§ 1. Fondamenti teorici.

Siano $\lambda_i(A)$ per $i = 1,..,m$ gli autovalori della matrice complessa A di ordine s e sia $<.,.>$ un prodotto scalare in C^s. Sussistono i seguenti teoremi:

Teorema 1. - Se $\mathrm{Re} < Az,z > \leq 0$ per ogni $z \in C^s$ allora $\mathrm{Re}\lambda_i(A) \leq 0$ per $i = 1,..,m$.

Dim.- Indicato con z_i l'autovettore corrispondente all'autovalore $\lambda_i(A)$ si ha:

$$\mathrm{Re} \; <Az_i,z_i> \; = \mathrm{Re} \; <\lambda_i z_i,z_i> \; = \mathrm{Re}\, \lambda_i \| z_i \|^2 \leq 0$$

dove $\|\cdot\|$ è la norma corrispondente al prodotto scalare considerato.

Teorema 2. - Se A è in particolare una matrice reale di ordine s, $(.,.)$ un prodotto scalare in R^s e se $(Ax,x) \leq 0$ per ogni $x \in R^s$ allora $\mathrm{Re}\lambda_i(A) \leq 0$ per $i = 1,..,m$.

Dim. - Per ogni $z = x+iy$, $w = u+iv$ con $z,w \in C^s$ si ponga

$$< z,w > = (x,u) + (y,v) - i(x,v) + i(y,u).$$

Resta così definito il prodotto scalare $<.,.>$ in C^s e si ha:

$$\mathrm{Re} \; <Az,z> \; = (Ax,x) + (y,Ay) \leq 0$$

e quindi per il teorema 1 si ha la Tesi.

Sia $f : R^s \to R^s$ una funzione con derivate parziali prime continue e si denoti con $J(x)$ la matrice Jacobiana della f.

Teorema 3. - Se $(f(x) - f(y),x-y) \leq 0$ per ogni $x,y \in R^s$ allora $(J(x)u,u) \leq 0$ per ogni $x,u \in R^s$.

Dim.- Si supponga per assurdo che riesca per qualche x_0 ed u_0, $(J(x_0)u_0,u_0)>0$.

Per le ipotesi di continuità esiste $\rho \in R^+$ tale che

$$(J(x)u_0,u_0) > 0 \qquad \text{per ogni } x \in S(x_0,\rho)$$

avendo indicato con $S(x_0,\rho)$ la sfera di centro x_0 e raggio ρ.

Preso $\mu \in R$ tale che $\bar{x} = x_0 + \mu u_0 \in S(x_0,\rho)$ si ha :

$$f(\bar{x}) - f(x_0) = \int_{x_0}^{\bar{x}} J(x)dx = \int_0^1 J(x_0+\mu t u_0)\mu u_0 dt$$

dove $\int_{x_0}^{\bar{x}} J(x)dx$ é l'integrale di linea esteso al segmento di estremi x_0 e $\bar{x}$.

Componendo scalarmente con μu_0 si ha :

$$(f(\bar{x}) - f(x_0), \mu u_0) = \int_0^1 (J(x_0+\mu t u_0)\mu u_0, \mu u_0)dt =$$

$$\mu^2 \int_0^1 (J(x_0+\mu t u_0)u_0, u_0)dt > 0 \qquad \text{contro l'ipotesi.}$$

Dai teoremi 1 e 3 discende il corollario seguente.

Corollario 1. - Se $(f(x) - f(y), x - y) \leq 0$ per ogni $x,y \in R^s$ si ha che $\mathrm{Re}\,\lambda_i(J(x)) \leq 0$ per ogni $x \in R^s$ e per $i = 1,..,m$.

Si consideri ora il sistema di equazioni differenziali ordinarie autonomo

1.1 $$\frac{dy}{dt} = f(y) \quad , \quad t \geq t_0$$

con $f : R^s \to R^s$, $f \in C^1$ e tale che soddisfi alla condizione di monotonia

1.2 $$(f(u) - f(v), u - v) \leq 0$$

per ogni $u,v \in R^s$.

Se $y(t)$ e $u(t)$ sono due soluzioni della (1.1) si ha:

1) $$\frac{d}{dt} \|f(y(t))\|^2 = 2(J(y(t))f,f) \leq 0$$

cioé la $\| f(y) \|$ é una funzione non crescente lungo la traiettoria.

2) $$\frac{d}{dt} \| y(t) - u(t)\|^2 = 2(y(t) - u(t) , f(y(t)) - f(u(t))) \leq 0$$

cioé la (1.2) é una condizione necessaria e sufficiente affinché $\|y(t)-u(t)\|$ sia una funzione non crescente di t, per tutte le coppie di soluzioni della (1.1).

Se in particolare f soddisfa alla condizione di stretta monotonia

$$(f(u) - f(v)\ ,\ u - v) \leq -\mu\|u - v\|^2 \quad \text{con } \mu > 0 \tag{1.3}$$

e per ogni $u,v \in R^s$, f é bigettiva e bicontinua e l'insieme

$$\Omega = \{\ y \in R^s : f(y) = 0\ \}$$

si riduce ad un solo punto.

Indicata con $\overset{*}{J}(x)$ la matrice Jacobiana della funzione $g(x) = f(x) + \mu x$, con I la matrice unitaria di ordine s , per la (1.3) risulta $(g(u)-g(v),u-v) \leq 0$ per ogni $u,v \in R^s$, e per il teorema 3 $(\overset{*}{J}(x)u,u) = ((J(x) + \mu I)u,u) \leq 0$ e quindi

$$(J(x)u,u) \leq -\mu\ \|u\|^2 \qquad \forall\ x,u \in R^s\ . \tag{1.4}$$

Inoltre la funzione $V : R^s \to R$ definita da $V(y) = (f(y),f(y))$ é tale che:

a) $V(y) = 0 \quad \forall\ y \in \Omega \quad ; \quad V(y) > 0 \quad \forall\ y \notin \Omega$

b) $\frac{d}{dt} V(y(t)) = 2(J(y)f(y),f(y)) < 0 \quad \forall\ y \notin \Omega$

dove $y = y(t)$ é una soluzione della (1.1).

Pertanto[1] l'insieme Ω è globalmente asintoticamente stabile in R^s, cioè il punto di equilibrio è globalmente stabile e attrattivo in R^s .

§2. Richiami sulla A e G-stabilità.

Si consideri la (1.1) con la condizione (1.2). Il generale metodo lineare a k-passi può scriversi

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j} \tag{2.1}$$

dove α_j e β_j sono costanti ed $f_{n+j} = f(y_{n+j})$ per $j = 0,..,k$.

Il metodo (2.1) sarà nel seguito indicato brevemente con (ρ,σ) dove

$$\rho(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j\ \zeta^j \qquad \sigma(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j\ \zeta^j$$