I N T R O D U Z I O N E

Uno dei punti centrali in geometria differenziale è la ricerca delle relazioni tra invarianti metrici e topologici di varietà differenziabili.

Tra gli invarianti metrici la curvatura è stato, per il suo significato geometrico, uno dei più studiati. Già Gauss, con il suo "Teorema egregium" portava alla luce la natura intrinseca del concetto in un'epoca in cui tutte le varietà si supponevano immerse.

In questa direzione uno dei primi teoremi veramente significativi è il teorema di Gauss-Bonnet che lega un invariante metrico, l'integrale della curvatura, ad un invariante topologico, la caratteristica di Eulero-Poincarè.

Per un lungo periodo si è affrontato il problema con tecniche essenzialmente analitiche; lo studio delle forme differenziabili ed in particolare delle forme armoniche conduce infatti a risultati sulla coomologia della varietà essenzialmente per il tramite dei teoremi di Hodge e di de-Rham.

Una via più geometrica è stata invece portata avanti efficacemente negli anni 60, prendendo impulso soprattutto dai lavori di Rauch e di Topogonov; essa consiste nello studio del comportamento in grande delle geodetiche (metodi di confronto). In particolare questi metodi sono basati sul confronto tra il comportamento delle geodetiche su varietà con curvatura "simile".

Resta ancora insoluto però uno dei problemi più importanti: la classificazione delle varietà a curvatura positiva.

Importante e significativo in questa direzione è il lavoro di Cheeger e Gromoll [9] che essenzialmente riduce il problema alle varietà compatte.

Una delle difficoltà maggiori nell'affrontare il problema è forse la mancanza di esempi. Infatti gli spazi omogenei di rango 1(sfere e spazi proiettivi) sono gli unici esempi di varietà compatte a curvatura strettamente positiva, se si eccettua un numero molto ristretto di esempi non "standard" (vedi Wallach [27] e [28])

A questo punto una congettura naturale sebbene strettamente ingenua è che, fatta eccezione per pochi altri casi, gli spazi simmetrici di rango uno sono le uniche varietà compatte a curvatura positiva. Se non altro, quindi, sorge naturale il problema di studiare varietà "simili" a detti spazi.

Le presenti note, in cui C. Guido ha raccolto e sviluppato essenzialmente gli argomenti discussi in un seminario tenuto da me presso l'Università di Lecce nel 1974, presentano alcuni lavori in tale direzione e vogliono cercare di costruire un "ponte" tra la geometria differenziale elementare ed alcuni aspetti della ricerca attuale.

Nei primi due capitoli sono raggruppati alcuni richiami di geometria riemanniana con particolare riguardo alla teoria delle geodetiche.

Nel terzo capitolo si discutono alcuni teoremi classici in geometria riemanniana dal punto di vista dei teoremi di confronto ed alcuni esempi.

Il capitolo conclusivo contiene, con alcune limitazioni, la descrizione dei lavori di Allamingeon [2] Klingemberg [16] e [30] particolarmente interessanti nello studio di varietà "simili" a spazi omogenei di rango 1.

L'intento, nello scrivere queste note, è di presentare gli argomenti suddetti in modo "leggibile" evitando dimostrazioni troppo lunghe o che richiedono troppe premesse e limitandosi d'altro canto, ove è sembrato più opportuno, ad accennare soltanto a definizioni e concetti basilari che si possono trovare senza difficoltà su testi ormai classici citati nella bibliografia e, dove occorre, tra le pagine stesse di questi appunti.

Ci auguriamo che la trattazione risulti abbastanza agile e possa servire almeno a chi voglia avere un'idea di alcune relazioni tra la "derivata prima" (topologia differenziale) e la "derivata seconda" (geometria differenziale) senza dover passare per un trattato.

Un ringraziamento alla Sig.na PALMA che ha curato il dattiloscritto.

Francesco MERCURI