Sia $\mu \equiv (P, \amalg, B, y)$ un fibrato principale topologico destro di gruppo strutturale $\bar{G}$.

Sia F un oggetto di $\mathfrak{F}$.

Si dice <u>"fibrato topologico, di fibra di tipo F, associato a μ"</u> ogni coppia

$$(\psi, \tilde{\amalg}) ,$$

dove $\psi \equiv (Q, \tilde{\pi}, B, \tilde{J})$ è un fibrato topologico con struttura in $\mathfrak{F}$, di fibra tipo F e $\tilde{\amalg} : P \times F \to Q$ è un'applicazione continua, tali che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{tikzcd} P \times F \arrow[r, "\overset{1}{\pi}"] \arrow[d, "\tilde{\amalg}"'] & B \arrow[d, "\amalg"] \\ Q \arrow[r, "\tilde{\pi}"'] & B \end{tikzcd}$$

$\dot{-}$

7 - Relazione tra fibrati associati e ricostruzione di fibrati

Sia $\mathfrak{F}$ una categoria di struttura. Sia F un oggetto di $\mathfrak{F}$ e supponiamo che

$$\bar{G} \equiv \mathrm{Aut}(F)$$

sia un gruppo topologico.

Sia poi $\mathfrak{F}_{\bar{G}}$ la categoria degli spazi affini destri di $\bar{G}$.

Si osservi ora che un cociclo a valori in $\bar{G} \equiv \mathrm{Aut}(F)$, relativamente alla categoria $\mathfrak{F}$, è anche un cociclo a valori in $\mathrm{Aut}(\bar{G})$, relativamente alla categoria $\mathfrak{F}_{\bar{G}}$, in quanto $\bar{G}$ opera a destra su se stesso. Pertanto, da un tale cociclo si può ricostruire sia un fibrato con struttura in $\mathfrak{F}$, sia un fibrato (principale) con struttura in $\mathfrak{F}_{\bar{G}}$.

(7.1) Proposizione

Sia B uno spazio topologico, sia $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di B, sia F un oggetto di $\mathcal{F}$ e, se $U_i \cap U_j \neq 0$, siano

$$\Phi_{ji} : U_i \cap U_j \to \mathrm{Aut}(F) \equiv \bar{G}$$

delle applicazioni tali che le applicazioni indotte $(U_i \cap U_j) \times F \to F$ siano continue(*) e

a) $\Phi_{kj} \cdot \Phi_{ji} = \Phi_{ki}$,

b) $\Phi_{ii} = id_F$.

Sia $\eta \equiv (E,\pi,B,J)$ il fibrato topologico con struttura in $\mathcal{F}$ ottenuto per ricostruzione e sia $\eta \equiv (P,\mu,B,Y)$ il fibrato topologico (principale) con struttura in $\mathcal{F}_{\bar{G}}$ ottenuto per ricostruzione.

Sia $\nu \equiv (P\times F_{/\bar{G}}, \tilde{\pi}, B, \tilde{\bar{D}})$ il fibrato associato a P, di fibra di tipo F.

Allora, l'applicazione

$$P \times F_{/\bar{G}} \to E$$

data da

$$\big[[i,b,g],f\big] \to [i,b,g(f)]$$

è ben definita ed è un isomorfismo di ν in η.

Dimostrazione

L'applicazione $P \times F_{/\bar{G}} \to E$ è ben definita perché abbiamo:

$$\big[[i,b,g]f,\big] = \big[[j,b,\Phi_{ji}(f)g],f\big] \to [j,b,\Phi_{ji}(b)(g(f))] = [i,b,g(f)],$$

(*) Se F è localmente compatto, basta supporre che Φ_{ji} sia continua.

$$\Big[[i,b,g],f\Big] = \Big[[i,b,gg'],g'^{-1}(f)\Big] \to [i,b,gg'y'^{-1}(f)] = [i,b,g(f)] \ .$$

La biiezione inversa è data da

$$[i,b,f] \to [[i,b,1],f],$$

che è pure ben definita, perché abbiamo:

$$[i,b,f] = [j,b,\Phi_{ji}(b)(f)] \to [[j,b,1],\Phi_{ji}(b)(f)] = [[j,b,\Phi_{ji}(b)],\Phi_{ji}(b)(f)] =$$
$$= [[i,b,1],f] \ .$$

Si verifica poi che tali applicazioni sono continue .