$$d\ell = \sqrt{[(T^2(x)+A^2(x)]\ [1-(1-\lambda^2)A^2(x)T^2(x)]}\ dx \qquad (10)$$

E' da notare che l'integrazione dei secondi membri di (9) e (10) non è riconducibile a funzioni conosciute (compresi gli integrali ellittici), con l'eccezione della (10) nei casi $\lambda = 1$ (che risulta banale) e $\lambda = -1$ (che esprime la dipendenza delle funzioni iperboliche ordinarie della lunghezza dell'arco di iperbole, ed è riconducibile ad un integrale ellittico di seconda specie). Questo fatto rende particolarmente complicato lo studio delle funzioni in questione: ma, anche prescindendo da tale difficoltà, la trattazione precedente mostra in maniera convincente che la scelta a priori di un parametro uniformizzante diverso dalla doppia area del settore proposta in I non porta a risultati interessanti, e, in particolare, non consente una presentazione alternativa delle funzioni ellittiche (quale è stata ottenuta in I) che esibisca semplicità di comportamento e notevoli proprietà di simmetria. Queste considerazioni sembrano rafforzare la convinzione che il ruolo particolare svolto dal parametro uniformizzante x usato nella presente trattazione non possa essere ricondotto ad un'ovvia conseguenza di procedimenti standard di geometria algebrica.

§ I.2.- Sullo sviluppo in serie di Taylor delle FTG.

In questo paragrafo verrà ripreso il problema dello sviluppo in serie di Taylor delle FTG, per fornire la dimostrazione dell'osservazione fatta in I, secondo cui i coefficienti degli sviluppi in serie di A_n e T_n (I-11) sono tutti non nulli e di segno alterno [11)]. Verranno anche scritti

---

11)Ricordiamo che gi sviluppi in serie considerati procedono per potenze di x^n, a partire da x per A e da 1 per T.

esplicitamente i primi termini della formula generale di sviluppo per n generico.

Supponiamo fissato una volta per tutte l'ordine n delle FTG (con $n > 2$), e iniziamo la dimostrazione enunciando il seguente lemma, di verifica immediata in quanto è una conseguenza diretta delle (2): "La derivata di un polinomio omogeneo in A e T di grado $r \geq 1$ è un polinomio omogeneo in A e T di grado $r + \Delta$ con $\Delta = n - 2$".

Come conseguenza del lemma suddetto, essendo le funzioni A e T casi particolari di polinómi omogenei in A e T (di grado 1), la loro derivata s-esima risulterà un polinomio omogeneo in A e T di grado $1 + s\,\Delta$, così che si potrà scrivere,p.es.:

$$\frac{d^s A}{dx^s} = \sum_{k=0}^{1+s\Delta} C_k^{(s)} A^k T^{1+s\Delta-k} \tag{11}$$

ove le $C_k^{(s)}$ sono opportuni coefficienti. Una formula analoga alla (11) varrà anche per la derivata s-esima di T, con diversi valori dei coefficienti $C_k^{(s)}$.

Derivando ulteriormente la (11) rispetto a x, si ottiene:

$$\frac{d^{s+1} A}{dx^{s+1}} = \sum_{k=0}^{1+s\Delta} C_k^{(s)} \left[k A^{k-1} T^{1+(s+1)\Delta-(k-1)} - (1+s\Delta-k) A^{\Delta+1+k} T^{s\Delta-k} \right]$$

Nel primo pezzo della somma a secondo membro si può eliminare il termine con $k = 0$ e ridefinire $k-1$ come k; analogamente, nell'altro pezzo si può eliminare il termine con $k = 1+s\Delta$, e ridefinire come k la quantità $\Delta + 1 + k$. In questo modo si ottiene:

$$\frac{d^{s+1} A}{dx^{s+1}} = \sum_{k=0}^{s\Delta} C_{k+1}^{(s)} A^k T^{1+(s+1)\Delta-k} - \sum_{k=\Delta+1}^{1+(s+1)\Delta} C_{k-(\Delta+1)}^{(s)} \left[2+(s+1)\Delta-k\right] A^k T^{1+(s+1)\Delta-k} \tag{12}$$

che può essere confrontata con la (11) riscritta per la derivata (s+1)-

esima, il che porta all' identificazione [12)]

$$C_k^{(s+1)}=(k+1)C_{k+1}^{(s)} - \left[2+(s+1)\Delta-k\right]C_{k-(\Delta+1)}^{(s)} \qquad (13)$$

E' chiaro che, a causa dei diversi limiti tra cui varia l'indice k nelle due somme a secondo membro della (12), vi saranno dei valori di k per cui $C_k^{(s+1)}$ riceve un contributo solo da una di tali somme; tuttavia si può conservare alla (13) una validità generale assumendo che, tutte le volte che l'indice j di $C_j^{(s)}$ esce fuori dall'intervallo dei valori ammessi ($0 \leq j \leq 1 + s\Delta$) il corrispondente $C_j^{(s)}$ vada preso uguale a zero. In questo modo è facile verificare che si tiene esattamente conto di tutte le situazioni in cui il contributo a $C_k^{(s+1)}$ viene soltanto da una delle due somme che figurano nella (12).

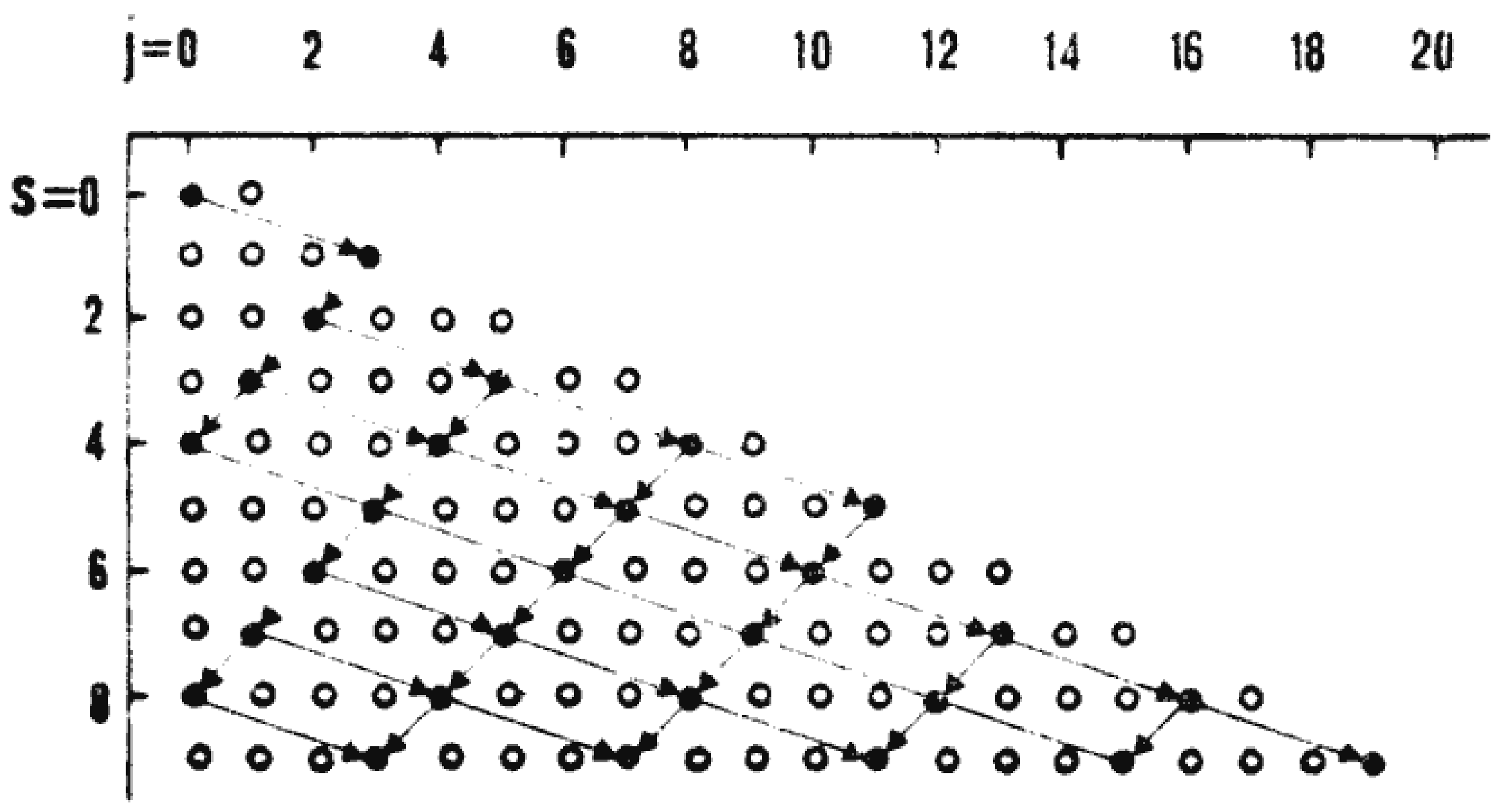
Una prima considerazione da fare a proposito della (13) è che gli indici dei due coefficienti che vi figurano (sia che cadano o che non cadano nell'intervallo dei valori ammessi) sono sempre spaziati di n. (Infatti è $(k+1) - (k-\Delta-1) = \Delta+2=n$). Ne segue che, se in una particolare derivata di A o di T gli indici dei coefficienti non nulli sono spaziati di n, ciò avviene anche per tutte le derivate successive. Ma questo è quanto succede per tutte le derivate di A e T: infatti per $s = 0$ c'è un solo coefficiente $\neq 0$ ($C_0^{(o)}$ per T, $C_1^{(o)}$ per A); e non è difficile dedurre che, applicando le conclusioni del ragionamento precedente, tale fatto garantisce che tutte le derivate successive di tali funzioni contengono soltanto monomi in cui le potenze di A (e di T) differiscono tra loro per multipli

---

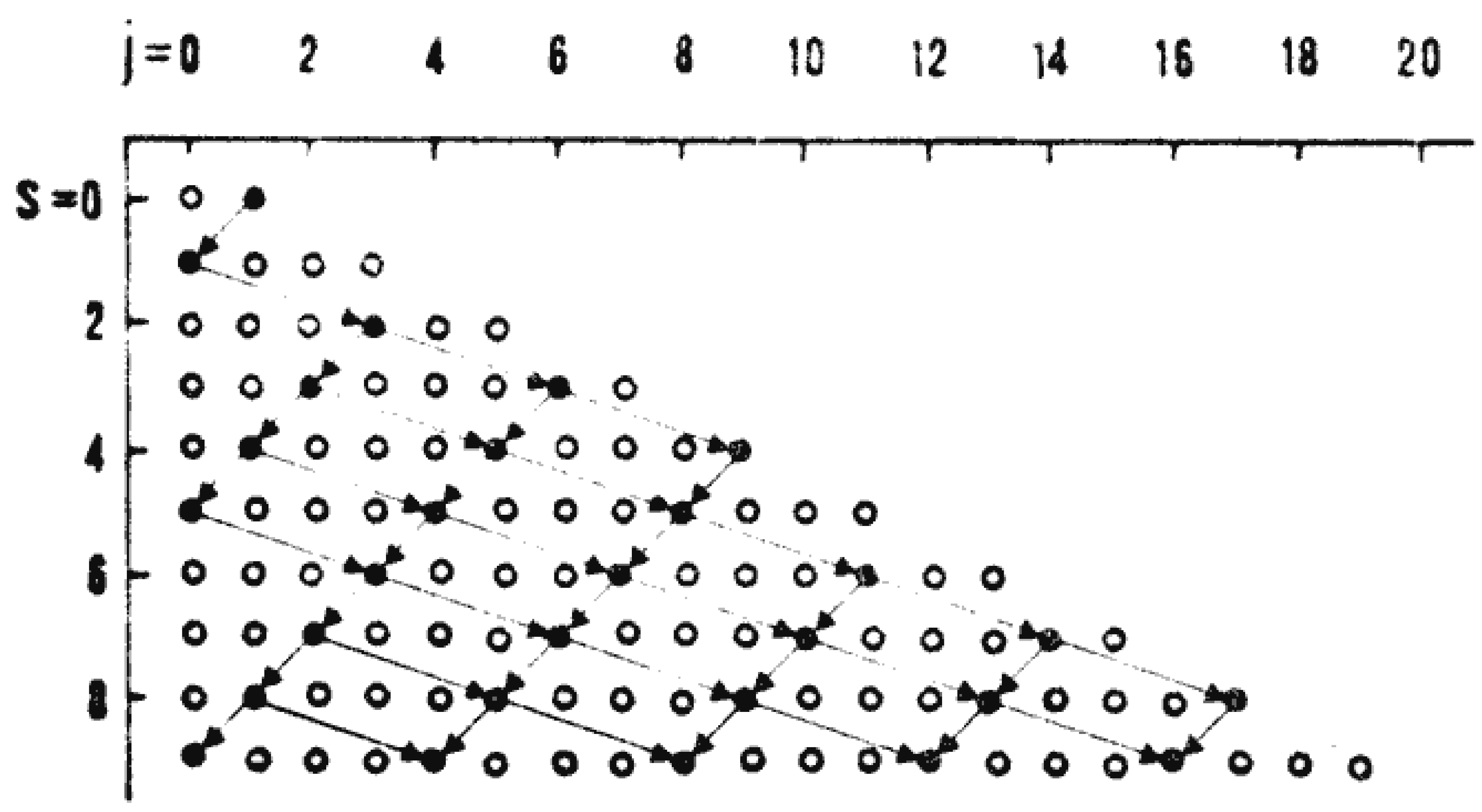
12) E' evidente che, benché la (11) e la (12) siano state scritte formalmente per le derivate di A, l'identico ragionamento vale anche per le derivate di T, così che la (13) e le considerazioni che seguono verranno sempre riferite ad entrambi i casi.

di n.[13].

La struttura dell'insieme dei coefficienti $C_j^{(s)}$ può essere facilmente visualizzata



T



A

fig. 1

13) Che questa conclusione non sia banale (come forse potrebbe sembrare) lo si può dedurre dal fatto che essa non è applicabile, p.es., alla funzione A+T: infatti in tal caso si hanno in partenza (s=0) due coefficienti non nulli contigui (cioè con separazione minore di n) e ciò invalida la premessa del ragionamento.

arrangiandoli nella matrice pseudo-triangolare mostrata in Fig. 1 (in cui si è posto n = 4, ma l'estensione agli altri valori di n è immediata). La riga corrispondente ad un certo valore di s corrisponde alla successione dei $C_j^{(s)}$; i coefficienti non nulli sono indicati con un circoletto nero, quelli nulli con un circoletto bianco. Passando da una riga alla successiva, il numero dei circoletti aumenta di n-2 unità (la prima riga ha sempre due circoletti, uno bianco e uno nero).

Le frecce che uniscono un punto di una riga ad uno della riga successiva mostrano il contributo dato da uno dei $C_j^{(s)}$ a uno dei $C_k^{(s+1)}$ attraverso la (13); è chiaro che tali frecce sono mostrate solo per i coefficienti non nulli. In particolare, le frecce corte, che vanno da destra verso sinistra, corrispondono al primo termine della (13) (j=k+1), e <u>non comportano</u> un cambiamento di segno di $C_k^{(s+1)}$ rispetto a $C_j^{(s)}$; invece le frecce lunghe, che vanno da sinistra verso destra, corrispondono al secondo termine della (13) (j=k+1-n) e <u>comportano</u> un cambiamento di segno. Ogni punto non può ricevere dalla riga superiore più di due frecce (una lunga e una corta): ovviamente, in particolari posizioni esso può riceverne solo una. Analogamente, da un punto non possono partire più di due frecce. Si vede che i coefficienti non nulli sono disposti lungo diagonali equidistanti: conviene considerare quelle nella direzione delle frecce corte, contandole a partire da sinistra. E' facile concludere che tutti i coefficienti di tali diagonali sono $\neq 0$ e di segno concorde, e che i segni si alternano passando da una diagonale alla successiva. La cosa è ovvia per le prime due diagonali, i cui punti sono raggiunti da una sola freccia (si noti che, per ipotesi, in entrambi i diagrammi di Fig.1 il punto più in alto corrisponde ad un coefficiente positivo). Ricordando l'effetto sui segni dovuto alle frecce, si conclude immediatamente che la prima diagonale consiste di coefficienti positivi, la seconda di coefficienti negativi.

Quanto alle successive, il punto più in alto riceve una sola freccia lunga, e quindi corrisponde ad un coefficiente di segno contrario a quelli della diagonale precedente; tutti gli altri ricevono una freccia corta della stessa diagonale, e una freccia lunga dalla diagonale precedente, e quindi i rispettivi contributi che entrano nella (13) risultano sempre di segno concorde: ne segue che i coefficienti non possono mai annullarsi. Il segno dei coefficienti corrispondenti ai punti della diagonale in esame, uguale per tutti, è chiaramente lo stesso di quello corrispondente al punto più alto, e, per quanto detto prima, è opposto al segno associato ai punti della diagonale precedente. I coefficienti degli sviluppi in serie di Taylor (I-11) sono chiaramente legati alla successione dei coefficienti $C_0^{(s)}$ (corrispondenti ai punti situati sulla prima verticale a sinistra): si conferma quindi il risultato, trovato in I, che i coefficienti non nulli sono spaziati ad intervalli di n, a partire da $s = 0$ per T e da $s = 1$ per A; tali coefficienti, per quanto detto, non possono mai annullarsi, e, appartenendo due coefficienti non nulli consecutivi a diagonali contigue, essi risultano di segno alternato.

Quanto all'espressione effettiva di tali coefficienti in funzione di n, il ragionamento precedente non permette di ricavarne facilmente un'espressione esplicita, perché l'applicazione a catena delle (13) porta rapidamente a complicazioni insormontabili. Per ottenere tale espressione (almeno per i primi termini), è più semplice usare un procedimento ricorrente, in cui si calcolano alternativamente i coefficienti delle due funzioni A_n e T_n. Per fissare le idee, supponiamo di conoscere lo sviluppo di $A_n(x), T_n(x)$ fino all'ordine, rispettivamente, x^{kn+1} e x^{kn}; tali sviluppi, per quanto già detto, risulteranno della forma seguente:

$$A_n(x) \simeq x \left[1 + \sum_{s=1}^{k} \alpha_s (x^n)^s\right] \tag{14}$$

$$T_n(x) \simeq 1 + \sum_{s=1}^{k} \beta_s (x^n)^s \tag{15}$$

[Ovviamente,se k = 0 le sommatorie a secondo membro sono assenti].

Si formi ora la potenza (n-1)-esima del polinomio in parentesi quadra a secondo membro della (14), e si isoli , nel risultato, il coefficiente dalla potenza $(x^n)^k$. Tale coefficiente, che chiameremo γ, è una funzione univoca degli α_s (con $s \leq k$). E' immediato vedere che, nello sviluppo di $[A_n(x)]^{n-1}$, tale coefficiente moltiplica la potenza $x^{(k+1)n-1}$; integrando e ricordando le (2), si vede che $-\frac{\gamma}{(k+1)n}$ risulta essere il coefficiente di $x^{(k+1)n}$ nello sviluppo di $T_n(x)$.

Si è quindi ottenuto il termine successivo nello sviluppo della (15). Analogamente, partendo dalla (15), elevando il polinomio a secondo membro alla potenza (n-1), isolando il termine in x^{kn} e chiamando γ' il suo coefficiente, si conclude che $\frac{\gamma'}{kn+1}$ è il coefficiente della potenza x^{kn+1} nello sviluppo di $A_n(x)$; poiché di fatto, in base al risultato precedente, la (15) è conosciuta fino all'ordine (k+1) in x^n, è dunque possibile aggiungere un ulteriore termine alla (8) (di ordine $x^{(k+1)n+1}$).

In tale maniera si riesce a costruire, termine a termine, gli sviluppi in serie (14) e (15) fino a un ordine comunque elevato, a partire dall'ovvio caso k = 0; il limite a tale procedimento è posto soltanto dalla complessità dei calcoli, che diventano sempre più complicati col progredire dei termini della serie. Nella tabella I sono riportati i risultati fino a

$k=4$ non solo per A_n e T_n, ma anche per $\frac{1}{T_n}$ e S_n, i cui sviluppi sono deducibili in maniera immediata a partire dalla (14) e (15) (pur se l'effettuazione materiale dei calcoli presenta le stesse difficoltà che si hanno per A_n e T_n).

L'osservazione dei coefficienti di A_n e T_n riportati nella tabella I mostra alcune caratteristiche di regolarità (p.es., nei denominatori). E' possibile concludere che in A_n a partire dal termine in x^{n+1} è sempre presente un fattore $(n-1)$, che si mantiene alla prima potenza in tutti i termini successivi, mentre in T_n c'è un fattore $(n-1)^2$ a partire dal termine in x^{2n}, e anch'esso si mantiene in tutti i termini successivi[14]. Anche le potenze di $(n+1)$ nei denominatori dei coefficienti, che, per così dire, rompono (a partire dai coefficienti con $k=3$) la progressione regolare osservabile negli altri fattori, crescono di una unità per ogni coefficiente successivo. La sola cosa che sfugge apparentemente a qualsiasi criterio di regolarità è l'espressione dei polinomi in n che appaiono, con grado sempre crescente (apparentemente per salti di tre unità) a numeratore dei coefficienti a partire da $k=2$ per $A_n(x)$, e da $k=3$ per $T_n(x)$. E' ipotizzabile che una relazione di ricorrenza, presumibilmente di tipo non semplice, esista anche per tali polinomi; tuttavia è difficile scorgere, nella loro espressione, un indizio anche lieve sulla natura di tale relazione. E' immediato controllare che nei casi noti ($n=2$, per cui si riottengono gli sviluppi delle funzioni trigonometriche, e anche $n=1$ per $1/T$ e S), come pure nei casi studiati in I($n=3,4,6$) si ritrovano tutti i risultati già ottenuti: in particolare, per $n = 3$ si può verificare la coincidenza numerica (a parte i segni) dei coefficienti corrispondenti di A e S, nonché di T e $1/T$, dovuta alle formule collegative (eq. (I-12) e (I-13)).

---

14) Tali fattori sono necessari per riprodurre la situazione che si ha per $n = 1$ (cf. (I-7)).

TABELLA I

$$A_n(x) = x - \frac{n-1}{n(n+1)} x^{n+1} + \frac{(n-1)(2n^2-3n-1)}{n(n+1)(2n)(2n+1)} x^{2n+1} -$$

$$- \frac{(n-1)(12n^5-34n^4+n^3+33n^2+11n+1)}{n(n+1)(2n)(2n+1)(3n)(3n+1)(n+1)} x^{3n+1} +$$

$$+ \frac{(n-1)(144n^8-644n^2+520n^6+861n^5-565n^4-674n^3-194n^2-23n-1)}{n(n+1)(2n)(2n+1)(3n)(3n+1)(4n)(4n+1)(n+1)^2} x^{4n+1} - \ldots$$

$$T_n(x) = 1 - \frac{x^n}{n} + \frac{(n-1)^2}{n(n+1)(2n)} x^{2n} - \frac{(n-1)^2(4n^3-6n^2-3n+1)}{n(n+1)(2n)(2n+1)(3n)(n+1)} x^{3n} +$$

$$+ \frac{(n-1)^2(36n^6-116n^5+41n^4+100n^3-6n^2-8n+1)}{n(n+1)(2n)(2n+1)(3n)(3n+1)(4n)(n+1)^2} x^{4n} - \ldots\ldots$$

$$S_n(x) = x + \frac{2}{n(n+1)} x^{n+1} + \frac{2(-n^2+5n+2)}{n(n+1)(2n)(2n+1)} x^{2n+1} + \frac{4(2n^5-16n^4+23n^3+44n^2+17n+2)}{n(n+1)(2n)(2n+1)(3n)(3n+1)(n+1)} x^{3n+}$$

$$+ \frac{4(-18n^8+193n^7-585n^6-38n^5+1500n^4+1313n^3+443n^2+68n+4)}{n(n+1)(2n)(2n+1)(3n)(3n+1)(4n)(4n+1)(n+1)^2} x^{4n+1} + \ldots$$

$$\frac{1}{T(x)} = 1 + \frac{x^n}{n} + \frac{-n^2+4n+1}{n(n+1)(2n)} x^{2n} + \frac{4n^5-26n^4+31n^3+49n^2+13n+1}{n(n+1)(2n)(2n+1)(3n)(n+1)} x^{3n} +$$

$$+ \frac{-36n^8+320n^7-811n^6-54n^5+1555n^4+1052n^3+251n^2+26n+1}{n(n+1)(2n)(2n+1)(3n)(3n+1)(4n)(n+1)^2} x^{4n} + \ldots\ldots\ldots$$