CAPITOLO III

8. Traslazioni di un semigruppo.

Dato un semigruppo S, per ogni elemento a di S si possono definire due applicazioni, λ_a e ρ_a, nel seguente modo:

$$\forall s \in S \qquad \lambda_a s = a\, s, \qquad s\rho_a = s\, a.$$

Per convenzione scriviamo λ_a come un'applicazione sinistra (cioé si pone a sinistra della variabile) e ρ_a come un'applicazione destra (cioè si pone a destra della variabile).

L'applicazione λ_a si dice traslazione interna sinistra di S associata ad a, l'applicazione ρ_a si dice traslazione interna destra di S associata ad a.

In un semigruppo S un'applicazione sinistra $\lambda : S \to S$ si dice traslazione sinistra di S sse $\lambda(st) = (\lambda s)t \;\; \forall s,t \in S$; un'applicazione destra $\rho : S \to S$ si dice traslazione destra di S sse $(st)\rho = s(t\rho) \;\; \forall s,t \in S$; una traslazione sinistra λ e una traslazione destra ρ si dicono traslazioni associate sse $s(\lambda t) = (s\rho)t \;\; \forall s,t \in S$.

Osserviamo che la traslazione interna sinistra è una traslazione sinistra, la traslazione interna destra è una traslazione destra, ed esse sono tra loro associate. Infatti abbiamo:

1) $\lambda_a(st) = (\lambda_a s)t \qquad \forall a,s,t \in S$

essendo $\lambda_a(st) = a(st) = (as)t = (\lambda_a s)t$;

2) $(st)\rho_a = s(t\rho_a) \qquad \forall a,s,t \in S$

essendo $(st)\rho_a = (st)a = s(ta) = s(t\rho_a)$;

3) $s(\lambda_a t) = (s\rho_a)t \qquad \forall a,s,t \in S$

essendo $s(\lambda_a t) = s(at) = (sa)t = (s\rho_a)t$.

L'insieme di tutte le coppie (λ,ρ) di traslazioni sinistre e destre associate si dice inviluppo traslazionale di S e si indica con $\Omega(S)$.

Esso è un semigruppo, con la moltiplicazione così definita

$$(\lambda,\rho)(\lambda',\rho') = (\lambda\lambda',\rho\rho')$$

dove $\lambda\lambda'$ rappresenta la composizione delle applicazioni sinistre λ e λ' (applicando prima λ' e poi λ), mentre $\rho\rho'$ rappresenta la composizione delle applicazioni destre ρ , ρ' (applicando prima ρ e poi ρ').

Infatti abbiamo:

1) $(\lambda,\rho),(\lambda',\rho') \in \Omega(S) \Longrightarrow (\lambda,\rho)(\lambda',\rho') \in \Omega(S)$

Dim.

$\lambda\lambda'$ è una traslazione sinistra, infatti $\forall s,t \in S$ $\lambda\lambda'(st) = \lambda(\lambda'st) = \lambda((\lambda's)t) = (\lambda(\lambda's))t = (\lambda\lambda's)t$;

$\rho\rho'$ è una traslazione destra, infatti $\forall s,t \in S$ $(st)\rho\rho' = ((st)\rho)\rho' = (s(t\rho))\rho' = s((t\rho)\rho') = s(t\rho\rho')$;

$\lambda\lambda'$ e $\rho\rho'$ sono tra loro associate, infatti $\forall s,t \in S$ $s(\lambda\lambda't) = s(\lambda(\lambda't)) = (s\rho)(\lambda't) = ((s\rho)\rho')t = (s\rho\rho')t$.

Se ne conclude che $(\lambda,\rho)(\lambda',\rho') = (\lambda\lambda',\rho\rho') \in \Omega(S)$.

2) $(\lambda,\rho),(\lambda',\rho'),(\lambda'',\rho'') \in \Omega(S) \Longrightarrow ((\lambda,\rho)(\lambda',\rho'))(\lambda'',\rho'') = (\lambda,\rho)((\lambda',\rho')(\lambda'',\rho''))$.

Dim.

$((\lambda,\rho)(\lambda',\rho'))(\lambda'',\rho'') = (\lambda\lambda',\rho\rho')(\lambda'',\rho'') = ((\lambda\lambda')\lambda'',(\rho\rho')\rho'') = (\lambda(\lambda'\lambda''),\rho(\rho'\rho'')) = (\lambda,\rho)(\lambda'\lambda'',\rho'\rho'') = (\lambda,\rho)((\lambda',\rho')(\lambda'',\rho''))$.

Consideriamo ora l'applicazione che ad ogni elemento $a \in S$ associa (λ_a,ρ_a) che, per quanto visto prima, è un elemento di $\Omega(S)$ e verifichiamo che tale applicazione è un omomorfismo, infatti $\forall\, a,b \in S$ $(\lambda_a,\rho_a)(\lambda_b,\rho_b) = (\lambda_{ab},\rho_{ab})$, perché

$\forall\, s \in S : \lambda_a\lambda_b s = \lambda_a(bs) = a(bs) = (ab)s = \lambda_{ab}s$ e

$$s\rho_a\rho_b = (sa)\rho_b = (sa)b = s(ab) = s\rho_{ab} .$$

In generale tale omomorfismo non è un monomorfismo, infatti può accadere che, presi $a,b \in S$, con $a \neq b$, risulti $\lambda_a = \lambda_b$ e $\rho_a = \rho_b$.

Ad esempio se S è un semigruppo con almeno due elementi che siano annullatori, a e b, con $a \neq b$, allora $\forall x \in S$, per la definizione di annullatore, risulta che $ax = xa = 0$ e $bx = xb = 0$, cioé $\forall x \in S$ $\lambda_a x = \lambda_b x$ e $x\rho_a = x\rho_b$.

Vale però il seguente

Lemma 8.1. Se a e b sono elementi di un semigruppo regolare (*) S, allora $\lambda_a = \lambda_b$ e $\rho_a = \rho_b$ implica $a = b$.

Dim.

Siano $a,b \in S$ t.c. $\lambda_a = \lambda_b$ e $\rho_a = \rho_b$. Poiché S è regolare esistono a' inverso di a e b' inverso di b, cioé $a = aa'a$ e $a' = a'aa'$ e $b = bb'b$, $b' = b'bb'$. Allora sarà

$a = aa'a = \lambda_a(a'a) = \lambda_b(a'a) = b(a'a)$,

$b = bb'b = \lambda_b(b'b) = \lambda_a(b'b) = a(b'b)$, ossia

$\exists (a'a) \in S \ni' a = b(a'a)$ e $\exists (b'b) \in S \ni' b = a(b'b)$, pertanto $a \mathcal{R} b$(**). Inoltre

$a = aa'a = (aa')\rho_a = (aa')\rho_b = (aa')b$,

$b = bb'b = (bb')\rho_b = (bb')\rho_a = (bb')a$, ossia $\exists (aa') \in S \ni' a=(aa')b$ e $\exists (bb') \in S \ni' b = (bb')a$, pertanto $a \mathcal{L} b$ (**). Allora si ha anche che $a \mathcal{H} b$(**), e per una proposizione sui semigruppi regolari(***) $\bar{a}$ inverso di a e $\bar{b}$ inverso di b. t.c. $a\bar{a} = b\bar{b}$ e $\bar{a}a = \bar{b}b$.

(*) Un semigrupo S si dice regolare sse $\forall a \in S \ \exists x \in s \ni' a = axa$.

(**) $\mathcal{L},\mathcal{R},\mathcal{H}$ sono le relazioni di Green, così definite: $\forall a,b \in S$: $a\mathcal{L}b \iff S^1a=S^1b$; $a\mathcal{R}b \iff aS^1 = bS^1$; $a\mathcal{H}b \iff a\mathcal{L}b$ & $a\mathcal{R}b$.

(***) v. [4] Prop. 4.1. pag. 49.

Per comodotà possiamo supporre di avere scelto a,b' tali che godano delle proprietà di $\tilde{a}$ e $\bar{b}$, cioé t.c. aa' = bb' e a'a = b'b.

Allora a = aa'a = ab'b = b.

c.v.d.

9. Teorema di Pietrich.

Prop. 9.1. Se ϕ è un omomorfismo da una banda rettangoalre $I_1 \times \Lambda_1$ (*) in una banda rettangolare $I_2 \times \Lambda_2$, allora esistono due applicazioni $\phi^\ell : I_1 \to I_2$, $\phi^r : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ t.c.

$$(\chi_1,\xi_1)\phi = (\chi_1\phi^\ell,\xi_1\phi^r) \qquad \forall(\chi_1,\xi_1) \in I_1 \times \Lambda_1 \qquad (9.1) .$$

Viceversa, per ogni applicazione $\phi^\ell : I_1 \to I_2$, $\phi^r : \Lambda_1 \to \Lambda_2$, la formula (9.1) definisce un omomorfismo ϕ da $I_1 \times \Lambda_1$ in $I_2 \times \Lambda_2$.

Dim.

Sia $\phi : I_1 \times \Lambda_1 \to I_2 \times \Lambda_2$ un omomorfismo. Fissato $\lambda_1 \in \Lambda_1$ e $\forall\, \chi_1 \in I_1$ definiamo $\chi_1\phi^\ell$ nel seguente modo:

$$(\chi_1,\lambda_1)\phi = (\chi_1\phi^\ell,\lambda_2)$$

(*) Ved. Parte I; definizione pag. 1, Lemma 1.13 pag. 10.

Analogamente, fissato $i_1 \in I_1$ e $\forall \xi_1 \in \Lambda$ definiamo $\xi_1\phi^r$ nel seguente modo:

$$(i_1,\xi_1)\phi = (i_2,\xi_1\phi^r) \quad .$$

Allora $\forall(\chi_1,\xi_1) \in I_1 \times \Lambda_1$ risulta

$$(\chi_1,\xi_1)\phi = [(\chi_1,\lambda_1)(i_1,\xi_1)]\phi = (\chi_1,\lambda_1)\phi(i_1,\xi_1)\phi =$$

$$= (\chi_1\phi^\ell,\lambda_2)(i_2,\xi_1\phi^r) = (\chi_1\phi^\ell,\xi_1\phi^r)$$

c.v.d.

Viceversa se ϕ è un'applicazione definita dalla (9.1) allora essa è un omomorfismo, infatti $\forall(\chi_1,\xi_1), (y_1,\eta_1) \in I_1 \times \Lambda_1$ risulta

$$[(\chi_1,\xi_1)(y_1,\eta_1)]\phi = (\chi_1,\eta_1)\phi = (\chi_1\phi^\ell,\eta_1\phi^r) = (\chi_1\phi^\ell,\xi_1\phi^r)(y_1\phi^\ell,\eta_1\phi^r) =$$

$$= (\chi_1,\xi_1)\phi\,(y_1,\eta_1)\phi \quad .$$

Corollario 9.1.

Siano $\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2$ semigruppi zero-sinistri (*) ed $\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2$ semigruppi zero-destri(*)
Se ϕ è un omomorfismo della banda rettangolare $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{R}_1$ nella banda rettangolare $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{R}_2$, allora esistono gli omomorfismi $\phi^\ell : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, $\phi^r : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ t.c.

$$(\ell_1,r_1)\phi = (\ell_1\phi^\ell,r_1\phi^r) \qquad (9.2)$$

$\forall(\ell_1,r_1) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{R}_1$.

Viceversa per qualsiasi omomorfismo $\phi^\ell : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, $\phi^r : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$, la formula (9.2) definisce un omomorfismo ϕ da $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{R}_1$ in $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{R}_2$.

(*) Ved. Defin. Parte I pag. 1.

Dim.

Sia ϕ un omomorfismo da $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{R}_1$ in $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{R}_2$, allora per la Prop. 9.1 esistono due applicazioni $\phi^\ell : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ e $\phi^r : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ t.c.

$$(\ell_1, r_1)\phi = (\ell_1 \phi^\ell, r_1 \phi^r) \quad \forall (\ell_1, r_1) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{R}_1.$$

Tali applicazioni ϕ^ℓ, ϕ^r sono due omomorfismi. Proviamolo per ϕ^ℓ, proviamo cioé che $(\ell_1 \ell_1')\phi^\ell = \ell_1 \phi^\ell \ell_1' \phi^\ell$.

Infatti, essendo $\mathcal{L}_1$ semigruppo zero-sinistro, si ha che $\ell_1 \ell_1' = \ell_1$ ed essendo ϕ^ℓ un'applicazione : $(\ell_1 \ell_1')\phi^\ell = \ell_1 \phi^\ell$; inoltre anche $\mathcal{L}_2$ è un semigruppo zero-sinistro, quindi $\ell_1 \phi^\ell \ell_1' \phi^\ell = \ell_1 \phi^\ell$. Concludendo $(\ell_1 \ell_1')\phi^\ell = \ell_1 \phi^\ell \ell_1' \phi^\ell$, come volevamo dimostrare.

Il viceversa è ovvio.

Se un semigruppo S è espresso come semireticolo di semigruppi completamente semplici (*) S_α, indiciati in Y, e se $\alpha, \beta \in Y$ e $\alpha \geq \beta$, allora si ha che

$$S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta} = S_\beta \ , \quad S_\beta S_\alpha \subseteq S_{\beta\alpha} = S_\beta \ .$$

Da cui se $c \in S_\alpha$ e $x \in S_\beta$ segue che $c\,x, x\,c \in S_\beta$. Dunque per ogni elemento $c \in S_\alpha$ si possono considerare le applicazioni λ_c e ρ_c da S_β in S_β definite al solito modo

$$\lambda_c x = c\,x \qquad \text{e} \qquad x\rho_c = x\,c.$$

Tali applicazioni sono la traslazione sinistra e la traslazione destra di S_β associate, e l'applicazione che ad ogni elemento $c \in S_\alpha$ associa $(\lambda_c, \rho_c) \in \Omega(S_\beta)$ è un omomorfismo da S_α nell'inviluppo traslazionale di S_β, $\Omega(S_\beta)$.

Consideriamo ora una banda rettangolare $I \times \Lambda$, dove I è un semigruppo zero-sinistro e Λ è un semigruppo zero-destro, e determiniamone l'inviluppo traslazionale.

(*) Un semigruppo S è completamente semplice sse è regolare e $\forall a,b \in S: ax = bx$ e $xa = xb \Longrightarrow a = b$.

Sia λ una traslazione sinistra di $I \times \Lambda$, allora

$\lambda(i,\mu) = \lambda[(i,\mu)(i,\mu)]$ = (perché λ è una traslazione sinistra)
$= [\lambda(i,\mu)]\ (i,\mu) = (i^*,\mu^*)(i,\mu) = (i^*,\mu)$ (perché I è zero sinistro e Λ è zero-destro)

dove abbiamo, per ora, posto $\lambda(i,\mu) = (i^*,\mu^*)$.

Inoltre per ogni ξ in Λ

$$\lambda(i,\xi) = \lambda[(i,\mu)(i,\xi)] = [\lambda(i,\mu)]\ (i,\xi) = (i^*,\mu)(i,\xi) = (i^*,\xi)$$

Così λ determina un'applicazione $\phi: I \to I$ (che scriveremo come applicazione sinistra) t.c.

$$\lambda(i,\xi) = (\phi i,\xi) \quad \forall\ \xi \in \Lambda \tag{9.3}$$

Viceversa per ogni applicazione sinistra $\phi: I \to I$ la formula (9.3) definisce una traslazione sinistra di $I \times \Lambda$.

Analogamente ogni traslazione destra ρ della banda rettangolare $I \times \Lambda$ determina ed è determinata da un'applicazione destra $\psi: \Lambda \to \Lambda$ t.c.

$$(x,\mu)\rho = (x,\mu\psi) \qquad \forall (x,\mu) \in I \times \Lambda \tag{9.4}$$

Osserviamo che se λ , definita dalla (9.3), è una traslazione sinistra di $I \times \Lambda$ e ρ , definita dalla (9.4), è una traslazione destra, allora

$$\forall (i,\mu),\ (j,\nu) \in I \times \Lambda \ : \quad (i,\mu)[\lambda(j,\nu)] = (i,\mu)(\phi j,\nu) = (i,\nu) \quad \text{e}$$
$$[(i,\mu)\rho](j,\nu) = (i,\mu\psi)(j,\nu) = (i,\nu)$$

Pertanto ogni coppia (λ,ρ) è tale che λ e ρ sono traslazioni associate. L'applicazione f che alla coppia (λ,ρ) associa la coppia (ϕ,ψ), dove ϕ è determinata da λ e ψ è determinata da ρ , è evidentemente biettiva; inoltre è un omomorfismo tra l'inviluppo traslazionale $\Omega(I,\Lambda)$ e il prodotto cartesiano $\mathfrak{J}^*(I) \times \mathfrak{J}(\Lambda)$ del semigruppo $\mathfrak{J}^*(I)$ delle applicazioni sinistre di I in I e del semigruppo $\mathfrak{J}(\Lambda)$ delle applicazioni destre di Λ in Λ, vale cioé la seguente uguaglianza:

$$f((\lambda,\rho)(\lambda',\rho')) = f(\lambda,\rho)f'(\lambda',\rho').$$

Infatti si ha che

$f((\lambda,\rho)(\lambda',\rho')) = f(\lambda\lambda',\rho\rho')$ e

$f(\lambda,\rho)f(\lambda',\rho') = (\phi,\psi)(\phi',\psi') = (\phi\phi',\psi\psi') = f(\lambda\lambda',\rho\rho')$, perché $\forall (i,\xi),\ (x,\mu) \in I \times \Lambda$ risulta chiaramente che

$\lambda\lambda'(i,\xi) = (\phi\phi' i,\xi)$ e $(x,\mu)\rho\rho' = (x,\mu\psi\psi')$.

Consideriamo ora una generica banda B e supponiamo di aver espresso B come semireticolo di bande rettangolari E_α, $\alpha \in Y$; possiamo porre $E_\alpha = I_\alpha \times \Lambda_\alpha$ $\forall \alpha \in Y$.

Se $\alpha \geq \beta$ abbiamo già visto che $\forall a \in E_\alpha$ esiste una coppia associata (λ_a,ρ_a) di traslazioni sinistra e destra di E_β. Inoltre l'applicazione t.c. $a \to (\lambda_a,\rho_a)$ è un omomorfismo da E_α in $\Omega(E_\beta)$.

Come primo risultato sull'inviluppo traslazionale di una banda rettangolare si può affermare che ogni elemento $a \in E_\alpha$ determina un'applicazione sinistra $\phi_\beta^a : I_\beta \to I_\beta$ e un'applicazione destra $\psi_\beta^a : \Lambda_\beta \to \Lambda_\beta$ secondo la seguente formula:

$$\lambda_a(x_\beta,\xi_\beta) = a(x_\beta,\xi_\beta) = (\phi_\beta^a x_\beta,\xi_\beta);\ (x_\beta,\xi_\beta)\rho_a = (x_\beta,\xi_\beta)a = (x_\beta,\xi_\beta\psi_\beta^a) \qquad (9.5)$$

Più in generale si può dire che, se $\alpha \geq \beta$, abbiamo un omomorfismo

$$\Phi_{\alpha,\beta} : E_\alpha \to \mathfrak{J}^*(I_\beta) \times \mathfrak{J}(\Lambda) \quad \text{così definito}$$

$$\forall a \in E_\beta \quad : \quad a\,\Phi_{\alpha,\beta} = (\phi_\beta^a, \psi_\beta^a) \quad .$$

Se $\beta = \alpha$ e se $a = (i,\mu)$ allora

$a(x_\alpha,\xi_\alpha) = (i,\mu)(x_\alpha,\xi_\alpha) = (i,\xi_\alpha)$, $(x_\alpha,\xi_\alpha)a = (x_\alpha,\xi_\alpha)(i,\mu) = (x_\alpha,\mu)$.
Quindi l'applicazione $\phi_\alpha^{(i,\mu)} : I_\alpha \to I_\alpha$ ha la proprietà che $\phi_\alpha^{(i,\mu)} x_\alpha = i$ $\forall x_\alpha \in I_\alpha$. Analogamente $\xi_\alpha \psi_\alpha^{(i,\mu)} = \mu$ $\forall \xi_\alpha \in \Lambda_\alpha$.

Così se indichiamo con $\langle\chi\rangle$ il valore costante di un'applicazione costante χ , possiamo scrivere:

$$\langle\phi_\alpha^{(i,\mu)}\rangle = i \quad , \quad \langle\psi_\alpha^{(i,\mu)}\rangle = \mu \quad \forall (i,\mu) \in E_\alpha \qquad (9.6)$$

Consideriamo ora in B un prodotto più generale. Precisamente supponiamo che $a \in E_\alpha$, $b \in E_\beta$, e $z = (x_\gamma, \xi_\gamma)$ sia un elemento arbitrario di E_γ, dove $\gamma = \alpha\beta$.

Allora se poniamo $ab = (i_\gamma, \mu_\gamma)$, segue che:

$$abz = (ab)z = (i_\gamma, \mu_\gamma)(x_\gamma, \xi_\gamma) = (i_\gamma, \xi_\gamma)$$

e anche

$$abz = a(bz) = a\,[b(x_\gamma, \xi_\gamma)] = a(\phi_\gamma^b\, x_\gamma, \xi_\gamma) = (\phi_\gamma^a\, \phi_\gamma^b x_\gamma, \xi_\gamma),$$

ossia $(i_\gamma, \xi_\gamma) = (\phi_\gamma^a \phi_\gamma^b x_\gamma, \xi_\gamma)$.

Ne deduciamo che l'applicazione sinistra $\phi_\gamma^a\, \phi_\gamma^b$ di I_γ ha la proprietà che

$\forall x_\gamma \in I_\gamma \;:\; \phi_\gamma^a\, \phi_\gamma^b\, x_\gamma = i_\gamma$

cioé che $\phi_\gamma^a\, \phi_\gamma^b$ è un'applicazione costante di valore costante i_γ.

Ragionando analogamente per zab possiamo dimostrare che l'applicazione destra $\psi_\gamma^a\, \psi_\gamma^b$ di Λ_γ assume valore costante μ_γ. Così otteniamo il prodotto di a e b in funzione delle applicazioni ϕ_γ^a, ψ_γ^a, ϕ_γ^b, ψ_γ^b nel seguente modo

$$ab = (\langle\phi_\gamma^a\, \phi_\gamma^b\rangle, \langle\psi_\gamma^a\, \psi_\gamma^b\rangle) \tag{9.7}$$

Se allora pensiamo all'omomorfismo $\Phi_{\alpha,\beta}$ come "noto", la formula (9.7) mostra come il prodotto ab di due elementi arbitrari di B è determinato da questo omomorfismo.

Vediamo ora che risultati si ottengono moltiplicando il prodotto ab a destra per un elemento $d = (x_\delta, \xi_\delta) \in E_\delta$, dove $\delta \leq \alpha\beta$.

Allora, da una parte $abd = (ab)d = (\phi_\delta^{ab} x_\delta, \xi_\delta)$, dall'altra $abd = a(bd) =$

$$= a(\phi_\delta^b x_\delta, \xi_\delta) = (\phi_\delta^a \phi_\delta^b x_\delta, \xi_\delta).\text{Se ne deduce quindi che } \phi_\delta^{ab} = \phi_\delta^a \phi_\delta^b \tag{9.8}$$

Analogamente, calcolando i due valori di dab si giunge alla formula

$$\psi_\delta^{ab} = \psi_\delta^a \psi_\delta^b \tag{9.9}$$

Formuliamo ora il teorema di Petrich (1967).

Teorema 9.1.

Sia Y un semireticolo e sia $\{E_\alpha / \alpha \in Y\}$ una famiglia di bande rettangolari a due a due disgiunte con insieme di indici Y. Per ogni α sia $E_\alpha = I_\alpha \times \Lambda_\alpha$, e per ogni coppia di elementi α, β di Y t.c. $\alpha \geq \beta$, sia $\Phi_{\alpha,\beta} : E_\alpha \to \mathcal{J}^*(I_\beta) \times \mathcal{J}(\Lambda_\beta)$ un omomorfismo t.c. $\forall a \in E_\alpha : a\Phi_{\alpha,\beta} = (\phi_\beta^a, \psi_\beta^a)$.

Supponiamo anche che

(i) se $a = (i,\mu) \in E_\alpha$, allora $\phi_\alpha^a, \psi_\alpha^a$ sono applicazioni costanti, e

$$\langle \phi_\alpha^{(i,\mu)} \rangle = i, \qquad \langle \psi_a^{(i,\mu)} \rangle = \mu ;$$

(ii) se $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ e $\alpha\beta = \gamma$, allora $\phi_\gamma^a \phi_\gamma^b$ e $\psi_\gamma^a \psi_\gamma^b$ sono applicazioni costanti;

(iii) se $\langle \phi_\gamma^a \phi_\gamma^b \rangle$ viene indicato con j e $\langle \psi_\gamma^a \psi_\gamma^b \rangle$ con ν, allora

$$\forall \delta \leq \gamma \quad \phi_\delta^{(j,\nu)} = \phi_\delta^a \phi_\delta^b , \quad \psi_\delta^{(i,\nu)} = \psi_\delta^a \psi_\delta^b .$$

Sia $B = \cup \{E_\alpha / \alpha \in Y\}$ e definiamo il prodotto di a in E_α e b in E_β in questo modo : $a * b = (\langle \phi_\gamma^a \phi_\gamma^b \rangle, \langle \psi_\gamma^a \psi_\gamma^b \rangle)$, dove $\gamma = \alpha\beta$. Allora $(B,*)$ è una banda, le cui $\mathcal{J}$-classi (*) sono le bande rettangolari E_α.

Viceversa ogni banda è determinata in questo modo da un semireticolo Y da una famiglia di bande rettangolari $E_\alpha = I_\alpha \times \Lambda_\alpha$ con insieme di indici in Y, e da una famiglia di omomorfismi $\Phi_{\alpha,\beta} : E_\alpha \to \mathcal{J}^*(I_\beta) \times \mathcal{J}(\Lambda_\beta)$ ($\alpha,\beta \in Y, \alpha \geq \beta$) soddisfacenti (i),(ii),(iii).

(*) La $\mathcal{J}$ è la relazione di Green così definita: se S è un semigruppo $\forall a,b \in S$

$$a \mathcal{J} b \iff S^1 a S^1 = S^1 b S^1$$

<u>Dim.</u>

La condizione sufficiente è vera grazie alla formule (9.6) e (9.9).

Per provare la condizione necessaria dimostriamo prima che la moltiplicazione "$*$" data è associativa.

Se a e E_α , b e E_β e c e E_γ sono elementi arbitrari di B, e se $\alpha\beta = \delta$, $\beta\gamma = \varepsilon$ e $\alpha\beta\gamma = \zeta$, sarà :

$a * b = (< \phi_\delta^a \, \phi_\delta^b > , < \psi_\delta^a \, \psi_\delta^b >) = (j,\nu)$ e

$b * c = (< \phi_\varepsilon^b \, \phi_\varepsilon^c >, < \psi_\varepsilon^b \, \psi_\varepsilon^c >) = (k,\pi)$.

Allora

$(a*b)*c = (<\phi_\zeta^{(j,\nu)} \, \phi_\zeta^c >, < \psi_\zeta^{(j,\nu)} \, \psi_\zeta^c >) = (< \phi_\zeta^a \, \phi_\zeta^b \, \phi_\zeta^c >, <\psi_\zeta^a \, \psi_\zeta^b \, \psi_\zeta^c >) =$

$= (< \phi_\zeta^a \, \phi_\zeta^{(k,\pi)} >, < \psi_\zeta^a \, \psi_\zeta^{(k,\pi)} >) = a*(b*c)$ <u>c.v.d.</u>

Osserviamo che se $a = (i,\mu)$ e $b = (j,\nu)$ appartengono entrambi ad E_α , allora dalla definizione di "$*$" segue che:

$a*b = (<\phi_\alpha^{(i,\mu)} \, \phi_\alpha^{(j,\nu)} >, < \psi_\alpha^{(i,\mu)} \, \psi_\alpha^{(j,\nu)} >)$,

inoltre per la proprietà (i) e per le proprietà delle applicazioni costanti sinistra e destra, risulta

$(<\phi_\alpha^{(i,\mu)} \, \phi_\alpha^{(j,\nu)} >, < \psi_\alpha^{(i,\mu)} \, \psi_\alpha^{(j,\nu)} >) = (< \phi_\alpha^{(i,\mu)} > < \phi_\alpha^{(j,\nu)} >, <\psi_\alpha^{(i,\mu)} ><\psi_\alpha^{(j,\nu)}> = (i$

Questo coincide esattamente con il prodotto di a e b in una banda rettangolare E_α. In particolare segue che $a*a = a$ e così B è una banda.

Proviamo ora che le $\mathcal{J}$-classi di B sono tutte e sole le bande rettangolari E_α , α e Y.

Osserviamo intanto, che presi a e E_α , b e E_β e posto $\gamma = \alpha\beta$ risulterà, per quanto visto prima, che

$$a * b = (\langle \phi_\gamma^a \phi_\gamma^b \rangle , \langle \psi_\gamma^a \psi_\gamma^b \rangle) = (i_\gamma, \nu_\gamma) \qquad \text{con } i_\gamma \in I_\gamma \text{ e } \nu_\gamma \in \Lambda_\gamma,$$

per cui $a * b \in E_\gamma$. Allora se ne deduce che

$$E_\alpha * E_\beta \subseteq E_{\alpha\beta} .$$

Ora consideriamo due elementi $a,b \in B$ t.c. $a \mathcal{J} b$. Allora esisteranno E_α e E_β t.c. $a \in E_\alpha$ e $b \in E_\beta$ e

$x \in E_\delta$, $y \in E_\varepsilon$, $u \in E_\zeta$, $v \in E_\eta$ t.c. $b = x*a*y$ e $a = u*b*v$,

con $\delta,\varepsilon,\zeta,\eta$ opportuni elementi di Y.

Se poniàmo $\delta\alpha = \alpha'$, $\alpha'\varepsilon = \alpha''$ e $\zeta\beta = \beta'$, $\beta'\eta = \beta''$, allora, per l'osservazione precedente, sarà $b = (x*a)*y \in E_{\alpha''}$ e $a = (u*b)*v \in E_{\beta''}$, quindi $a*b \in E_{\alpha''\beta''}$.

Cioé se due elementi di B sono $\mathcal{J}$-equivalenti allora essi stanno in uno stesso E_γ , con γ opportuno elemento di Y.

Viceversa, se due elementi di B stanno in uno stesso $E_\gamma, \gamma \in Y$, allora essi sono $\mathcal{J}$-equivalenti.

Infatti da $a,b \in E_\gamma$, E_γ banda rettangolare, segue che $a = a*b*a$ e $b = b*a*b$, pertanto $a \mathcal{J} b$.

Il teorema di Petrich è così completamente provato.