Sommario

In questo lavoro si studia il problema di valori al contorno

(1) $EE^{*}u = f$

(2) $D^{s}u = 0$ su ∂A per $0 \leq |s| \leq m-1$

dove E è un particolare operatore ellittico di ordine $m \geq 1$ e E^{*} è l'operatore formalmente aggiunto di E.

Di tali operatori è possibile costruire gli operatori soluzioni fondamentali. Ciò permette di dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema (1),(2) in una opportuna classe $\mathcal{U}(A)$ per ogni $f \in \mathcal{L}^{2}(A)$.

Il fatto più saliente è che dell'operatore di Green del problema (1),(2) si dà la forma esplicita.

Ciò permette di studiare il problema di autovalori relativo ad (1),(2) usando (oltre che il metodo di Rayleigh-Ritz) quello degli invarianti ortogonali.

Consideriamo l'operatore differenziale lineare di ordine 2m a coefficienti reali e costanti

$$(1)\qquad \mathscr{D}_{2m} = \sum_{s=0}^{2m} a_s \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m-s}\partial y^{s}}, \qquad a_s \in \mathbb{R},\ s = 0,1,\dots,2m,$$

con la seguente ipotesi di ellitticità:

$$(2)\qquad \sum_{s=0}^{2m} a_s \xi_1^{2m-s}.\xi_2^{s} \neq 0$$

per ogni vettore (ξ_1,ξ_2) di $\mathbb{R}^2$ tale che $\xi_1^2 + \xi_2^2 \neq 0$.

Dalla (2) consegue che $a_\circ \neq 0$ e $a_{2m} \neq 0$.

Per $\xi_2 \neq 0$, dividendo per ξ_2^{2m} e ponendo $\frac{\xi_1}{\xi_2} = w$,la condizione (2) diventa :

$$(3)\qquad \sum_{s=0}^{2m} a_s w^{2m-s} \neq 0, \text{ per ogni } w \text{ reale.}$$

Questo implica che gli zeri del polinomio a I° membro della (3) sono tutti complessi e a due a due coniugati,essendo gli a_s reali.Se indichiamo tali zeri con $\alpha_h \pm i\beta_h (\beta_h \neq 0)$, $h=1,2,..,m$,il I° membro della (2) si può scrivere

$$(4)\qquad a_\circ \prod_{h=1}^{m} \left[\xi_1 - (\alpha_h + i\beta_h)\xi_2\right]\left[\xi_1 - (\alpha_h - i\beta_h)\xi_2\right].$$

Per analogia con la (4),l'operatore (1) si può rappresentare nel seguente modo

$$(5)\qquad \mathscr{D}_{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) = a_\circ \prod_{h=1}^{m} \left[\frac{\partial}{\partial x} - (\alpha_h + i\beta_h)\frac{\partial}{\partial y}\right]\left[\frac{\partial}{\partial x} - (\alpha_h - i\beta_h)\frac{\partial}{\partial y}\right].$$

Se poniamo

$$(6) \qquad L_h = \frac{\partial}{\partial x} - (\alpha_h + i\beta_h)\frac{\partial}{\partial y} ,$$

indicato con L_h^* l'operatore formalmente aggiunto di L_h ,si ha

$$(7) \qquad L_h^* = - \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha_h - i\beta_h)\frac{\partial}{\partial y} = -\left[\frac{\partial}{\partial x} - (\alpha_h - i\beta_h)\frac{\partial}{\partial y}\right] .$$

Pertanto si può scrivere

$$\mathcal{D}_{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = (-1)^m a_\circ \prod_{h=1}^{m} L_h L_h^* ,$$

oppure,per la permutabilità degli L_h e L_h^*,

$$\mathcal{D}_{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = (-1)^m a_\circ \prod_{h=1}^{m} L_h \cdot \prod_{h=1}^{m} L_h^* .$$

Infine, posto $E = \prod_{h=1}^{m} L_h$, e osservato che,detto E^* l'aggiunto formale di E,

si ha $E^* = \left(\prod_{h=1}^{m} L_h\right)^* = \prod_{h=1}^{m} L_h^*$,

si può scrivere

$$(8) \qquad \mathcal{D}_{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = (-1)^m a_\circ EE^*$$

Sia A un dominio di R^2 (insieme aperto) limitato e propriamente regolare. Si f una funzione di $\mathcal{L}^2(A)$.

Sia $\mathcal{U}(A)$ la classe delle funzioni u appartenenti a $H_m(A) \cap H_{2m}(A_\circ)$ per ogni dominio $A_\circ$ tale che $\overline{A}_\circ \subset A$. [1]

Consideriamo il seguente problema di valori al contorno :

$$(9) \qquad \mathcal{D}_{2m}\, u = f \quad \text{in } A ,$$

$$(10) \qquad D^s u = 0 \qquad \text{su } \partial A, \text{ per } \quad 0 \leq |s| \leq m-1.$$

---

[1] Per le notazioni usate si fa riferimento a [1]

Tenendo presente il significato dell'operatore $\mathscr{D}_{2m}$ e pensando conglobata la costante $(-1)^m a_0^{-1}$ nel dato f, il problema (9),(10) si può scrivere

$$(11) \qquad EE^* u = f \qquad \text{in } A,$$

$$(12) \qquad D^s u = 0 \qquad \text{su } \partial A, \text{ per } 0 \leq |s| \leq m-1.$$

Così formulato il problema è di <u>tipo biarmonico generalizzato</u>.[2]

Dimostreremo che esistono gli operatori T e T^* soluzione fondamentale rispettivamente di E e E^*. Ciò assicura [2'] l'esistenza e l'unicità della soluzione u del problema (11),(12) nella classe $\mathcal{U}(A)$, per ogni f di $\mathscr{L}^2(A)$.

Daremo, inoltre, una costruzione esplicita dell'operatore G di Green del nostro problema, per mezzo di T, T^* e di un operatore proiezione.

Procederemo nel seguente modo :

I)-mediante un opportuno cambiamento di variabili, trasformeremo gli operatori L_h e L_h^* dati da (6),(7), rispettivamente, negli operatori

$$(13) \qquad L = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}$$

$$(14) \qquad L^* = -\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} ,$$

dei quali, come è noto, sono operatori soluzioni fondamentali rispettivamente

$$Tf = \frac{1}{2\pi}\iint_A \frac{f(\zeta)}{\bar{z} - \bar{\zeta}}\, d\xi d\eta \quad e \quad T^* f = \frac{1}{2\pi}\iint_A \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta ,$$

dove $\zeta = \xi + i\eta$ e $z = x + iy$.

Ciò permette non solo di affermare che gli operatori L_h e L_h^* hanno soluzioni fondamentali, ma anche di darne una forma esplicita;

---

(2) Vedi [2]

(2') cfr. [2] pp. 38-40.

II)- successivamente proveremo che, detti T_h e T_h^* gli operatori soluzione fondamentale di L_h e L_h^*, e posto $T = T_m T_{m-1} \dots T_2 T_1$ e $T^* = T_1^* T_2^* \dots T_m^*$, gli operatori T e T^* sono rispettivamente soluzione fondamentale di L e L^*.

Ciò premesso, considerato l'operatore $L_h = \frac{\partial}{\partial x} - (\alpha_h + i\beta_h)\frac{\partial}{\partial y}$ $(\beta_h \neq 0)$, determiniamo le costanti reali $\gamma_{ij}^{(h)}$ $(i,j = 1,2 \;;\; h = 1,2,\dots,m)$ in modo tale che, mediante la trasformazione

$$(15) \qquad \begin{cases} X = \gamma_{11}^{(h)} x + \gamma_{12}^{(h)} y \\ \\ Y = \gamma_{21}^{(h)} x + \gamma_{22}^{(h)} y \end{cases}$$

l'operatore L_h diventi $\frac{\partial}{\partial X} - i\frac{\partial}{\partial Y}$.

Si ha :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial X}\gamma_{11}^{(h)} + \dfrac{\partial u}{\partial Y}\gamma_{21}^{(h)} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial X}\gamma_{12}^{(h)} + \dfrac{\partial u}{\partial Y}\gamma_{22}^{(h)} . \end{cases}$$

Pertanto l'operatore L_h, nelle variabili X e Y, diventa

$$\frac{\partial}{\partial X}\gamma_{11}^{(h)} + \frac{\partial}{\partial Y}\gamma_{21}^{(h)} - (\alpha_h + i\beta_h)\left(\frac{\partial}{\partial X}\gamma_{12}^{(h)} + \frac{\partial}{\partial Y}\gamma_{22}^{(h)}\right).$$

Perchè esso sia uguale a $\frac{\partial}{\partial X} - i\frac{\partial}{\partial Y}$ dev'essere

$$\begin{cases} \gamma_{11}^{(h)} - \alpha_h\gamma_{12}^{(h)} - i\beta_h\gamma_{12}^{(h)} = 1 \\ \\ \gamma_{21}^{(h)} - \alpha_h\gamma_{22}^{(h)} - i\beta_h\gamma_{22}^{(h)} = -i \,, \end{cases}$$

da cui risulta : $\gamma_{11}^{(h)} = 1$; $\gamma_{12}^{(h)} = 0$; $\gamma_{21}^{(h)} = \frac{\alpha_h}{\beta_h}$; $\gamma_{22}^{(h)} = \frac{1}{\beta_h}$.

Pertanto la trasformazione richiesta è :

$$(16)\qquad \begin{cases} X = x \\ Y = \dfrac{\alpha_h}{\beta_h}x + \dfrac{1}{\beta_h}y \end{cases} \text{, da cui} \qquad (17)\qquad \begin{cases} x = X \\ y = -\alpha_h X + \beta_h Y \ . \end{cases}$$

Per quanto notato precedentemente, per l'operatore $\frac{\partial}{\partial X} - i\frac{\partial}{\partial Y}$ esiste una soluzione fondamentale data da

$$(18)\qquad \frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega} \frac{F(W)}{\bar{Z} - \bar{W}}\, dU dV,$$

dove :

$Z = X + iY$; $W = U + iV$;

Ω è il trasformato del dominio A mediante le (17) ;

$F(z) = F(X,Y)$ è la funzione composta mediante la f e le (17).

Tornando, tramite le (16), alle variabili $z = x + iy$ e $\zeta = \xi + i\eta$, si ottiene, per la soluzione fondamentale $T_h f$ di $L_h u = f$, la seguente rappresentazione:

$$(19)\qquad T_h f = \frac{1}{2\pi}\iint_A \frac{f(\zeta)}{x - i\frac{\alpha_h}{\beta_h}x - i\frac{y}{\beta_h} - \xi + i\frac{\alpha_h}{\beta_h}\xi + i\frac{\eta}{\beta_h}} \left|\frac{\partial(U,V)}{\partial(\xi,\eta)}\right| d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi\beta_h}\iint_A \frac{f(\zeta)}{\left(1 - i\frac{\alpha_h}{\beta_h}\right)x - \frac{i}{\beta_h}y - \left(1 - i\frac{\alpha_h}{\beta_h}\right)\xi + \frac{i}{\beta_h}\eta}\, d\xi d\eta .$$

Procedendo in modo analogo si ha :

$$(20)\qquad T_h^{*} f = \frac{1}{2\pi\beta_h}\iint_A \frac{f(\zeta)}{\left(1 + i\frac{\alpha_h}{\beta_h}\right)\xi + \frac{i}{\beta_h}\eta - \left(1 + i\frac{\alpha_h}{\beta_h}\right)x - i\frac{y}{\beta_h}}\, d\xi d\eta$$

La (19) e la (20) forniscono la forma esplicita degli operatori soluzione fondamentale di L_h e L_h^* .

Per dimostrare la II^parte osserviamo che, essendo T_h operatore soluzione fondamentale di L_h, si ha

$$L_h T_h = I \qquad\qquad \text{per } h = 1,2,\ldots\ldots,m$$

dove I é l'operatore identico.

Pertanto, applicando m volte la proprietà associativa, risulta

$$\left(L_1 L_2 \ldots\ldots L_{m-1} L_m\right)\left(T_m T_{m-1} \ldots\ldots T_2 T_1\right) f = \left(L_1 \ldots L_{m-1}\right)\left(L_m T_m\right)\left(T_{m-1} \ldots T_1\right) f =$$

$$= \ldots\ldots\ldots = L_1\left(L_2 T_2\right) T_1 f = L_1 T_1 f = f \ .$$

Resta così provato che $T = T_m T_{m-1} \ldots T_2 T_1$ è operatore soluzione fondamentale di $E = L_1 L_2 \ldots L_{m-1} L_m$.

Analogamente $T^* = T_m^* T_{m-1}^* \ldots T_2^* T_1^*$ è operatore soluzione fondamentale di $E^* = L_1^* L_2^* \ldots L_{m-1}^* L_m^*$.

Per determinare la forma esplicita di T e T^*, poniamo

$$(21) \qquad K_h(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi\left[(\beta_h - i\alpha_h)x - iy - (\beta_h - i\alpha_h)\xi + i\eta\right]} ,$$

$$(22) \qquad K_h^*(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi\left[(\beta_h + i\alpha_h)\xi + i\eta - (\beta_h + i\alpha_h)x - iy\right]} ,$$

per h = 1,2,...m .

Allora le (19) e (20) prendono la seguente forma :

$$(23) \qquad T_h f = \iint_A K_h(z,\zeta) f(\zeta) d\xi\, d\eta \ ,$$

$$(24) \qquad T_h^* f = \iint_A K_h^*(z,\zeta) f(\zeta) d\xi\, d\eta \ .$$

Si ha pertanto

$$T_2T_1f = T_2\iint_A K_1(z,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta = \iint_A K_2(z,\zeta_1)d\xi_1 d\eta_1\iint_A K_1(\zeta_1,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta =$$

$$= \iint_A f(\zeta)d\xi d\eta\iint_A K_2(z,\zeta_1)K_1(\zeta_1,\zeta)d\xi_1 d\eta_1 = \iint_A K^{(2)}(z,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta,$$

dove si è posto

$$K^{(2)}(z,\zeta) = \iint_A K_2(z,\zeta_1)K_1(\zeta_1,\zeta)d\xi_1 d\eta_1 \quad ;\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1 .$$

Analogamente si ha :

$$T_3T_2T_1f = T_3\iint_A K^{(2)}(z,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta = \iint_A K_3(z,\zeta_1)d\xi_1 d\eta_1\iint_A K^{(2)}(\zeta_1,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta =$$

$$= \iint_A f(\zeta)d\xi d\eta\iint_A K_3(z,\zeta_1)K^{(2)}(\zeta_1,\zeta)d\xi_1 d\eta_1 =$$

$$= \iint_A f(\zeta)d\xi d\eta\iint_A K_3(z,\zeta_1)d\xi_1 d\eta_1\iint_A K_2(\zeta_1,\zeta_2)K_1(\zeta_2,\zeta)d\xi_2 d\eta_2 =$$

$$= \iint_A f(\zeta)d\xi d\eta\iint_A d\xi_1 d\eta_1\iint_A K_3(z,\zeta_1)K_2(\zeta_1,\zeta_2)K_1(\zeta_2,\zeta)d\xi_2 d\eta_2 = \iint_A K^{(3)}(z,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta,$$

dove si è posto

$$K^{(3)}(z,\zeta) = \iint_A d\xi_1 d\eta_1\iint_A K_3(z,\zeta_1)K_2(\zeta_1,\zeta_2)K_1(\zeta_2,\zeta)d\xi_2 d\eta_2 \quad \text{con } \zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2 .$$

In generale, per $T = T_m T_{m-1} \cdots T_2 T_1$,si avrà

$$Tf = \iint_A K^{(m)}(z,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta \ , \tag{25}$$

dove si è posto

$$K^{(m)}(z,\zeta) = \iint_A d\xi_1 d\eta_1\iint_A d\xi_2 d\eta_2 \cdots \iint_A d\xi_{m-2}d\eta_{m-2}\iint_A K_m(z,\zeta_1)\cdots K_1(\zeta_{m-1},\zeta)d\xi_{m-1}d\eta_{m-1} \tag{26}$$

con $\zeta_h = \xi_h + i\eta_h$, $h = 1,2,\ldots,m-1$.

Analogamente si ha

(27) $$T^{*}f = \iint_A K^{(m)*}(z,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta,$$ dove si è posto

(28) $$K^{(m)*}(z,\zeta)=\iint_A d\xi_1 d\eta_1 \iint_A d\xi_2 d\eta_2 \dots \iint_A d\xi_{m-2} d\eta_{m-2} \iint_A K^{*}_m(z,\zeta_1)\dots K^{*}_1(\zeta_{m-1},\zeta)d\xi_{m-1}d\eta_{m-1}.$$

Tornando al nostro problema (11),(12), in virtù dei risultati di [2] esiste una ed una soluzione u appartenente allo spazio $\mathcal{U}(A)$.Essa è data da

(29) $$u = Gf ,$$

dove

(30) $$G = TT^{*} - TPT^{*}$$

essendo P il proiettore ortogonale di $\mathcal{L}^2(A)$ sul sottospazio $\Omega(A)$ di $\mathcal{L}^2(A)$ costituito dalle funzioni di $C^{\omega}(A)$ soluzioni della equazione omogenea

(31) $$E^{*}u = 0 \text{ in } A .$$

TEOREMI DI COMPLETEZZA PER LO SPAZIO $\Omega(A)$.

Facciamo vedere che, fissato un opportuno dominio $B \supset \bar{A}$, comunque si scelga $w \in H_m(A)$ soluzione di $E^{*}w = 0$ in A e comunque si scelga $\varepsilon > 0$, esiste $u \in H_m(B)$, soluzione di $E^{*}u = 0$ in B, tale che $||w-u||_A < \varepsilon$.(3)

---

(3) Ora e nel seguito la norma ed il prodotto scalare indicati sono quelli usuali dello spazio $\mathcal{L}^2(A)$.

A tale scopo premettiamo alcuni lemmi.

LEMMA I

Sia $u \in H_2(A)$ e $L^* = -(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$.

Sussiste la seguente implicazione :

$$\left[u|_{\partial A} = 0 \text{ e } L^* u|_{\partial A} = 0 \right] \Rightarrow \left[Du|_{\partial A} = 0 \right] .$$

Dimostrazione.

Posto $u=u_1+iu_2$ (u_1 e u_2 reali), si ha $L^*u = -\frac{\partial u_1}{\partial x} - i\frac{\partial u_2}{\partial x} - i\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial y} =$

$= -\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} - i(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y})$.

Pertanto dev'essere :

$$\text{(i)} \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u_1}{\partial y} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \end{cases} \qquad \text{su } \partial A.$$

D'altra parte, da $u_1 + iu_2 = 0$ su ∂A, consegue

$$\text{(ii)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{\partial u_1}{\partial y}\dfrac{dy}{ds} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial x}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{\partial u_2}{\partial y}\dfrac{dy}{ds} = 0 \end{cases} \qquad \text{su } \partial A.$$

Le (i),(ii) costituiscono un sistema omogeneo di quattro equazioni nelle incognite $\frac{\partial u_1}{\partial x}$, $\frac{\partial u_1}{\partial y}$, $\frac{\partial u_2}{\partial x}$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}$, il cui determinante è $(\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2 \neq 0$.

Pertanto l'unica soluzione di (i),(ii) è $\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0.$

Osserviamo che, in virtù delle (17) che trasformano un qualsiasi operatore L_h^* $(h=1,2,\dots,m)$ del nostro problema in L^*, il lemma continua a sussistere se si sostituisce a L^* uno qualunque degli operatori L_h^*.

LEMMA II

Siano dati :

1) L, L^* gli operatori (13),(14) e sia $K(z,\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\bar{\zeta}-\bar{z}}$, $K^*(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\zeta - z}$

2) un dominio B di $\mathbb{R}^2$ tale che : i) $B \supset \bar{A}$; ii) $\forall z_0 \in \complement \bar{A}$, $\exists z \in \complement \bar{B}$, tale che z e z_0 siano estremi di una poligonale tutta contenuta in $\complement \bar{A}$;

3) $w \in \mathcal{L}^2(A)$.

Sussiste la seguente implicazione :

$$\left((w,u)_A = 0 \ ,\forall u \in C^{\omega}(B) \mid L^* u = 0 \text{ in } B\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{l}\exists \psi \in H_1(A) \text{ , tale che :} \\ \quad L\psi = w \text{ in } A \text{ e } \psi|_{\partial A} = 0\end{array}\right)$$

Dimostrazione.

Per ogni $z \in \complement \bar{B}$ poniamo $u(\zeta) = K^*(z,\zeta)$.

Risulta : $L_\zeta^* u = 0$ in B . Infatti

$$u(\zeta) = K^*(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi} L_\zeta \log|z-\zeta|$$

da cui

$$L_\zeta^* u = -\frac{1}{2\pi} L_\zeta^* L_\zeta \log|z-\zeta| = -\frac{1}{2\pi}\Delta_2 \log|z-\zeta| = 0.$$

Per ipotesi si ha

$$\iint_A w(\zeta)\overline{(K^*(z,\zeta)}d\xi d\eta = 0 \text{ ossia } \iint_A K(z,\zeta)w(\zeta)d\xi d\eta = 0.$$

Tale uguaglianza è vera per la 2) ii), per ogni $z \in \complement \bar{A}$

Posto $\psi(z) = \iint_A K(z,\zeta)w(\zeta)d\xi d\eta$ e $\phi(z) = \iint_A \log|z-\zeta| w(\zeta)d\xi d\eta$, e osservato che $K(z,\zeta) = -\frac{1}{2\pi} L_z \log|z-\zeta|$,risulta $\psi(z) = -\frac{1}{2\pi} L_z^* \phi(z)$.

E poiché $\phi(z)$ appartiene ad $H_2(B)$, (cfr. [3]) , la funzione $\psi(z)$ appartiene ad $H_1(B)$. Inoltre $L_z\psi = -\frac{1}{2\pi} L_z L_z^* \phi = \frac{1}{2\pi}\Delta_2\phi = w$ (formula di Poisson). Infine ψ ,come funzione di $H_1(B)$,attraversa con continuità ∂A(secondo le funzioni di H_1). Quindi $\psi_{|\partial A} = 0$.

Il lemma è così dimostrato.

In virtù delle (16) e (17),tale lemma continua a sussistere se si sostituisce L^* con l'operatore L o con uno degli operatori L_h^* o L_h.

Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA I

Siano L_1^* e L_2^* due degli operatori del nostro problema.

Sia $w \in C^\omega(A) \cap \mathcal{L}^2(A)$ tale che $L_1^* L_2^* w = 0$ in A.

Sia B un dominio soddisfacente la 2) del lemma precedente.

Sussiste la seguente implicazione :

$$\left\{(w,u)_A = 0 \quad \forall u \in C^\omega(B) \text{ tale che } L_1^* L_2^* u = 0 \text{ in } B\right\} \Rightarrow \left\{w = 0 \text{ in } A\right\}$$

Dimostrazione.

Sia $h \in C^\omega(B)$ e tale che $L_2^* h = 0$ in B. Per l'ipotesi ammessa sarà $(w,h)_A = 0$. Per il lemma II esisterà $\sigma \in H_1(A)$ tale che $L_2\sigma = w$ in A, $\sigma_{|\partial A} = 0$.

Sarà,allora, sempre per l'ipotesi ammessa,

$$(*) \qquad (L_2\sigma, u)_A = 0$$

dove u soddisfa le condizioni dell'enunciato. Dalla (*) segue $(\sigma, L_2^* u)_A = 0$ e,ponendo

$$(**) \qquad v = L_2^* u \quad ,$$

si trae

$$(***) \qquad (\sigma, v)_A = 0 \;.$$

La (***) sussiste per ogni $v \in C^{\omega}(B)$, tale che $L_1^* v = 0$ in B. Infatti, data una tale v, esiste sempre una u verificante le condizioni dell'enunciato, tale che sussista la (**). Esisterà, allora, $\rho \in H_1(A)$ tale che $L_1 \rho = \sigma$ in A, $\rho_{|\partial A} = 0$.

Pertanto si avrà $w = L_2 \sigma = L_2 L_1 \rho$. Inoltre, essendo $\sigma \in H_1(A)$, si avrà $\rho \in H_2(A)$. Riesce quindi, $\rho_{|\partial A} = 0$, $L_1 \rho_{|\partial A} = 0$, $L_2^* L_1^* L_2 L_1 \rho = 0$ in A, cioé

$\Delta_2 \rho = 0$ in A, $\rho \in H_2(A) \cap H_4(A_\circ)$ per ogni $A_\circ$ tale che $\bar{A}_\circ \subset A$.

Ne viene (cfr. [2], p. 39) $\rho \equiv 0$ in A e, quindi, $w \equiv 0$

LEMMA III

Sia $u \in H_{n+1}(A)$ con $n \geq 1$.

Sussiste la seguente implicazione :

$$\left(u|_{\partial A} = 0 \text{ e } D^s L^* u|_{\partial A} = 0, 0 \leq |s| \leq n-1 \right) \Rightarrow \left(D^s u|_{\partial A} = 0 , 0 \leq |s| \leq n \right)$$

Dimostrazione per induzione.

Il lemma è vero per $n = 1$ (lemma I) .

Facciamo vedere che, se è vera l'implicazione (ipotesi induttiva)

$$\left(u|_{\partial A} = 0 \text{ e } D^s L^* u|_{\partial A} = 0, 0 \leq |s| \leq n-2 \right) \Rightarrow \left(D^s u|_{\partial A} = 0 , 0 \leq |s| \leq n-1 \right),$$

allora è anche vero che :

$$\left(u|_{\partial A} = 0 \text{ e } D^s L^* u|_{\partial A} = 0, 0 \leq |s| \leq n-1 \right) \Rightarrow \left(D^s u|_{\partial A} = 0 , 0 \leq |s| \leq n \right)$$

E' evidente che :

$$\left\{\begin{array}{l} u|_{\partial A}=0 \text{ e } D^s L^* u|_{\partial A}=0, \\ \text{per } 0\leq|s|\leq n-1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{j) } u|_{\partial A}=0 \text{ e } D^s L^* u|_{\partial A}=0,\ 0\leq|s|\leq n-2 \\ \text{jj) } \left.\dfrac{\partial^{n-1}L^* u}{\partial x^h \partial y^{n-1-h}}\right|_{\partial A}=0,\ 0\leq h\leq n-1 \end{array}\right\}$$

Dalla j),per l'ipotesi induttiva,consegue che $D^s u|_{\partial A}=0,\ 0\leq|s|\leq n-1$.
D'altra parte la jj),scambiando l'ordine di derivazione,diviene :

$$\frac{\partial^{n-1}L^* u}{\partial x^h \partial y^{n-1-h}} = L^*\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^h \partial y^{n-1-h}} = 0$$

su ∂A, $0 \leq h \leq n-1$.

In virtù dell'ipotesi induttiva,si ha

$$\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^h \partial y^{n-1-h}} = 0 \quad \text{su } \partial A \quad \text{per } 0\leq h\leq n-1.$$

Posto $u^{(n-1,h)} = \dfrac{\partial^{n-1}u}{\partial x^h \partial y^{n-1-h}}$, risulta $u^{(n-1,h)} \in H_2(A)$, e quindi,

per il lemma I, si ha $Du^{(n-1,h)}=0$ su ∂A, ossia :

$$\text{(o)}\quad \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^h \partial y^{n-1-h}} = \frac{\partial^n u}{\partial x^{h+1}\partial y^{n-1-h}} = 0$$

su ∂A, per $0\leq h\leq n-1$.

$$\text{(oo)}\quad \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^h \partial y^{n-1-h}} = \frac{\partial^n u}{\partial x^{h}\partial y^{n-h}} = 0$$

Le (o),(oo) si possono scrivere : $\left.\dfrac{\partial^n u}{\partial x^h \partial y^{n-h}}\right|_{\partial A} = 0$, per $0\leq h\leq n$.

Il lemma è così dimostrato.

L'implicazione è ancora valida se si sostituisce L^* con L^*_h ;

in virtù delle (16).

LEMMA IV

Siano:

1) A un dominio limitato di $\mathbb{R}^2$ propriamente regolare;

2) B un dominio soddisfacente la 2) del lemma II;

3) $w \in \mathscr{L}^2(A)$.

Sussiste la seguente implicazione :

$$\left\{(w,u)_A = 0,\ \forall u \in C^\omega(B) \text{ tale che } E^* u = 0 \text{ in } B\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\exists\, \sigma \in H_m(A) \text{ tale che :} \\ E\,\sigma = w \text{ in } A \text{ e } D^s\sigma|_{\partial A} = 0 \\ \text{per } 0 \leq |s| \leq m-1\end{array}\right\}$$

Dimostrazione.

Per ogni $z \in \complement\bar{B}$, poniamo $u(\zeta) = K^{(m)*}(z,\zeta) =$

$$= \iint_B d\xi_1 d\eta_1 \iint_B d\xi_2 d\eta_2 \ldots \iint_B d\xi_{m-2} d\eta_{m-2} \iint_B K_m^*(z,\zeta_1)\ldots K_1^*(\zeta_{m-1},\zeta)\, d\xi_{m-1} d\eta_{m-1}.$$

Risulta $u(\zeta) \in C^\omega(B)$. Pertanto,per l'ipotesi si ha :

$$\iint_A w(\zeta)\left(\overline{K^{(m)*}(z,\zeta)}\right) d\xi d\eta = 0\ ,\ \text{ossia} \iint_A K^{(m)}(z,\zeta) w(\zeta)\, d\xi d\eta = 0\ .$$

Quest'ultima uguaglianza sussiste anche per ogni $z \in \complement\bar{A}$

Pertanto, posto $\sigma(z) = \iint_A K^{(m)}(z,\zeta) w(\zeta)\, d\xi d\eta$, risulta :

$\sigma \in H_m(B)$; $E\sigma = w$ in A ; $D^s\sigma|_{\partial A} = 0$ per $0 \leq |s| \leq m-1$ (poichè σ e le sue derivate,fino a quelle di ordine $m-1$,attraversano con continuità ∂A nel senso delle funzioni di H_m).

TEOREMA II

Sia $m \geq 2$. A e B soddisfino le ipotesi del lemma IV e sia $w \in C^{\omega}(A) \cap \mathcal{L}^2(A)$ tale che:

1) $E^* w = 0$ in A.

Sussiste la seguente implicazione:

$$\left((w,u)_A = 0, \ \forall\, u \in C^{\omega}(B) \text{ tale che } E^* u = 0 \text{ in } B \right) \Longrightarrow \left(w = 0 \text{ in } A \right)$$

Dimostrazione.

Sia $h \in C^{\omega}(B)$ tale che $L_2^* L_3^* \ldots L_m^* h = 0$ in B. Per l'ipotesi assunta riesce $(w,h)_A = 0$. In virtù del Lemma IV esiste $\sigma \in H_{m-1}(A)$ tale che $L_2 \ldots L_m \sigma = w$ in A, $D^s \sigma_{|\partial A} = 0$ per $0 \leq |s| \leq m-2$. Sempre per l'ipotesi ammessa riesce, pertanto,

$$\text{(o)} \qquad (L_2 \ldots L_m \sigma, u)_A = 0,$$

dove u soddisfa le condizioni dell'enunciato.

Dalla (o) segue $(\sigma, L_2^* \ldots L_m^* u)_A = 0$ e, ponendo

$$\text{(oo)} \qquad v = L_2^* \ldots L_m^* u,$$

si deduce

$$\text{(ooo)} \quad (\sigma, v)_A = 0.$$

La (ooo) sussiste per ogni $v \in C^{\omega}(B)$ tale che $L_1^* v = 0$ in B. Infatti assegnata una tale v, esiste sempre una u verificante le condizioni dell'enunciato, tale che sussista la (oo). Per il lemma II esiste, pertanto, $\rho \in H_1(A)$, tale che $L_1 \rho = \sigma$ in A, $\rho_{|\partial A} = 0$. Si ha, pertanto, $w = L_2 \ldots L_m \sigma = L_1 \ldots L_m \rho$.

Inoltre, essendo $\sigma \in H_{m-1}(A)$, si ha $\rho \in H_m(A)$ come facilmente si dimostra usando il teorema di Lichtenstein-Friedrichs ed il fatto che $D^s\sigma_{|\partial A} = 0$ per $0 \le |s| \le m-2$. Riesce, quindi, $\rho_{|\partial A} = 0$, $D^s L_1 \rho_{|\partial A} = 0$ per $0 \le |s| \le m-2$; in virtù del Lemma III, si ha, allora, $D^s\rho_{|\partial A} = 0$ per $0 \le |s| \le m-1$. Inoltre $L_m^* \ldots L_1^* L_m \ldots L_1 \rho = 0$ in A, $\rho \in H_m(A) \cap H_{2m}(A_o)$ per ogni A_o tale che $\bar{A}_o \subset A$. Se ne deduce, pertanto, (cfr. [2], pag. 39) $\rho \equiv 0$ in A e, quindi, $w \equiv 0$.

Dal teorema II consegue la determinazione di un sistema completo nel sottospazio $\Omega(A)$; le funzioni di tale sistema si ottengono considerando in B le soluzioni della equazione omogenea associata alll'operatore E^*; B soddisfa la 2) del Lemma II.

Supponiamo ora che A e B siano semplicemente connessi.

In virtù di teoremi di rappresentazione dovuti a T. Boggio le soluzioni in B di $E^*u = 0$ si possono rappresentare mediante le soluzioni, in B, di $L_i^* u = 0$ (i=1,2..,

Riportiamo qui di seguito, con riferimento agli operatori differenziali del nostro problema, due teoremi di rappresentazione di T. Boggio: [4]

1°) - Se $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2$, con $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ primi fra loro, allora ogni funzione U di $C^\omega(B)$ che soddisfa l'equazione $\mathcal{D} U = 0$ può rappresentarsi con la formula $U = U' + U''$, dove U' e U'' sono funzioni che soddisfano le equazioni $\mathcal{D}_1 U' = 0$ e $\mathcal{D}_2 U'' = 0$.

2°) - Ogni funzione U di $C^\omega(B)$ soddisfacente $\mathcal{D}^{p+1} U = 0$ può sempre rappresentarsi mediante $p+1$ funzioni $U_1, U_2, \ldots U_{p+1}$ che verificano l'equazione $\mathcal{D} U = 0$, per mezzo della formula $U = x^p U_1 + x^{p-1} U_2 + \ldots + x U_p + U_{p+1}$.

Applicando il Teorema 1°) al caso dei nostri operatori, se $E^* = L_1^* \ldots L_m^*$ con

$L_h^* \neq L_j^*$ per $h \neq j$, risulta

$$\omega = \sum_{h=1}^{m} u^{(h)},$$

dove ω è una generica soluzione in B di $E^*\omega = 0$ e le $u^{(h)}$ sono soluzioni in B delle equazioni omogenee associate agli operatori L_h^*, per $h = 1,2,\dots m$.

Più in generale, per i teoremi 1°) e 2°), se $E^* = L_1^{*s_1} \dots L_p^{*s_p}$, con $s_i \in N$ e $s_1+s_2+\dots+s_p = m$, per ω tale che $E^*\omega = 0$ in B, si ha

$$\omega = \sum_{h=1}^{p} (x^{s_h-1} u_{h,1} + x^{s_h-2} u_{h,2} + \dots\dots + x u_{h,s_h-1} + u_{h,s_h}) \tag{38}$$

con le $u_{h,j}$ $(1 \leq j \leq s_h)$ soluzioni della equazione omogenea associata all'operatore L_h^* in B.

Sia ω una soluzione in B dell'equazione $E^*\omega = 0$. Per essa sussiste la (38). D'altra parte, in ogni compatto contenuto in B (e, in particolare, in $\bar{A}$), per classici risultati si ha:

$$u_{h,j} = \lim_{n\to\infty} P_{h,j}^{(n)} , \tag{38'}$$

essendo $P_{h,j}^{(n)}$ un polinomio nella variabile complessa $x+i(\frac{\alpha_h}{\beta_h} x + \frac{1}{\beta_h} y)$.

Ne viene che la successione di funzioni

$$\{[x+i(\frac{\alpha_h}{\beta_h} x + \frac{1}{\beta_h} y)]^n\} \qquad (h = 1,\dots,p;\ n = 0,1,2,\dots)$$

costituisce, per la (38') e per il Teorema II, un sistema completo in $\Omega(A)$. Ordinando in una successione ad un solo indice quella testé indicata, si ottiene la successione $\{\omega_k\}$ $(k =1,2,\dots)$.

Ciò premesso, ritornando al problema di determinare la forma esplicita dell'operatore G dato dalla (30), si ha

$$TT^*f = \iint_A K^{(m)}(z,\zeta_1)d\xi_1 d\eta_1 \iint_A K^{(m)*}(\zeta_1,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta =$$

$$= \iint_A f(\zeta)d\xi d\eta \iint_A K^{(m)}(z,\zeta_1)K^{(m)*}(\zeta_1,\zeta)d\xi_1 d\eta_1 .$$

Pertanto

$$(39)\qquad TT^* = \iint_A K^{(m)}(z,\zeta_1)K^{(m)*}(\zeta_1,\zeta)d\xi_1 d\eta_1 ,$$

con $K^{(m)}$ e $K^{(m)*}$ dati rispettivamente dalla (26) e (28) .

Tenendo presente il significato del proiettore P che figura nella (30), risulta

$$PT^*f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\omega_k \ , \ \text{con} \quad a_k = (T^*f,\omega_k)_A =$$

$$= \iint_A \left(\iint_A K^{(m)*}(\zeta_1,\zeta)f(\zeta)d\xi d\eta\right)\bar{\omega}_k(\zeta_1)d\xi_1 d\eta_1 =$$

$$= \iint_A \left(\iint_A K^{(m)*}(\zeta_1,\zeta)\bar{\omega}_k(\zeta_1)d\xi_1 d\eta_1\right) f(\zeta)d\xi d\eta \ .$$

Pertanto

$$PT^* = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\iint_A K^{(m)*}(\zeta_1,\zeta)\bar{\omega}_k(\zeta_1)d\xi_1 d\eta_1\right)\omega_k(z) \ , \quad \text{da cui}$$

$$(40)\quad TPT^* = \sum_{k=1}^{\infty}\iint_A K^{(m)}(z,\zeta_1)\left(\iint_A K^{(m)*}(\zeta_2,\zeta)\omega_k(\zeta_2)d\xi_2 d\eta_2\right)\omega_k(\zeta_1)d\xi_1 d\eta_1 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\iint_A K^{(m)}(z,\zeta_1)\omega_k(\zeta_1)d\xi_1 d\eta_1 \iint_A K^{(m)*}(\zeta_1,\zeta)\bar{\omega}_k(\zeta_1)d\xi_1 \, d\ \ _1 \ .$$

Infine, per le (39), (40), l'operatore di Green ha la seguente forma :

$$(41)\quad G = TT^* - TPT^* = \iint_A K^{(m)}(z,\zeta_1)K^{(m)*}(\zeta_1,\zeta)d\xi_1 d\eta_1 -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty}\iint_A K^{(m)}(z,\zeta_1)\omega_k(\zeta_1)d\xi_1 d\eta_1 \iint_A K^{(m)*}(\zeta_1,\zeta)\bar{\omega}_k(\zeta_1)d\xi_1 d\eta_1 \ .$$

Tale rappresentazione dell'operatore G può essere impiegata per il calcolo degli autovalori del seguente problema:

$$(1') \quad EE^{*} v - \lambda v = 0 \qquad v \in \mathcal{U}(A)$$

$$(2') \quad D^{s} v = 0 \qquad \text{su } \partial A \text{ , per } 0 \leq |s| \leq m-1$$

secondo la teoria esposta in [5] (cfr. pp. 69-71).

B I B L I O G R A F I A

1 G. FICHERA, Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems - Lecture Notes in Mathem. n°8, Springer Verlag - Berlin,Heidelberg,New York - 1965.

2 G. FICHERA, Generalized biharmonic problem and related eigenvalue problem , Blanch Anniversary Volume, Aerospace Research Laboratories, Office of Aerospace Research, USAF, Feb. 1967.

3 K.O.FRIEDRICHS, A Theorem of Lichtenstein, Duke Math. Journ.,vol.14,1947.

4 T.BOGGIO, Sull'integrazione di alcune equazioni lineari alle derivate parziali, Annali di Matematica,Serie III,Tomo VIII,1903.

5 G. FICHERA, Numerical and Quantitative Analysis, Pitman, London, San Francisco, Melbourne, 1978.