6 SPAZIO COTANGENTE

0 Sia F una sottovarietà, di dimensione $o \leq m \leq n$, di uno spazio affine E di dimensione n.

Definiamo lo "spazio cotangente in p di F"(T^*_pF) come il duale di T_pF.

Osserviamo che si ha la proiezione $T^*_pE \to T^*_pF$ ma non l'inclusione $T^*_pF \hookrightarrow T^*_pE$.

Per avere un'inclusione canonica, dovremmo sapere come opera una forma di T^*_pF, non solo sui vettori di T_pF, ma anche sui vettori del supplementare di T_pF, il quale però non è dato canonicamente.

Si vede, invece, che se E è munito di una metrica, allora possiamo scomporre T_pE come somma diretta $T_pE = T_pF \oplus (T_pF)^{\perp}$.

Dunque, è possibile considerare la proiezione parallela $p'':T_pE \to T_pF$ e, mediante l'applicazione trasposta di p'' abbiamo l'inclusione $T^*_pF \hookrightarrow T^*_pE$.

Definiamo poi "lo spazio cotangente" T^*F: si vede che, tramite l'inclusione $T^*F \hookrightarrow T^*E$, tale spazio è una sottovarietà di T^*E di dimensione $2m$.

Osserviamo che, in generale, T^*F non è un prodotto cartesiano, ma solo un sottoinsieme di $E \times \bar{E}^*$.

Si osservi che la definizione di T^*F non ha nulla a che fare con l'esistenza di una metrica. Noi abbiamo considerato una metrica (che pure è assegnata in molti dei casi di nostro interesse) allo scopo di poter considerare T^*F come sottovarietà dello spazio affine T^*E.

Introducendo la nozione di varietà differenziabile, si potrebbe vedere facilmente che T^*F è una varietà differenziabile; noi abbiamo voluto evitare, a questo punto, tale concetto, perché è meno intuitivo di quello di sottovarietà.

1.6.1. DEFINIZIONE Sia $p \in F$.

Dicesi SPAZIO COTANGENTE di F in p lo spazio vettoriale

$$T^*_pF \equiv (T_pF)^* \qquad \dot{-}$$

Dunque, T^*_pF è uno spazio vettoriale di dimensione m.

1.6.2. DEFINIZIONE

Dicesi SPAZIO COTANGENTE di F l'insieme

$$T^*F \equiv \{(p,\underline{\nu}) \in E\times\bar{E}^* \,/ p \in F \,,\, \underline{\nu} \in T^*_p F\} \qquad \dot{-}$$

E' dunque

$$T^*F = \bigcup_{p\in F} T^*_pF \quad .$$

In generale T^*F non è un prodotto cartesiano, ma solo un sottoinsieme del prodotto $E \times \bar{E}^*$.

Nel caso particolare in cui $\dim F = n$ (F aperto di E), allora è

$$T^*_pF = \bar{E}^* \quad , T^*F = F \times \bar{E}^* \, .$$

1.6.3. DEFINIZIONE

Indichiamo con j^* la proiezione

$$j^* : T^*E \to T^*F$$

data da $\qquad j^*:(p,\underline{\nu}) \mapsto (p,\underline{\nu}_{/T_pF})$.

Indichiamo con q_F l'applicazione

$$q_F : T^*F \to F$$

data da $$q_F :(p,\underline{\nu}) \mapsto p \ .$$

Si noti che è

$$T^*\mathring{U} \equiv T^*(U \cap F) = j^*(T^*U) \cap T^*F \ .$$

1.6.4. PROPOSIZIONE Sia $x \equiv (x^1,\dots,x^n) : U \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate differenziabile di E, adattato ad F, in $p \in F$.

Allora l'applicazione

$$(\mathring{\hat{x}}^1,\dots,\mathring{\hat{x}}^m;\mathring{\dot{x}}_1,\dots,\mathring{\dot{x}}_m) : T^*\mathring{U} \to \mathbb{R}^{2m}$$

data da

$$\mathring{\hat{x}}^i(p,\underline{\nu}) \equiv x^i(p) \qquad ,\mathring{\dot{x}}_i(p,\underline{\nu}) \equiv \langle\underline{\nu} ,\partial x_i(p)\rangle \quad , \forall (p,\underline{\nu}) \in T^*\mathring{U} \equiv T^*(U \cap F) \subset T^*F$$

è biiettiva.

D. Infatti, fissata la base $\{\partial x_1(p),\dots,\partial x_n(p)\} \in T_pE$, esiste un isomorfismo naturale (indotto da questa base) tra lo spazio T_p^*F e il sottospazio, di dimensione m, di T_p^*E generato da $dx^1(p),\dots,dx^n(p)$, dato da

$$\underline{\nu} \mapsto \langle \underline{\nu}, \partial x_1(p)\rangle dx^1(p) + \dots + \langle \underline{\nu} ,\partial x_n(p)\rangle dx^n(p) \ .$$

Si noti che l'isomorfismo precedente dipende dalla scelta della base.

Pertanto, non esiste un modo canonico (dipendente dalla sola struttura affine di E) di vedere T^*E come una sottovarietà di T^*E.

La precedente proposizione permetterebbe di vedere T^*F come una "varietà differenziabile", ma noi vogliamo evitare questa nozione astratta e ragionare solo in termini di sottovarietà di uno spazio affine.

Se però assumiamo in E una struttura euclidea $\underline{g}$, allora è possibile vedere T^*F come una sottovarietà di T^*E.

1.6.5. Sia, dunque, $(E,\underline{g})$ uno spazio affine euclideo, di dimensione n.

LEMMA. Sia $U \subset E$ un intorno di $p \in F$, e sia $x \equiv (x^1,\ldots,x^n):U \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate differenziabile di E, adattato ad F.

Allora esiste un sistema di coordiante adattato

$$y \equiv \{y^1,\ldots y^n\} : V \subset U \to \mathbb{R}^n$$

tale che

$$\partial y_{m+1}(p), \ \ldots, \ \partial y_n(p) \in (T_pF)^{\perp} \quad , \quad \forall\, p \in V_2F \ .$$

Un tale sistema $y : V \to \mathbb{R}^n$ si dice "ortogonale, adattato ad F".

1.6.6. TEOREMA

Lo spazio cotangente T^*F è una sottovarietà di T^*E, di dimensione $2m$ mediante l'inclusione canonica data da

$$j : T^*F \to T^*E$$

$$j :(p,\underline{\nu}) \mapsto (p,\underline{\omega})$$

dove è

$$\underline{\omega}(\bar{v}) = \begin{cases} \underline{\nu}(\bar{v}) & \text{se } \bar{v} \in T_pF \\ o & \text{se } \bar{v} \in (T_pF)^{\perp} \end{cases} \quad .$$

Inoltre, se x è un sistema di coordinate su U adattato ad F, ed y è un sistema ortogonale adattato, da esso dedotto, allora

$$T^*y = \{\hat{y}^1,\ldots,\hat{y}^n;\ \dot{y}_1,\ldots,\dot{y}_n\}$$

è un sistema adottato a T^*F

e

$$\{\mathring{\hat{x}}^1,\ \ldots,\mathring{\hat{x}}^m\ ,\ \mathring{\dot{x}}_1,\ldots,\mathring{\dot{x}}_m\}$$

è il sistema di coordinate su $T^*\mathring{U}$, indotto da esso

Mediante l'identificazione di T^*F ad un sottoinsieme di T^*E, indotta da j, è

$$(p,\underline{\nu}) \in T_p^*F \Leftrightarrow \underline{\nu}((T_pF)^{\perp}) = o \Leftrightarrow \dot{y}_{m+1}(p,\underline{\nu}) = \ldots = \dot{y}_n(p,\underline{\nu}) = o.$$

Inoltre, è

$$1 \le i \le m \qquad \dot{y}_i = \mathring{\dot{x}}_i \qquad \text{su } T^*F \quad \dot{=}$$

Si osservi che la definizione di T^*F non ha nulla a che fare con l'esistenza di una metrica. Noi abbiamo considerato una metrica (che pure è assegnata in molti dei casi di nostro interesse) allo scopo di poter considerare T^*F come una sottovarietà dello spazio affine T^*E.

Introducendo la nozione di varietà differenziabile, si potrebbe vedere facilmente che T^*F è una varietà differenziabile; noi abbiamo voluto evitare, a questo punto, tale concetto perché è meno intuitivo di quello di sottovarietà.

1.6.7. DEFINIZIONE Sia $f : F \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile.

Indichiamo con df l'applicazione

$$df : F \to T^*F$$

data da

$$< df(p),(p,\bar{v}) > \equiv \dot{f}(p,\bar{v}) \quad , \quad \forall\, p \in F \quad , \quad (p,\bar{v}) \in T_pF \quad \underline{\cdot}$$

1.6.8. Siano F ed F' due sottovarietà. Sia $f : F \to F'$ un diffeomorfismo.

Si può definire in modo del tutto analogo a quello del caso degli spazi affini l'applicazione

$$T^*f : T^*F \to T^*F' \ .$$

1.6.9. PROPOSIZIONE.

Sia $F \subset E$ una sottovarietà. Sia $x : U \to \mathbb{R}^n$ un sitema di coordinate adottato. Allora

$$T^*\overset{\circ}{x} = \{\hat{\overset{\circ}{x}}{}^1, \ldots, \hat{\overset{\circ}{x}}{}^m, \dot{\overset{\circ}{x}}_1, \ldots \dot{\overset{\circ}{x}}_m\}$$

è un sistema di coordiante indotto su $T^*\overset{\circ}{U}$ $\underline{\cdot}$