Mathematics**, North Holland, Amsterdam, 1959.

(a) il significato di questi termini è ovvio e non richiede ulteriori spiegazioni (termini primitivi);

(b) ogni altro termine è *definibile* per mezzo di questi termini.

V) POSTULATO DI EVIDENZA (per assiomi). Ci sono in S un numero (finito) di enunciati tali che

(a) la verità di questi enunciati è ovvia e non richiede ulteriori dimostrazioni (assiomi);

(b) la verità di ogni altro enunciato appartenente ad S deve essere stabilita mediante l'inferenza dagli enunciati dati (teoremi).

Le scritte tra parentesi sono una mia interpolazione. E' facile criticare oggi la presentazione di Aristotele, per la confusione tra linguaggio e metalinguaggio, per la mancata differenza tra aspetti semantici e sintattici, per le ipotesi ontologiche sottintese e per il privilegio dato al linguaggio, visto come strumento di conoscenza con funzione universale. Tuttavia le idee aristoteliche sono notevoli ed hanno permeato la Scienza da allora ai giorni nostri. Non analizzo ulteriormente cosa venga inteso per Scienza deduttiva nel suo complesso, ma mi soffermo sui punti che mi interessano di più.

I termini primitivi (come gli assiomi) sono posti per evitare un regresso all'infinito che toglierebbe valore conoscitivo alla scienza; altrimenti per comprendere ciò di cui si parla si deve interpretare correttamente tutto ciò che serve per giungere alla sua definizione, ma è impossibile in via di principio perché si dovrebbe avere una conoscenza infinita. Il mettere esplicitamente limiti al regresso fa pensare che, in linea di principio, attraverso il linguaggio sarebbe possibile un procedimento infinito in cui ogni ente trova una definizione a partire da concetti più semplici. Aristotele indica nell'evidenza (e nel buonsenso) il limite di tale analisi all'indietro. Ciò vuol dire scegliere tra gli innumerevoli enti quelli che hanno due connotati fondamentali: sono di significato ovvio e mi permettono di riottenere gli altri attraverso le definizioni. Il compito delle definizioni, in tale visione, è quella di servire come strumento per articolare una conoscenza *già posseduta*, per porre ordine ad una realtà che per altre strade è nota. Forse sotto questo aspetto è motivata l'interpretazione di J. Barnes [4] : «la teoria ... non viene mai intesa come uno strumento per guidare o

[4] J. Barnes, *Aristotle's Theory of Demonstration* in **Articles on Aristotle, 1. Science** a cura di J. Barnes, M. Schofield, R. Sorabji, London, Duckworth, 1975, citato da C. Cellucci *La Logica fra Filosofia, Matematica e Informatica.* Notizie di Logica, anno X, n. 2/3 1991, 13 - 23

formalizzare la ricerca scientifica: riguardava solo l'insegnamento di fatti già acclarati.»

La trattazione euclidea della Geometria, forse perché nata con intenti didattici, si conforma largamente ai requisiti aristotelici, è però possibile rilevare un'importante differenza: le definizioni (e i teoremi) vengono introdotti geneticamente, vale a dire in una definizione intervengono soltanto termini definiti precedentemente, non quelli definiti successivamente (risp. vengono utilizzati nelle dimostrazioni teoremi precedentemente dimostrati). Ciò non viene chiarito dalla presentazione della Scienza deduttiva. Le possibili spiegazioni di siffatta "carenza" sono due, in antitesi: il procedimento è dato per scontato oppure non è necessario. Personalmente ritengo più probabile che Aristotele si conformi alla seconda ipotesi: le definizioni sono abbreviazioni di scrittura tutte eliminabili in favore dei termini primitivi, non importa il grado di "complicazione" raggiunto da una definizione, cioè quanto essa sia "lontana" dai termini primitivi, essa può essere sempre eliminata. Una definizione in cui intervengano enti che verranno definiti in seguito, anche se ciò potrebbe essere causa di circoli viziosi, è da ritenersi accettabile, purché sia possibile ricondurla ai termini primitivi. La prima ipotesi prevederebbe una sorta di "disattenzione" al tema metacognitivo che francamente non mi sembra si possa attribuire al nostro filosofo.

Il procedimento genetico è invece necessario se si attribuisce alla definizione un ruolo fondante della conoscenza. Essa è giustificata dalla richiesta di evitare i circoli viziosi che minerebbero la fiducia che solitamente si ripone in una scienza deduttiva.

Da un altro punto di vista, la scelta di termini primitivi e di assiomi conferisce un significato convenzionale alla conoscenza scientifica, o almeno alla sua presentazione in forma comunicabile. Nel convenzionalismo ricade ogni dottrina secondo cui la verità di una proposizione o di un insieme di proposizioni fisiche o matematiche dipende sempre da un precedente accordo (esplicito o tacito) stipulato da coloro che devono far uso di queste proposizioni. L'accordo può riguardare direttamente le proposizioni in questione (e ciò accade nella scelta delle assunzioni iniziali di un sistema deduttivo, siano esse assiomi o termini primitivi) o può riferirsi indirettamente ad esse tramite regole inferenziali opportune sulla cui base viene accettata o rifiutata la verità delle proposizioni. Nel convenzionalismo, pur ispirato o motivato dall'esperienza, l'esperienza stessa viene negata in modo assoluto in quanto la possibilità di decidere circa la verità della scelta di un gruppo di assiomi deve obbedire soltanto al postulato di deduttività.[5] Perciò il sapiente aristotelico non ha bisogno utilizzare il cannocchiale galileano perché sa, a priori, che le macchie solari non esistono, per definizione.

Non voglio dire che anche oggi il modo di guardare alle definizioni sia rimasto fermo alle concezioni dei greci: il modello concettuale odierno integra, ma non prescinde da quello antico.

Vengo ora ad una prima indicazione di carattere didattico: mi sorge spontanea la domanda se quel patto che il convenzionalismo richiede tra coloro che devono utilizzare gli strumenti matematici è mai stato esplicitato tra docente e studente o se è rimasto sempre tacito, da parte del docente, ed incompreso nella sua sostanza da parte del discente. Forse solo gli aspetti deleteri di questa posizione gnoseologica hanno trovato modo di attraversare la comunicazione didattica.

Ad esempio il convenzionalismo inibisce l'empiria, così se un problema è mal posto o mal compreso uno studente liceale può rispondere che qualora 10 kg di mele costino 8.000 lire, un kg di mele costa 0,00125 lire al kg, senza svolgere un controllo sui risultati, ispirandosi all'esperienza quotidiana. Analoga attitudine si incontra anche negli utilizzatori degli strumenti matematici, essi talvolta rifiutano i dati che non si accordano con modelli scelti a priori, abbandonando la difficile strada di adeguare i modelli alla realtà, preferendo piegare quest'ultima nelle strettoie di un trattamento matematico inadeguato.

Ci avviciniamo di più ai nostri giorni presentando un'analisi, in gran parte dovuta alla scuola filosofica polacca, Lésniewski e Tarski, che incentra la definizione nell'ambito logico. L'importanza di tale proposta consiste nel mostrare che le definizioni non si collocano solo in ambito linguistico come forse si può ritenere in un primo momento, ma in esse intervengono pesantemente aspetti sintattici [6]. Il punto di partenza è una teoria T espressa in un linguaggio L; non ha importanza se si tratta della logica del primo ordine o di ordine superiore. Ciò che ha rilevanza è che ci si muove in un contesto rigorosamente formalizzato. Sia **k** un simbolo non appartenente al linguaggio L. Limitandosi al primo ordine, **k** potrebbe essere una costante individuale, oppure un simbolo funzionale (operatore) o un predicato, ma ciò che segue si applica a tutti i casi. La richiesta che **k** non appartenga a L conferma che si procede geneticamente, di cui si diceva prima. Sia L' il linguaggio ottenuto con l'ag-

[5] Tratto da **Enciclopedia Garzanti di Filosofia.**

[6] Cfr. R. Rogers, **Mathematical logic and formalized theories**, North Holland, Amsterdam, 1971.

giunta del nuovo simbolo e sia φ una formula di L' contenente il nuovo simbolo, così $L \subseteq L'$ dunque ogni formula di L è anche formula di L'. Sia T' la teoria che ha per assiomi quelli di T e la formula φ. Perché φ possa essere considerata una definizione di **k** rispetto a T, si devono verificare le due seguenti condizioni:

(a) per ogni formula ψ di $L' - L$ esiste una formula ϑ di L tale che $\vdash_{T'} \forall(\psi \leftrightarrow \vartheta)$, avendo indicato col quantificatore universale una (la) chiusura universale della formula in parentesi;

(b) Per ogni formula α di L se $\vdash_{T'} \alpha$, allora $\vdash_{T} \alpha$.

La teoria T' così ottenuta si dice *estensione per definizione* di T.

Tale presentazione mutua dalle idee di Aristotele il primo requisito. Esso si interpreta come la *eliminabilità* della definizione in quanto ogni formula contenente il nuovo simbolo è dimostrabilmente equivalente ad una che in cui non compare il simbolo aggiunto. La seconda richiesta, sconosciuta nella presentazione aristotelica, sancisce la *non creatività* della definizione assunta come nuovo assioma: non si dimostrano in T' "vecchie" formule che non siano già teoremi di T. Il fatto che si definisca volta per volta un nuovo simbolo a partire da una teoria e dal suo linguaggio è garanzia di quel procedere genetico che impedisce i circoli viziosi. Una sostanziale novità è che l'ovvietà non è più il referente privilegiato per decidere quali siano gli enti da assumere come termini primitivi; la nozione di definizione dipende da una teoria vale a dire un insieme qualunque di formule (o enunciati).

Vedremo tra poco come sia possibile esplicitare le richieste distinguendo tra i vari tipi di simboli che vengono introdotti, voglio solo soffermare un attimo l'attenzione sul fatto che la definizione è data in relazione ad una teoria; pertanto una stessa formula può essere ritenuta una definizione rispetto ad una teoria e non rispetto ad un'altra e di ciò mostrerò un esempio. Una definizione non è solo un fatto linguistico, in essa entra pesantemente anche l'apparato dimostrativo, cioè le regole d'inferenza, e la scelta degli assiomi di una teoria.

Nella Logica del primo ordine si trattano separatamente i casi dei predicati, dei simboli funzionali e delle costanti. Se si vuole definire un predicato A, n-ario, La formula φ da aggiungere alla teoria T per definire un predicato A, n-ario, è data da $\forall x_1, \ldots, x_n\ (A(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \vartheta)$, ove $x_1, \ldots, x_n$ sono indeterminate distinte e la formula ϑ è formula del linguaggio L in cui sono libere, al più, solo le indeterminate $x_1, \ldots, x_n$. Se si deve aggiungere un simbolo funzionale f, m–ario ci sono due possibili modi diversi: il primo è quello di richiedere come formula φ la seguente $\forall x_1,\ldots,x_m,y(f(x_1,\ldots,x_m) = y \leftrightarrow \vartheta)$, ove $x_1,\ldots,x_m$, y sono indeterminate distinte e ϑ è formula del linguaggio L in cui sono libere, al più, solo le indeterminate $x_1, \ldots, x_m, y$ ed inoltre la formula ϑ garantisce l'unicità, nel senso che $\vdash_T \forall x_1, \ldots, x_m \exists y \forall z(z = y \leftrightarrow \vartheta)$, con z indeterminata diversa dalle altre. Il secondo modo, forse quello più utilizzato, richiede la presenza di un termine t di L. In tal caso φ è la formula $\forall x_1, \ldots, x_m(f(x_1, \ldots, x_m) = t)$, purché in t compaiano, al più, le indeterminate $x_1, \ldots, x_m$. Nel primo modo è essenziale la richiesta di unicità, altrimenti la definizione diviene creativa. Lo si mostra con un semplice esempio. Si consideri il linguaggio con un solo predicato binario che si scrive infisso, indicandolo col simbolo "<". La teoria T è data dagli assiomi di un ordine stretto totale e il simbolo (di operazione) "♥" è "definito" con la formula $\forall x,y,z(x \heartsuit y = z \leftrightarrow x<z \wedge y<z)$. Per l'unicità si deve provare in T la formula $\forall x,y \exists w \forall z(z=w \leftrightarrow x<z \wedge y<z)$ che non è un teorema di T in quanto che nel modello di T sui numeri naturali si ha $2<6 \wedge 3<6$ e pure $2<5 \wedge 3<5$, da cui $2 \heartsuit 3 = 6$ e $2 \heartsuit 3 = 5$, quindi $5 = 6$. Di più, si prova che la teoria T' ottenuta aggiungendo a T la formula φ, è contraddittoria, quindi in essa si possono dimostrare tutte le formule, anche quelle di L che non sono teoremi di T, pertanto la definizione è creativa.

Nel caso della definizione di una costante si possono seguire due strade, come per i simboli funzionali. Nel primo modo si usa una formula φ del tipo $\forall y(c=y \leftrightarrow \vartheta)$, ove y è l'unica indeterminata libera eventualmente presente in ϑ, formula del linguaggio L; bisogna però richiedere l'unicità nella forma $\vdash_T \exists y \forall z(z = y \leftrightarrow \vartheta)$, con z indeterminata diversa da y. Il secondo modo, solitamente più utilizzato, richiede che esista un termine t di L, in cui non compaiono indeterminate libere e la formula φ è data da $c = t$.

Per gli assiomi di una teoria ci si può chiedere se alcuni sono dipendenti da altri, problema che, come sappiamo, applicato sul problema del postulato delle parallele ha portato allo sviluppo delle Geometrie non euclidee. L'indipendenza di un assioma φ di una teoria T, si prova mostrando un modello di T ed un modello in cui sono veri tutti gli assiomi di T tranne φ. Una situazione simile vale per la definibilità: dato un simbolo **k** di un linguaggio L ed una teoria T in L, ci si può chiedere se **k** è definibile in T. Ciò avverrà se c'è in T una formula che possa essere utilizzata come una definizione di **k**, rispetto alla teoria T – **k**, cioè quella che si ottiene nel linguaggio privato di **k**, e senza gli assiomi in cui interviene **k**. Analogo è il problema di determinare quando un simbolo del linguaggio *non* è definibile, affrontato e risolto da A. Padoa nel 1900: il simbolo **k** non è definibile in T se esistono due modelli di T che differiscano solo per l'interpretazione di **k**. Dall'analisi del principio di Padoa, E.W. Beth ha tratto poi il suo famoso teorema del 1953. Per introdurlo [7] devo premettere cosa si intende per definibilità *implicita* ed *esplicita.* Tratto, per brevità, solo il caso dei predicati. Siano dati una teoria T espressa in un linguaggio L, un predicato n-ario A di L ed una formula α di L in cui compare il predicato A. Si dice che α definisce *implicitamente* il predicato A, rispetto alla teoria T, se considerato un predicato nuovo A' che non appartenga a L e considerata la teoria T nel linguaggio ampliato L' sia α' la formula ottenuta sostituendo in α tutte le occorrenze di A con A', si ha $\alpha \wedge \alpha' \vdash_T \forall x_1,\ldots,x_n(A(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow A'(x_1,\ldots,x_n))$, ove $x_1, \ldots, x_n$ sono indeterminate distinte e non sono libere nella formula α. Si dice invece che α definisce *esplicitamente* il predicato A, rispetto alla teoria T, se esiste una formula β di L in cui compaiono libere le indeterminate di α e pure $x_1,\ldots,x_n$ tale che $\alpha \vdash_T \forall x_1,\ldots,x_n(A(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \beta)$. Ebbene il teorema di Beth è l'affermazione che ogni simbolo implicitamente definibile è esplicitamente definibile.

Ritorno brevemente alle richieste di eliminabilità e non creatività delle definizioni. Sul piano logico questi requisiti sono essenziali, ma dal punto di vista epistemologico tale posizione è troppo riduttiva. Si possono giustificare le definizioni e le notazioni come strumenti suggeriti per realizzare economia di pensiero. Invece di ricordare e di utilizzare lunghe sequenze di simboli, si trattano gli stessi enti in modo compatto e sintetico risparmiando tempo, carta, energia, ma soprattutto memoria. Perciò le definizioni e le notazioni svolgono il ruolo di una sorta di stenografia del pensiero. Ma se il compito fosse solo questo, sarebbe poca cosa. Quando una definizione o una notazione sono ben scelte, esse rendono accessibili alla nostra intuizione intere aree del sapere matematico. Ne è un esempio clamoroso la definizione di gruppo introdotta da Galois per risolvere equazioni algebriche e che successivamente ha trovato applicazioni in quasi tutti i rami della Matematica ed anche al di fuori, come ben sanno i cristallografi e gli strutturisti chimici. Così pure si fa risalire alla notazione posizionale dei numeri naturali lo sviluppo della Matematica dal Rinascimento in poi. In conclusione, le definizioni sono logicamente non creative ed eliminabili, ma il contributo che danno alla conoscenza è enorme ed insostituibile, sono dunque creative e non eliminabili.

Il tema delle definizioni è poi motivo d'innesco di una polemica da tempo in atto tra scuole diverse di pensiero filosofico. La discussione si può riassumere nella do-

---

[7] Tratto da H. Hermes, **Einführung in die mathematische Logik**, Teubner, Stuttgart, 1969.

manda se la Matematica sia una scoperta o una invenzione. Sul tema fino ad oggi non ci sono risultati così chiari e conclusivi che fanno propendere per una posizione piuttosto che l'altra. Una verifica indiretta è data dal "successo" dei due approcci.

La Matematica cosiddetta classica è pensata come scoperta; in essa le definizioni sono semplicemente descrizioni di enti che esistono di per sé e delle mutue relazioni tra essi, anche se il linguaggio che uso per descriverli può essere manchevole. Pertanto sono logicamente possibili definizioni impredicative che per altri motivi, lasciano abbastanza perplessi. Dice H. Poincaré «Le definizioni impredicative sono definizioni mediante una relazione tra l'oggetto da definire e tutti gli oggetti di una certa specie della quale lo stesso oggetto da definire è supposto far parte (o almeno da alcuni oggetti che dipendono per la loro definizione dall'oggetto che deve essere definito». Un esempio è l'insieme di tutti gli insiemi: per costruirlo bisogna avere costruito tutti gli insiemi e quindi anche l'insieme cui tutti appartengono. Si tratta di un esempio centrale nell'analisi dei paradossi matematici proposta da Poincaré (ed anche da Russell col cosiddetto principio del *circolo vizioso*): nelle antinomie di Burali-Forti, di Cantor e nel paradosso di Russell si applica l'astrazione a formule impredicative.

Un esempio di impredicatività è fornito dalla definizione di estremo superiore di un insieme di numeri reali. Si dice *maggiorante* di un insieme A di numeri reali un numero $a \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in A$, $x \leq a$. Si dice *estremo superiore* di un insieme A di numeri reali il minimo dell'insieme dei maggioranti. Nella definizione compaiono un elemento, chiamiamolo b, ed un insieme, chiamiamolo B, cui b appartiene e la definizione di b richiede la conoscenza di B che si ha solo se sono noti tutti gli elementi di B, ma tra essi c'è proprio lo stesso b. C'è una specie di circolo vizioso che rende la definizione concettualmente poco chiara e scientificamente poco affidabile. Ma la nozione di estremo superiore è centrale nella teoria dei numeri reali: l'assioma di continuità dei reali si può formulare asserendo che ogni insieme superiormente limitato di numeri reali ha estremo superiore.

Se la Matematica si inventa, prima di "inventare" b devo avere "inventato" B cioè devo avere "chiamato all'esistenza" tutti i suoi elementi, tra cui b e ciò ha l'aspetto di un circolo vizioso. I risultati tradizionalmente insegnati nelle scuole superiori sui numeri reali, su derivate ed integrali sono tutti (o quasi) da scartare perché basati sulla continuità. Le ricostruzioni dell'Aritmetica e dell'Analisi in forma predicativa mostrano quanto sia difficile evitare trappole del genere, in agguato in vari contesti tradizionali. D'altra parte il sistema formale di teoria degli insiemi proposto da Von Neumann, Bernays e Gödel assume come uno dei principi fondamentali l'astrazione limitata alle formule predicative e questa limitazione è fruttuosa perché si può provare che il sistema è finitamente assiomatizzabile [8]. Si ricostruisce buona parte della Matematica in tale ambito, il che mostra come sia possibile fare a meno delle definizioni impredicative.

Se invece la Matematica si scopre, non c'è nulla di male nell'usare le formule impredicative, in quanto il ricorso alla totalità per definirne un elemento, come nella definizione di estremo superiore, dipende solo dalla incapacità umana di trovare altre definizioni che non incorrono nel "difetto" della impredicatività.

Il ruolo della definizione cambia drasticamente secondo la scuola di pensiero che si adotta. Nella Matematica classica la definizione serve a identificare con un nome un concetto importante di per sé, già esistente. Non tutte le definizioni hanno però la stessa "potenza" conoscitiva: la definizione ben scelta è come la chiave che permette di aprire nuove stanze nel palazzo iperuranio in cui hanno sede i concetti. «D'altra parte il nome non è meno importante della cosa. Il nome, dice Wittgenstein significa l'oggetto e l'oggetto è il suo significato; e nella proposizione il nome è il "rappresentante dell'oggetto"» [9].

Per coloro che ritengono che la Matematica si inventi, il primo momento ed anche più importante dell'invenzione è la nascita di una definizione che in un qualche senso deve contenere (nella sua chiusura convessa) i risultati che si possono poi dimostrare a partire da essa.

2. Differenza tra definizioni e notazioni. In quanto precede c'è una risposta al quesito sulle differenze tra definizioni e notazioni. Una notazione è limitata al fatto linguistico, una definizione ha dietro di sé una teoria logica, possibile traduzione di un concetto matematico. L'approccio qui esposto è volutamente e necessariamente grossolano e qualche esempio mi permetterà di chiarire meglio.

Solitamente le definizioni e le notazioni per le relazioni (predicati) si presentano nella forma definiendum $\leftrightarrow$ definiens. Le operazioni (simboli funzionali) e le costanti vengono introdotte secondo lo schema collaudato: definiendum = definiens. Nella scrittura compare un simbolo di eguaglianza che solitamente e

---

8 Invece il sistema formale proposto Morse e Mostowski, che differisce da quello di Von Neumann, Bernays e Gödel solo perché ammette l'astrazione anche sulle formule non predicative, non è finitamente assiomatizzabile.

9 Da S. Bajini, *Gli orribili giochi che si fanno con le parole*, Ca' de Sass, Milano, **116**, dic. 1991, 60–63.

giustamente ci si affretta a dire che non è una eguaglianza [10]. Ciò viene messo in mostra con simboli diversi: $=_{def}$, $:=$, $\stackrel{\Delta}{=}$. Invece che un'eguaglianza si tratta di una sostituibilità; il simbolo va letto: tutte le volte che mi serve posso sostituire una scrittura con l'altra. Pertanto la = relazione non è un'eguaglianza perché non è riflessiva, né transitiva. Non è neppure simmetrica nel senso stretto: si sostituisce una scrittura con un'altra solo in certi contesti dimostrativi. Ribadisco che ciò vale sia per le definizioni che per le notazioni, sicché le differenze non appaiono evidenti in questo contesto.

Un esempio. L'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ sarà risolubile nei reali se

(*) $$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0.$$

Così scrivendo abbiamo introdotto il *discriminante* dell'equazione, che viene generalmente indicato con la lettera Δ. Lo schema definitorio è quello detto sopra, a sinistra c'è il simbolo nuovo, a destra l'espressione, meglio il termine, scritto con i simboli che compaiono in precedenza. Per essere super pignoli, bisogna osservare che Δ è una funzione dei coefficienti: bisognerebbe scrivere $\Delta(a,b,c)$. Adesso si può decidere se si tratta di una notazione o di una definizione. Se si tratta di una notazione, non ci sarebbe bisogno di utilizzare un nome proprio per denotare tale differenza. Basterebbe il simbolo. E' questo il sentire degli studenti che nel risolvere l'equazione parlano del *delta* . Dunque per essi la (*) non è una definizione, ma una notazione, non è un ente di una qualche importanza, solo uno strumento per la risoluzione. Quando l'insegnante propone ed insiste sul termine preciso di *discriminante,* il suo puntiglio non viene compreso, lo studente cerca di accontentarlo con lo stesso stato d'animo con cui si condiscende alle richieste di una persona non sana di mente. Forse per il docente la (*) è da ritenersi una definizione, in quanto fa riferimento alla teoria dei numeri reali e gli è noto che in ogni equazione algebrica il *discriminante* è un *risultante* della equazione e dell'equazione "derivata" [11]. La teoria T cui si fa riferimento è la teoria dei numeri reali, argomento irto di difficoltà.

---

[10] Cfr. A. Barnaba, M. Barnaba, A. Peluso, G. Russo, *Problemi didattici del concetto di eguaglianza*, in stampa su L'Educazione Matematica

[11] Ricordo che dati due polinomi $p(x)$ e $q(x)$, si dice *risultante* dei due polinomi una funzione razionale dei loro coefficienti, di grado minimo, che si annulla se e solo se essi hanno una radice in comune. Tale funzione è determinata a meno di un fattore di proporzionalità. Se si scrivono i polinomi come $p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$, $q(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+ \ldots+ b_{m-1}x^{m-1} +b_mx^m$ un loro risultante è ottenibile col metodo dialitico di Sylvester dal determinante di ordine $n+m$

Da questo esempio si può cogliere la differenza tra notazione e definizione. La notazione resta a livello linguistico, non fa intervenire la teoria e i concetti che invece sono sottostanti la definizione. Una notazione ha aspetti particolari, ha un che di temporaneo in quanto serve in un certo contesto, ma nulla vieta che un simbolo introdotto con una notazione possa essere riutilizzato in seguito con altro significato. La definizione assume un aspetto più definitivo e tratta concetti universali: la si può ritenere una descrizione di un ente matematico che si manifesta all'attenzione dello studioso.

Raramente si riflette sulla strada che ha portato da una notazione ad una definizione ed è un'occasione didattica sprecata. La storia delle definizioni sarebbe molto interessante. Un esempio per tutti. All'inizio del calcolo differenziale col simbolo di integrale si denotava l'operazione inversa della derivazione (Barrow). L'approfondimento successivo del calcolo integrale ha trasformato la notazione in a definizione e questa nel teorema fondamentale del calcolo.

Inoltre la forma di intuizione che suggerisce una notazione è solitamente più superficiale e formale, meno sostanziale. Le notazioni sono suggerite dall'uso e richiedono che si sappia cogliere in varie occasioni una parte costante nelle scritture, spesso facendo uso della capacità di eseguire sostituzioni inverse, cioè quelle in cui si richiede il codice [12]. Si ha quindi ancora a che fare con l'eguaglianza e le sue

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_m & b_{m-1} & \dots & b_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Questo procedimento lo si applica alle equazioni. E' facile vedere che se il polinomio $p(x)$ ammette radici multiple, allora esse sono anche radice del polinomio $p'(x)$ ottenuto facendo la derivata prima di $p(x)$. Per trovare se $p(x)$ le radici multiple basta considerare un risultante tra $p(x)$ e $p'(x)$. Ad esempio se $p(x) = ax^2 + bx + c$, il polinomio derivato è dato da $p'(x) = 2ax + b$, per cui un risultante si ottiene dal seguente determinante di ordine 3

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 2a & b \\ 2a & b & 0 \end{vmatrix}$$

Sviluppando il determinante si ha $2ab^2 - 4a^2c - ab^2 = a\cdot(b^2 - 4ac) = a\cdot\Delta$ che a meno del fattore di proporzionalità non nullo a è la solita espressione. Dato che $a \neq 0$, il determinante è nullo se e solo se $b^2 - 4ac = 0$, quindi l'annullarsi di questa espressione porta all'esistenza di radici coincidenti, date da $x = -\frac{b}{2a}$.

12 Per questi aspetti sulle sostituzioni si veda ad esempio C. Marchini, *Le sostituzioni e le relazioni*, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate. **13** - n. 7 (Luglio 1990), 732 -

proprietà. Per la definizione bisogna essere in grado di padroneggiare oltre alla parte formale, anche la parte concettuale.

La distinzione tuttavia non è così grossolana come è qui presentata. Ci sono ambiti in cui solo una scelta opportuna di notazioni permette di procedere, prima fra tutti la già ricordata notazione posizionale per i numeri naturali. Per un altro esempio considero la 6-pla ordinata $\langle 1,2,4,0,6,7\rangle$ e ad essa associo la 6-upla ordinata $\langle 1,0,2,6,4,7\rangle$; considero poi la 9-pla ordinata $\langle 1,3,5,4,2,6,8,9,7\rangle$ e ad essa associo la 9-pla ordinata $\langle 1,4,8,3,2,9,5,6,7\rangle$. Il problema è quello di trovare un'*unica* espressione della legge che mi fa passare da una n-pla ordinata a quella associata. La risposta è più semplice di quanto non appaia a prima vista: invece di scrivere sotto forma di n-ple ordinate scrivo sotto forma di *matrici*: a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ corrisponde $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$; a $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ corrisponde $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 9 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; con tali notazioni è chiaro che l'operazione cercata è la *trasposizione*, cioè lo scambio delle righe con le colonne. La scrittura in forma di matrice, che in questo contesto è solo una convenzione, permette di risolvere semplicemente il problema. Ma le matrici, solitamente introdotte come uno schema di numeri, quindi come una notazione, hanno altre ragioni che le fanno ritenere un concetto da definire e non una semplice stipulazione.

Prima di lasciare l'argomento della differenza tra definizioni e notazioni, voglio osservare che quando si deve definire un'operazione non sempre le definizioni assumono la forma definiendum = definiens. L'esempio tratto dal lavoro A. Barnaba, M. Barnaba, A. Peluso, G. Russo già citato, è quello del logaritmo: $\log_a b = c$ se e solo se $a^c = b$. Si definisce il logaritmo (ed è una definizione perché il concetto è importante nel resto della Matematica, in quanto si tratta di un isomorfismo di $\langle \mathbb{R}^+,\cdot\rangle$ in $\langle \mathbb{R}, +\rangle$), mediante il primo modo previsto dalla trattazione di Lésniewski. Viene a mancare una prova di unicità, legata alla formula $a^c = b$. Lo stesso accade per il concetto di limite [13]. Il fatto che log e lim si presentino in detta forma, non sarà forse uno dei motivi delle difficoltà di apprendimento delle definizioni che traducono questi concetti ?

In entrambi i casi della definizione e della notazione il linguaggio gioca un ruolo di rilievo. E spesso una delle difficoltà dei discenti è quella di avere distinto tra i co-

---

744, oppure P. Margiotta, *Le sostituzioni in un'ottica interdisciplinare*, L'Educazione Matematica **12** (3) Vol. 2 (1 Aprile 1991), 23 - 44.

[13] Devo l'esempio al Prof. D. Lenzi di Lecce. Per il limite, solitamente si prova un teorema di unicità, che invece manca per il logaritmo.

dici linguistici del linguaggio comune e quello della Matematica. Se la differenza non è fatta propria, l'uso di esempi per chiarire una definizione può risultare controproducente [14]. Quando l'insegnante usa senza troppa attenzione locuzioni come "in parole povere" oppure "in pratica", scivola su un piano liguistico diverso da quello formale e matematico. E non è detto che lo studente sappia poi rielaborare in termini formali la "suggestione, fornitagli mediante considerazioni più intuitive, riconoscendo in essa la definizione data dall'insegnante.

3. Alcune considerazioni didattiche. Molto spesso gli sforzi dei docenti per far comprendere lo scopo di notazioni e definizioni portano lo studente a pensare: «Come sarebbe bello lasciar perdere alcuni degli ammassi di parole che ho imparato a scuola - imparato perché anche gli insegnanti devono pur vivere, suppongo» [15]. Ci si può chiedere quale sia la strategia migliore per favorirne l'apprendimento. Forse il docente che legge queste note penserà che tra i molti concetti importanti che la sua materia introduce, una meta-riflessione su come presentare i concetti mediante le definizioni sia un "lusso" che ci si può permettere solo in condizioni eccezionali. Ma ciò che propongo è così usuale e banale che forse riuscirà sorprendente. Lo strumento che suggerisco potrebbe essere indicato col nome di *strategia della stanchezza*. Credo si tratti di una tecnica poco usata, data la cronica carenza di tempo per svolgere il programma. Essa consiste nel non praticare "sconti", offrendo sempre esercizi che si risolvono... da soli, tanto sono ben congegnati. Inoltre il docente non dovrebbe anticipare i tempi, proponendo prima la soluzione dei problemi da ripetere come schema esercitativo, ma, nell'ottica del problem-solving, far giungere alle soluzioni. Soltanto ciò che si conquista con fatica è destinato a permanere. Se lo studente tocca con mano che l'introduzione di nuovi simboli permette semplificazioni al suo lavoro, apprezza e comprende l'uso delle definizioni e notazioni che gli si propongono, «avviando via via i giovani a lavorare da sé, a ricrcare da sé da scoperta delle verità, anziché porgerne loro la semplice notizia; aiutandosi, ove occorra, con qualche illustrazione storica per chiarire il senso dei problemi e dei

---

[14] Cfr. G. Sacks, **Saturated Model Theory**, Benjamin, Reading, 1972, p. 4: «As a rule examples are presented by authors in the hope of clarifying universal concepts, but all examples of the universal, since they must of necessity be particular and so partake of the individual, are misleading» (Di regola gli esempi sono presentati dagli autori nella speranza di chiarire i concetti universali, ma tutti gli esempi dell'universale, poiché di necessità devono essere particolari e così prendono parte dell'individuale, sono fuorvianti)

[15] Pensiero di C.H. Hinton riportato su R.Rucker, **La mente e l'infinito**, Franco Muzzio Ed., Padova, 1991.

metodi.» [16]. Diversamente tutto quanto gli viene proposto assume la stessa importanza, che spesso è quella di superare in modo soddisfacente la prossima interrogazione programmata.

Un esempio, in cui intervengono delle notazioni ben ... note. Si debba calcolare il prodotto di 8,25 e 7,75, oppure $42 \cdot 38$, ci si accorge che $8{,}25 \cdot 7{,}75 = 63{,}9375 = 64 - 0{,}0625 = (8+0{,}25) \cdot (8-0{,}25)$ e $42 \cdot 38 = 1596 = 1600-4 = (40+2) \cdot (40-2)$ e da questi ed altri esempi comprendere l'importanza dell'eguaglianza $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$,

Solo "smontando" i pezzi delle definizioni e delle notazioni, mediante contromodelli che ne facciano capire l'esigenza, è possibile affinare il linguaggio. Un semplice esempio. Se si vuole definire la relazione d'ordine stretto nei numeri naturali usando l'addizione, si potrebbe dire $n < m$ sta per $\exists p(m = n+p)$, sbagliando. La frase "sta per" è la doppia implicazione presente nella trattazione di Lésniewski per la definizione di un predicato. La teoria che interviene è l'Aritmetica con l'operazione di addizione. Il contromodello è offerto immediatamente considerando che tra i numeri naturali c'è anche 0, per cui dalla eguaglianza $0 = 0+0$ si ottiene $0 < 0$. Per questo controesempio è indispensabile "complicare" la scrittura del definiens ponendo $n < m$ sta per $\exists p(p \neq 0 \wedge m = n+p)$.

Nonostante la banalità, è assai frequente riscontrare errori del genere, sia negli studenti che nei libri di testo, errori originatisi da una specie di *horror vacui* che colpisce il numero 0. Si incontra ad esempio, su certi manuali, che 0 è un numero naturale, poi però si "definisce" il minimo comune multiplo di due numeri (ma anche di due polinomi) dicendo: $\mathrm{mcm}(p,q)$ è *il più piccolo* multiplo comune di p e q, senza specificare che qui "piccolo" non si riferisce all'ordine naturale, ma a quello della divisibilità, in cui 0 è il massimo (idem per i polinomi introducendo il grado). Ciò forse è originato da un malinteso senso di analogia con il il massimo comune divisore: $\mathrm{MCD}(p,q)$ è il massimo dei divisori comuni, sia che "massimo" si interpreti con l'ordine naturale, sia con la divisibilità e questa è una "fortuna" non sufficientemente apprezzata. Passando a mcm, viene spontaneo ripetere, mutatis mutandis, la definizione, cadendo così nel tranello teso da 0.

Avevo osservato nel primo paragrafo che una formula può essere una definizione rispetto ad una teoria e non esserlo rispetto ad un'altra. Qui ne abbiamo un esempio. Se si considera la formula $n < m \leftrightarrow \exists p(p \neq 0 \wedge m = n+p)$ rispetto

[16] Citazione dal R.D. 6 maggio 1923 n. 1054, in cui vengono presentati i programmi della scuola superiore riformata dal ministro G.Gentile.

all'Aritmetica ho la definizione di <, se si considera la stessa formula rispetto la teoria dei numeri interi relativi con le loro proprietà, non si ottiene il consueto ordine: $-6 = 2 + (-8)$, $-8 \neq 0$, ma non si ha $2 < -6$.

C'è grande differenza tra chi ha capito i motivi di una definizione e chi l'ha imparata a memoria solo per i motivi scolastici del momento. Questi due atteggiamenti si colgono immediatamente analizzando il linguaggio con cui lo studente risponde ad una domanda di chiarimento su una definizione. Chi la possiede è capace di ripeterla con i termini appropriati usati al posto ed al momento giusto, richiesto di esemplificazioni, è in grado di fornirne alcune diverse da quelle apprese dal docente. Chi è ancora lontano dalla comprensione usa termini che al più possono avere significati sinonimici, intercala spesso con l'avverbio "praticamente", perché quello che sa fare è usare la definizione "in pratica" negli esercizi standard, scambia spesso i ruoli dei soggetti con quelli dei predicati e sovente utilizza pezzi del definiens per esplicitare il definiendum, non sa fornire esempi propri. Se tale "patologia" viene riscontrata dal docente, passare sopra al problema porta alle situazioni lamentate all'inizio.

Nella scuola elementare si usano esercizi di definizione. Essi potrebbero utilmente essere ripresi alla scuola superiore. Gli esercizi sono del seguente tipo: un gruppo di bambini è incaricato di dare un nome una forma geometrica inconsueta. Viene poi invitato a spiegare ad un altro gruppo di bambini come disegnare la figura geometrica, senza però mostrarla. Il nome viene accettato se il disegno del secondo gruppo corrisponde alla forma geometrica in esame. Esercizi di questo genere si possono svolgere anche con argomenti diversi dalla Geometria.

Alle superiori l'esercizio potrebbe essere ripetuto proficuamente. Ad esempio il concetto di funzione si presta assai bene ad un'attività didattica per tentativi ed errori, che sostanzialmente ripercorra le tappe che hanno portato alla definizione attuale; in tal caso la storia sarebbe veramente maestra e porterebbe anche a capire come non si tratti di un concetto "sedimentato" da lungo tempo, ma ancora in fase di sviluppo. Un possibile itinerario didattico è quello che passa attraverso le operazioni, ad esempio l'addizione sui naturali, con il primo addendo fissato, vista come "macchina" che associa ad un numero un altro. E' però bene introdurre contemporaneamente un controesempio ottenuto considerando la relazione "è divisore di". Si possono analizzare in parallelo queste due situazioni in modo che gli studenti colgano nell'unicità del corrispondente di un elemento in una funzione il carattere distintivo tra le due corrispondenze. Passando al grafico cartesiano delle corrispondenze, consiglio di studiarne l'andamento. E' possibile estrapolare la situazione precedente passando alla operazione di addizione pensata come funzione binaria. Ripetendo gli esempi di funzione e di non-funzione, si può introdurre il concetto con una definizione giustificata dalle esperienze; bisogna però, come l'avvocato del diavolo, avere sempre pronti gli esempi (controesempi) che servano per mettere in discussione parti della definizione che possano sembrare banali. Un percorso siffatto potrebbe avvalersi degli "errori" dei matematici del passato, motivati dal loro modo di concepire l'argomento e dallo sviluppo dello strumento linguistico disponibile. Un procedimento del genere è analogo a quello esplicitato nel bel libro di I. Lakatos, **Dimostrazione e confutazione** edito da Feltrinelli.

Ed ancora prima di introdurre le derivate si possono trovare esempi di rapporti incrementali di funzioni in Geometria, in Fisica, ecc. Studiandone le proprietà più semplici dei rapporti e dei loro limiti si può giungere alla definizione di derivata, apprezzandone le ragioni. Ovviamente più i concetti sono astratti, più difficile è l'opera di concettualizzazione e di apprendimento da parte degli studenti.

Il nodo è dunque qui: l'abito formale imposto alle definizioni, spesso il solo che viene malamente appreso e ritenuto, non è un capriccio degli insegnanti, «perché anche gli insegnanti devono pur vivere», ma è l'esito di un processo che ha portato a tradurre concetti in parole, in formule di un opportuno linguaggio. Capire i limiti e la valenza del linguaggio, in una parola impadronirsi di una definizione, può essere fatto solo da chi ha fatto esperienza personale con i concetti sottintesi e ne ha fatto applicazione anche perché «Una Nozione Matematica definita esplicitamente non può essere compresa in tutte le sue ... sfaccettature dalla frase o dalla sequenza di frasi che si usano nella sua definizione» [17]. La comprensione avverrà solo quando l'ente il cui nome è dato mediante definizione, viene utilizzato con le sue proprietà senza bisogno di eliminarne la definizione. Basti pensare cosa succederebbe del sapere matematico se ogni volta che si applicano enti definiti si dovesse fare all'indietro il procedimento che li ha generati per giungere al livello dei termini primitivi: si provi ad esprimere l'eguaglianza, banale, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ applicando le definizioni degli integrali, dei limiti, delle funzioni, dei numeri reali e delle operazioni e delle relazioni su essi, dei numeri razionali e delle operazioni e delle relazioni su essi, per fermarsi ai numeri naturali ed alle loro proprietà. Il tempo per arrivare a scrivere questa eguaglianza eliminando le definizioni penso supererebbe

[17] A. Avantaggiati, *Argomentazioni per una didattica scientifica*, Quaderno del Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate, Roma, 1991.

abbondantemente il numero di ore da dedicare in un anno all'intero programma. Ma anche ci si riuscisse, verrebbe senza dubbio perduta la *banalità* della relazione divenendo anzi un difficile compito dimostrativo.

La dialettica sulla Matematica come scoperta o come invenzione, presentata sopra, non va sottovalutata. Essa è un vero e proprio nodo che può ostacolare la comprensione. Non credo che gli allievi abbiano la capacità di analizzare le cause delle difficoltà che incontrano con le definizioni; questo compito spetta al docente che non dovrebbe sfuggire alla presentazione di temi di filosofia della Matematica sull'argomento, visto che essi forniscono un aiuto all'apprendimento. Purtroppo è frequente l'impostazione della lezione "frontale" come strumento di trasmissione del sapere: l'insegnante enuncia concetti, li fa seguire da spiegazioni ed esempi, poi assegna gli esercizi sull'argomento e sul loro svolgimento valuta gli allievi. E' una tecnica didattica che ha grandi vantaggi, soprattutto di economia di tempo, ma nelle aule se ne vedono i limiti. Sovente i concetti non vengono analizzati dal punto di vista del loro sviluppo storico, delle possibili alternative, del loro inquadramento in ambito fondazionale, né vengono visti come risposta ad un bisogno ad un'indagine dai connotati filosofici.

4. Riflessioni conclusive. Ritengo di avere così dimostrato che il problema della natura della Matematica entra pesantemente nell'insegnamento, per esempio, attraverso il problema delle definizioni. I docenti della nostra materia hanno l'obbligo di rendersi conto che trasferiscono assieme ai concetti anche le loro idee filosofiche: «la posizione epistemologica degli insegnanti (ne siano più o meno coscienti) interviene, quasi spontaneamente, nella pratica dell'insegnamento» [18]. Ciò traspare da come svolgono la lezione, da quali esercizi scelgono, dall'importanza che attribuiscono ad una parte piuttosto che ad un'altra. Gli studenti assorbono senza sapere questi aspetti e così si tramanda una non chiarita idea sulla natura della Matematica, frutto di un tacito *contratto epistemologico.* Ma non tutti gli allievi accettano a livello inconsapevole quanto viene loro implicitamente proposto. Nascono così delle incomprensioni e delle difficoltà che possono essere causate dalla mancata condivisione di specifici concetti oppure di tutto il quadro generale. I laureati in Matematica che si dedicano all'insegnamento, negli anni di studio universitari dovrebbero iniziare riflessioni di sapore epistemologico che contribuiscono

---

[18] Tratto da C. Sitia, *Storia, Epistemologia e Didattica della Matematica*, L'Educazione Matematica, suppl. IV - 1 - 1983, 3 - 18.

all'impostazione di una corretta programmazione didattica. Un docente conscio di quanto è nascosto anche negli aspetti più semplici della nostra materia, è in grado di proporre lo stesso argomento da angolazioni diverse, per trovare quelle più idonee all'apprendimento, inoltre può offrire un quadro interpretativo assai discosto dal dogmatismo e dal "calcolismo" imperanti.

Ma tale curriculum universitario si realizza assai raramente: attualmente la riflessione su temi di epistemologia della Matematica trova poco spazio, se non nullo, nella preparazione del laureato in Matematica; non c'è dunque da stupirsi che i rischi ed i difetti di questo sistema si scoprano ogni giorno nelle aule universitarie ed in quelle in cui si celebrano i riti dell'esame di maturità.

Il motivo sostanziale è che per accostarsi a tale analisi è necessaria una salda cultura matematica, un'approfondita conoscenza dei metodi e dei linguaggi della Logica Matematica, coniugati ad una riflessione sui Fondamenti, non disgiunti da un'attitudine filosofica. Detti argomenti trovano poco spazio nei corsi universitari compressi nelle 15 annualità, intoccabili persino ai venti della riforma dei piani di studio ed all'autonomia universitaria, che hanno travolto altri corsi di laurea. Ma la causa più importante è che la società scientifica italiana non ha forse capito fino in fondo l'urgenza di un mutamento di prospettiva, anche se non mancano accorati appelli contro l'eccessiva specializzazione su ristretti temi di ricerca [19].

Concludo augurandomi che il mio intervento possa fare qualcosa per smuovere, almeno nella scuola superiore, uno stato di stagnazione. La situazione attuale è forse la causa principale di un paradosso che si vive in questi giorni: nei corsi di laurea scientifici vi è un crescente fabbisogno di strumenti matematici nelle applicazioni e nei piani di studio per conseguire le lauree scientifiche si assiste ad una costante contrazione delle ore dedicate alla nostra materia, perché mal intesa.

---

19 Ad esempio l'intervento di G. Prodi, Notiziario U.M.I, Anno XIX, N. 1 - 2, 146 - 150.